



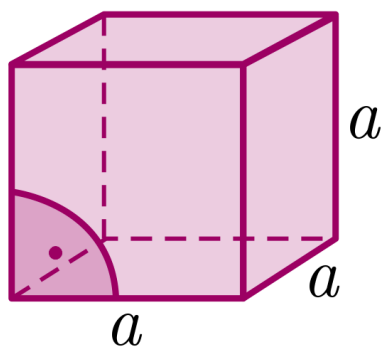
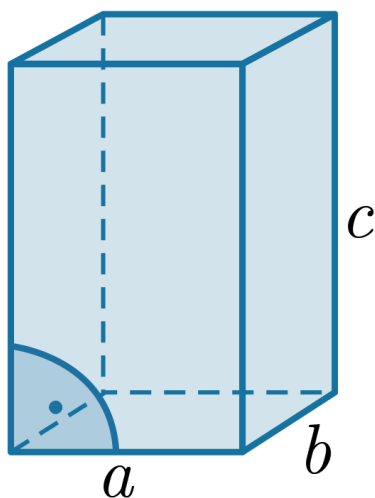
Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni prostopadłościanu o krawędziach długości a , b , c obliczamy dodając pola wszystkich ścian tej bryły.

$$P = 2ab + 2bc + 2ac$$



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Jeśli wszystkie krawędzie prostopadłościanu są równe a , to wzór na pole powierzchni prostopadłościanu można zapisać w postaci sumy algebraicznej:

$$P = 2aa + 2aa + 2aa$$

Chcąc sprowadzić ten wzór do najprostszej postaci, dodajemy wyrazy sumy.

$$P = 2aa + 2aa + 2aa = 6aa = 6a^2$$

W tym materiale będziemy nie tylko dodawać wyrażenia algebraiczne, ale również będziemy je odejmować.

1. [Interaktywna treść merytoryczna](#)

2. [Gra edukacyjna](#)

3. [Zestaw ćwiczeń interaktywnych](#)

4. [Słownik](#)

Twoje cele

- Dodasz wyrażenia algebraiczne.
- Odejmiesz wyrażenia algebraiczne.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne i zapiszesz je w najprostszej postaci.
- Zapiszesz treść i odpowiedź do zadania w postaci wyrażenia algebraicznego.



Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com / Unsplash.com, licencja: CC BY 3.0.

Po podwórku chodzą gęsi, kaczki i kury. Kur jest o 6 więcej niż kaczek. Gęsi jest o 2 mniej niż kur. Ile wszystkich ptaków chodzi po podwórku?

Z treści zadania nie można wywnioskować, ile kaczek chodzi po podwórku. Oznaczmy więc liczbę kaczek literą k .

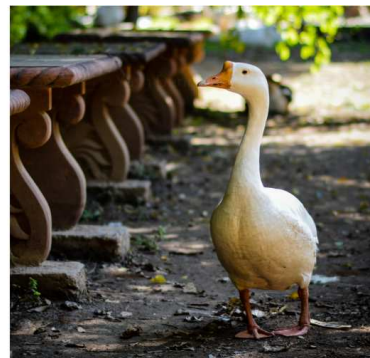
Wtedy liczba kur jest równa $k + 6$, a liczba gęsi $k + 6 - 2$.



k - liczba kaczek



$k + 6$ - liczba kur



$k + 6 - 2$ - liczba gęsi

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com / Unsplash.com, licencja: CC BY 3.0.

Liczbę wszystkich ptaków chodzących po podwórku zapisujemy za pomocą wyrażenia algebraicznego:

$$k + k + 6 + k + 6 - 2$$

Wyrażenie to możemy zapisać w prostszej postaci, wykonując redukcję wyrazów podobnych.

$$k + k + 6 + k + 6 - 2 = (k + k + k) + (6 + 6 - 2) = 3k + 10$$

Wyrażenie, które przekształciliśmy, to **suma algebraiczna**.

Sumą algebraiczną nazywamy sumę jednomianów.

Jednomiany, które dodajemy to wyrazy sumy.

Wyrazy podobne występujące w sumie algebraicznej można redukować.

Przykład 1

Tabela przedstawia sumy algebraiczne i wyrazy tych sum.

Suma algebraiczna	Wyrazy sumy
$x + 4y - 7$	$x, 4y, -7$
$5ab + c - dc + 1$	$5ab, c, -dc, 1$
$m^2 - 5mc + 90$	$m^2, -5mc, 90$

Odejmowanie można zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej, zatem **sumą algebraiczną** jest też różnica **jednomianów**.

Przykład 2

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $W = 10 + 6x - 4x + 7x - 9$.

Grupujemy wyrazy podobne i wykonujemy dodawanie.

$$W = (6x - 4x + 7x) + (10 - 9)$$

$$W = 9x + 1$$

Przykład 3

Zapiszemy za pomocą wyrażenia algebraicznego:

- sumę czterech kolejnych liczb naturalnych,
- sumę czterech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych,
- sumę czterech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez trzy.

Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez n najmniejszą z rozważanych liczb naturalnych. Kolejne liczby naturalne różnią się o 1.

Wtedy:

n – pierwsza liczba naturalna,

$n + 1$ – druga liczba naturalna,

$n + 2$ – trzecia liczba naturalna,

$n + 3$ – czwarta liczba naturalna.

Suma liczb:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = (n + n + n + n) + (1 + 2 + 3) = 4n + 6.$$

- I sposób:**

Oznaczmy przez m najmniejszą z rozważanych liczb nieparzystych naturalnych.

Kolejne liczby różnią się o 2.

Zatem:

m – pierwsza liczba nieparzysta,

$m + 2$ – druga liczba nieparzysta,

$m + 4$ – trzecia liczba nieparzysta,

$m + 6$ – czwarta liczba nieparzysta.

Suma liczb:

$$m + m + 2 + m + 4 + m + 6 = 4m + 12.$$

II sposób:

Kolejne liczby nieparzyste to: 1, 3, 5, 7, 9, ... Są to liczby, które przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1.

Oznaczmy przez n dowolną liczbę naturalną dodatnią. Wtedy cztery kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci:

$$2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7.$$

Suma liczb:

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 + 2n + 7 = 8n + 16.$$

c. I sposób:

Oznaczmy przez m pierwszą z rozważanych liczb podzielnych przez 3. Kolejne liczby podzielne przez 3 różnią się o 3.

Wtedy:

m – pierwsza liczba podzielna przez trzy,

$m + 3$ – druga liczba podzielna przez trzy,

$m + 6$ – trzecia liczba podzielna przez trzy,

$m + 9$ – czwarta liczba podzielna przez trzy.

Suma liczb:

$$m + m + 3 + m + 6 + m + 9 = 4m + 18.$$

II sposób:

Kolejne liczby naturalne podzielne przez trzy to: 0, 3, 6, 9, 12, ... Są to kolejne wielokrotności liczby trzy.

Oznaczmy przez n dowolną liczbę naturalną.

Wtedy cztery kolejne wielokrotności liczby trzy można zapisać w postaci: $3n$, $3n + 3$, $3n + 6$, $3n + 9$.

Suma liczb:

$$3n + 3n + 3 + 3n + 6 + 3n + 9 = 12n + 18.$$

Przykład 4

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne, stanowiące odpowiedź do poniższego zadania.

W sadzie rosną grusze, śliwy, jabłonie i czereśnie. Grusz jest dwa razy więcej niż śliw, jabłoni jest tyle ile grusz i śliw razem. Czereśni rośło początkowo trzy razy tyle ile pozostałych drzew.

Niestety wichura zniszczyła pięć czereśni.

Obliczymy, ile co najmniej wszystkich drzew rośnie teraz w sadzie.

Oznaczmy przez s liczbę śliw rosnących w ogrodzie, przez L liczbę wszystkich drzew rosnących w ogrodzie. Potrzebne dane zamieścimy w tabelce.

Liczba rosnących teraz w ogrodzie:			
śliw	grusz	jabłoni	czereśni
s	$2s$	$s + 2s$	$3(s + 2s + s + 2s) - 5$

Aby obliczyć ile wszystkich drzew rośnie w ogrodzie, dodajemy liczbę rosnących tam śliw, grusz, jabłoni i czereśni.

$$L = s + 2s + s + 2s + 3(s + 2s + s + 2s) - 5$$

Redukujemy wyrazy podobne i wykonujemy dodawanie w nawiasie.

$$L = 6s + 3 \cdot 6s - 5$$

$$L = 6s + 18s - 5 = 24s - 5$$

Najmniejszą liczbą naturalną dodatnią jest jeden.

$$24 \cdot 1 - 5 = 24 - 5 = 19$$

Odpowiedź:

W sadzie rośnie co najmniej 19 drzew.

Sumy algebraiczne można dodawać i odejmować. Aby dodać dwie sumy algebraiczne, zapisujemy je w nawiasach, między którymi stawiamy znak plus. Opuszczamy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne.

Ważne!

Jeżeli przed nawiasem, w którym zapisana jest **suma algebraiczna** stoi znak plus (lub nie ma żadnego znaku), to opuszczając nawias, znaki w nawiasie pozostawiamy bez zmiany.

Przykład 5

Niech $W = 4x - y + 5$ i $U = x + 2y - 5$. Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $W + U$

$$W + U = (4x - y + 5) + (x + 2y - 5)$$

Opuszczamy nawiasy (nie zmieniając znaków!) i redukujemy wyrazy podobne.

$$W + U = 4x - y + 5 + x + 2y - 5 = 5x + y$$

Odejmując dwie sumy algebraiczne postępujemy podobnie, jak przy dodawaniu sum algebraicznych. Sumy zapisujemy w nawiasach, między którymi stawiamy znak minus. Opuszczając nawias – zmieniamy znaki na przeciwne w sumie, którą odejmujemy.

Ważne!

Odejmując dwie sumy algebraiczne, w sumie, przed którą stoi znak minus, opuszczając nawias, zmieniamy znaki na przeciwne.

Przykład 6

Niech $W = 3a - 4b + c$ i $U = -a - 4b + 2c$. Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie $W - U$.

$$W - U = (3a - 4b + c) - (-a - 4b + 2c)$$

Opuszczając nawiasy, zmieniamy znaki w wyrażeniu $(-a - 4b + 2c)$ na przeciwne.

$$W - U = 3a - 4b + c - (-a) - (-4b) - (+2c)$$

$$W - U = 3a - 4b + c + a + 4b - 2c$$

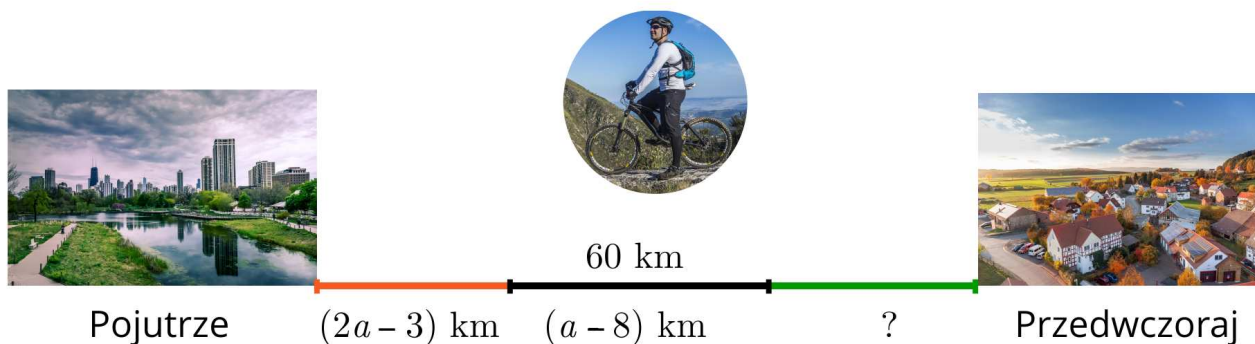
Redukujemy wyrazy podobne.

$$W - U = 4a - c$$

Przykład 7

Krystian wybrał się rowerem z miejscowości Pojutrze do miejscowości Przedwczoraj, oddalonych o 60 km. Pierwszego dnia przejechał $(2a - 3)$ km, drugiego dnia $(a - 8)$ km, a pozostałą część drogi przebył trzeciego dnia.

Obliczymy, ile kilometrów przejechał Krystian trzeciego dnia.



Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Pierwszego i drugiego dnia Krystian przejechał łącznie $[(2a - 3) + (a - 8)]$ km.

Zatem do przejechania zostało mu

$\{60 - [(2a - 3) + (a - 8)]\}$ km.

Zapiszemy otrzymane wyrażenie w najprostszej postaci. Najpierw wykonujemy działania w nawiasie kwadratowym.

$$60 - [(2a - 3) + (a - 8)] = 60 - (2a - 3 + a - 8) = 60 - (3a - 11)$$

Przed nawiasem stoi znak minus – opuszczając nawias, zmieniamy znaki w nawiasie na przeciwne.

$$60 - (3a - 11) = 60 - 3a + 11 = 71 - 3a$$

Odpowiedź:

Krystian trzeciego dnia przejechał $(71 - 3a)$ km.

Notatki

Miejsce na Twoje notatki

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Sprawdź swoje umiejętności dodawania i odejmowania wyrażeń algebraicznych. Zagraj w grę i postaraj się wydostać z pułapki. Pamiętaj, aby przed zapisaniem wyniku obliczeń zredukować wyrazy podobne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PDmmuq6Fy>

Polecenie 2

Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci.

$$W = -[-(2x + 4y) - (y - 5x)]$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 3

Zapisz wyrażenie w najprostszej postaci i oblicz wartość wyrażenia dla $x = \frac{1}{3}$ i $y = 0,25$.

$$W = -(x - y) - (-2x - y) + 2(y - 2x)$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 4

Tadek ma x lat. Mama Tadka jest dwa razy starsza, a tato jest o 4 lata starszy od mamy. Ile lat będą mieli łącznie za dwa lata?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Tadeusz zapisuje kolejne liczby naturalne, począwszy od liczby $2n + 3$, gdzie n to pewna liczba naturalna dodatnia.

Czwarta zapisana przez niego liczba to

☐ $2n + 6$

☐ 4

☐ $4n + 7$

☐ $2n + 4$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości x . Wysokość prostopadłościanu jest o 1 dłuższa od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest równa

☐ $12x + 1$

☐ $12x$

☐ $12x + 4$

☐ $8x + 1$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

W trapezie równoramiennym ramię jest równe krótszej podstawie. Dłuższa podstawa ma długość $2a + 8b$, a krótsza podstawa ma długość $3b - 2a$, gdzie a, b to pewne liczby naturalne dodatnie.

Wskaż każde zdanie prawdziwe.

☐ Suma długości ramion trapezu jest równa $6b - 4a$.

☐ Obwód trapezu jest równy $11b$.

☐ Dłuższa podstawa trapezu jest o $4a + 5b$ dłuższa od krótszej podstawy.

☐ Suma długości podstaw trapezu jest równa $11b$.

☐ Ramię trapezu jest krótsze od dłuższej podstawy o $5b$.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4

Dane są wyrażenia $A = 3x - y + 6$ i $B = -x + y - 4$.

Połącz każde z wyrażeń z odpowiadającym mu wyrażeniem otrzymanym po wykonaniu wskazanych działań i redukcji wyrazów podobnych.

$$-(-A - B) - B$$

$$0$$

$$A + B$$

$$3x - y + 6$$

$$(A - B) + (B - A)$$

$$2x + 2$$

$$A - B$$

$$4x - 2y + 10$$

$$B - A$$

$$-4x + 2y - 10$$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Uzupełnij luki, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

$$(2ab^2 - a) + 1 + \boxed{} = 1$$

$$(a^2 - b^2) - (a^2 + b^2) - \boxed{} = 0$$

$$-(a^2b - ab) + (a^2b - ab) + \boxed{} = 1$$

$$(ab + ab^2) + (-ab - ab^2) + ab + \boxed{} = 0$$

$(-2b^2)$

1

$-ab$

$a - 2ab^2$

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Adam miał c cukierków ($c > 10$), a Basia miała o cztery więcej. Adam trzy cukierki dał Basi, dwa zjadł. Basia dała Grażynie pięć cukierków i sześć zjadła.

Zaznacz, które stwierdzenie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Basia ma teraz $(c - 4)$ cukierki.	☐	☐
Adam ma teraz co najmniej sześć cukierków.	☐	☐
Adam ma teraz mniej cukierków niż Basia.	☐	☐
Basia i Adam mają teraz razem $2c - 12$ cukierków.	☐	☐

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Ewa jest o 2 lata młodsza od Jurka i 4 razy starsza od Pawła, który ma x lat.

- Zapisz wyrażenia, które opisuje ile lat mieli razem Ewa, Jurek i Paweł 3 lata temu.
- Zapisz wyrażenie, które opisuje, ile lat będą mieli razem Ewa, Jurek i Paweł za 3 lata.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Dorota kupiła a kg jabłek w cenie 1, 5 zł za kilogram, b kg gruszek w cenie 6 zł za kilogram i 2 kilogramy śliwek w cenie 4 zł za kilogram. Dała kasjerce banknot stułotowy. Ile złotych reszty otrzymała?

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słownik

suma algebraiczna

sumą algebraiczną nazywamy sumę jednomianów.

jednomian

wyrażenie będące iloczynem liczb i liter (może być też sama liczba lub sama litera).

Bibliografia

Gonick L., (2016), *Algebra w obrazkach*, Warszawa: Prószyński i S-ka.