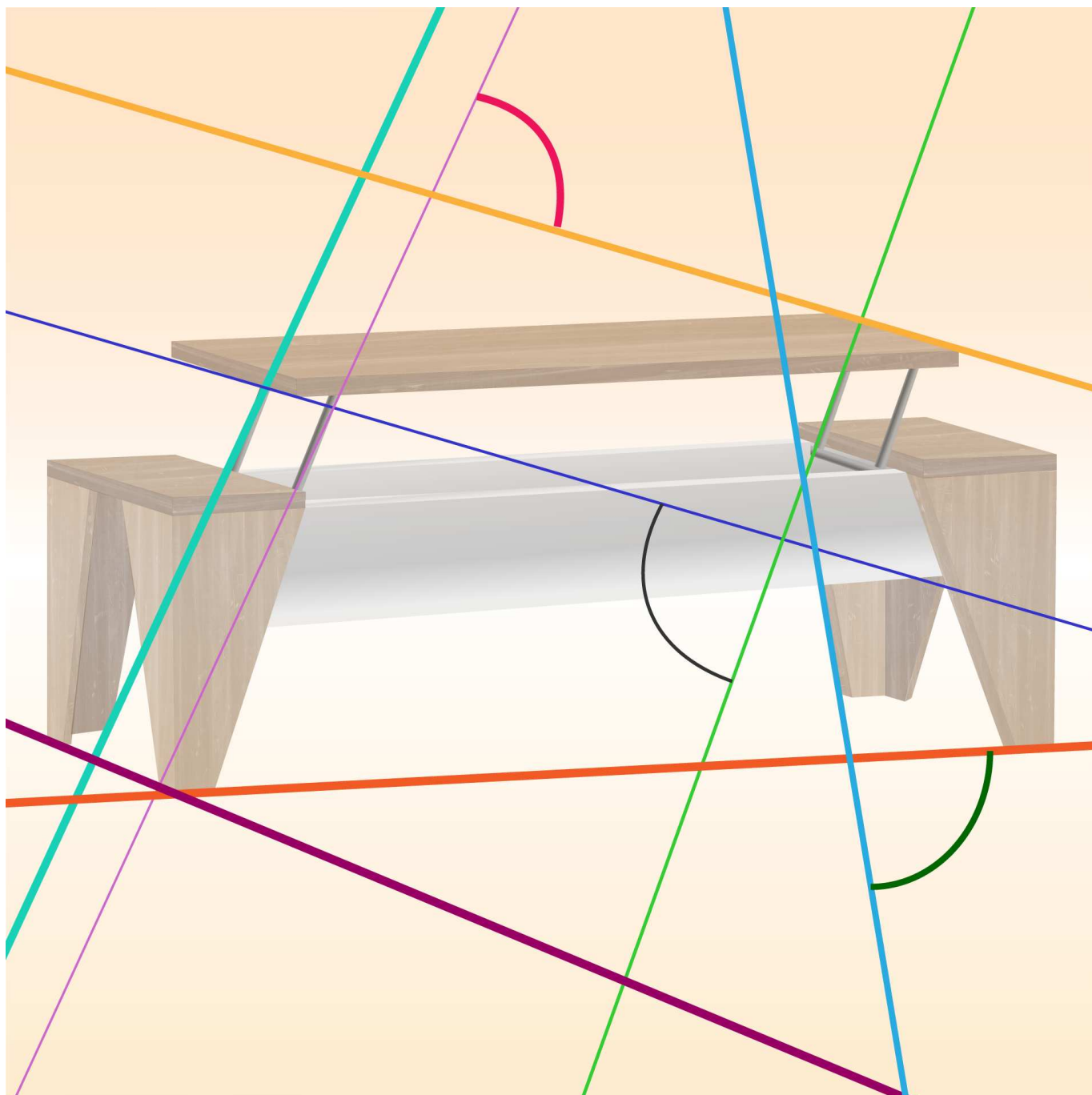




Jak działa pantograficzny mechanizm podnoszenia blatu stołu?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Jak działa pantograficzny mechanizm podnoszenia blatu stołu?

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Niektóre stoły wyposażone są w pantograficzny mechanizm podnoszenia blatu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Mechanizm ten gwarantuje, że płaszczyzna blatu w pozycji podniesionej jest równoległa do płaszczyzny blatu w pozycji opuszczonej. Dlaczego tak się dzieje? Czy jest jakieś matematyczne wyjaśnienie działania tego mechanizmu? Okazuje się, że opisaną wyżej sytuację można matematycznie zilustrować za pomocą dwóch prostych przeciętych trzecią prostą. Interesować nas będą kąty, jakie tworzą te proste. Nazwiemy te kąty i podamy ich najważniejsze własności.

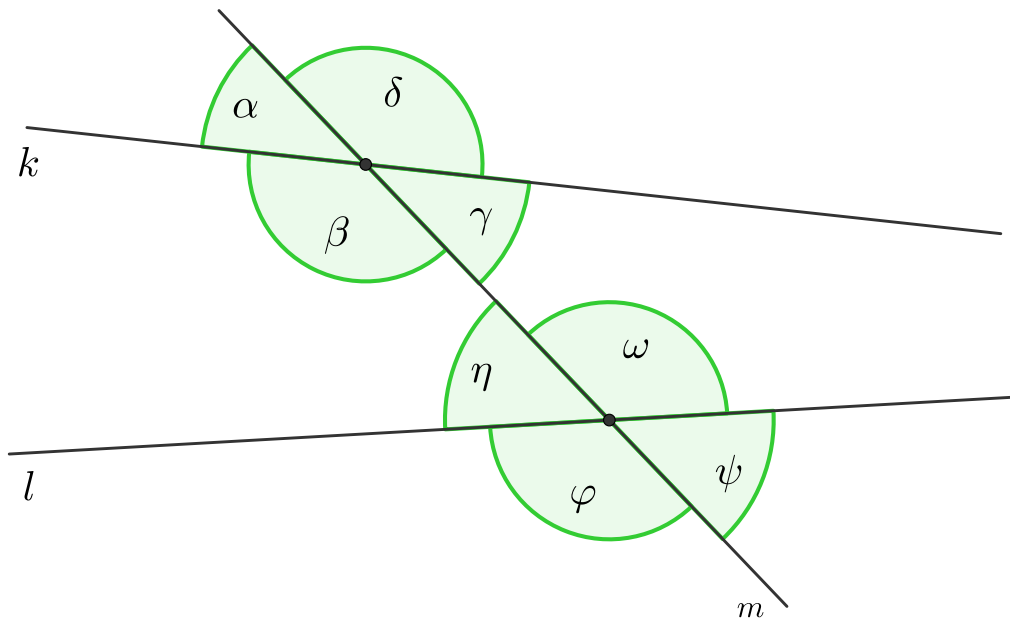
Twoje cele

- Rozpoznasz kąty naprzemianległe, kąty odpowiadające oraz kąty jednostronne.
- Określisz, kiedy kąty naprzemianległe są równe oraz kiedy kąty odpowiadające są równe.
- Wykorzystasz równość kątów naprzemianległych (lub równość kątów odpowiadających) do badania równoległości prostych.
- Wykorzystasz informacje o poznanych kątach do rozwiązywania problemów geometrycznych.

Przeczytaj

Dwie proste przecięte trzecią prostą

Na rysunku przedstawione zostały proste k i l przecięte prostą m , którą nazywamy **sieczną** prostych k i l . Powstało w ten sposób osiem kątów: α , β , γ , δ , η , φ , ψ , ω . Symbole użyte do oznaczenia tych kątów to wybrane małe litery alfabetu greckiego: α - alfa, β - beta, γ - gamma, δ - delta, η - eta, φ - fi, ψ - psi, ω - omega.



Dwie proste przecięte trzecią prostą.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Definicja: kąty naprzemianległe

Każdą z par kątów: α i ψ , β i ω , γ i η , δ i φ nazywamy **kątami naprzemianległymi**, przy czym pary α i ψ oraz δ i φ nazywamy jeszcze dodatkowo **zewnętrzными**, a pary β i ω oraz γ i η - **wewnętrzными**.

Definicja: kąty odpowiadające

Każdą z par kątów: α i η , β i φ , γ i ψ , δ i ω nazywamy **kątami odpowiadającymi**.

Każdą z par kątów: α i φ , β i η , γ i ω , δ i ψ nazywamy **kątami jednostronnymi**, przy czym pary α i φ oraz β i η nazywamy jeszcze dodatkowo **zewnętrzными**, a pary β i η oraz γ i ω - **wewnętrzными**.

Twierdzenia o kątach naprzemianległych i kątach odpowiadających

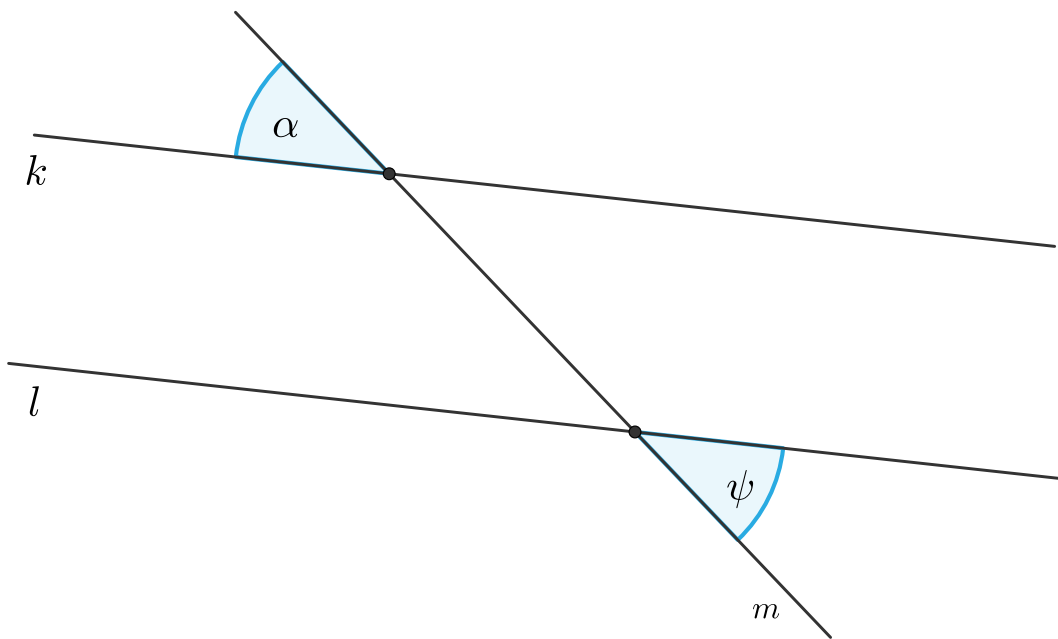
Zależność między położeniem prostych k i l oraz **kątami naprzemianległymi** opisują dwa poniższe twierdzenia.

Twierdzenie: o kątach naprzemianległych

Jeżeli proste k i l są równoległe, to kąty naprzemianległe są równe.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia o kątach naprzemianległych

Jeżeli kąty naprzemianległe są równe, to proste k i l są równoległe.



Ilustracja twierdzenia o kątach naprzemianległych.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Te dwa twierdzenia często zapisujemy w postaci równoważności:

Ważne!

Proste k i l są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty naprzemianległe są równe.

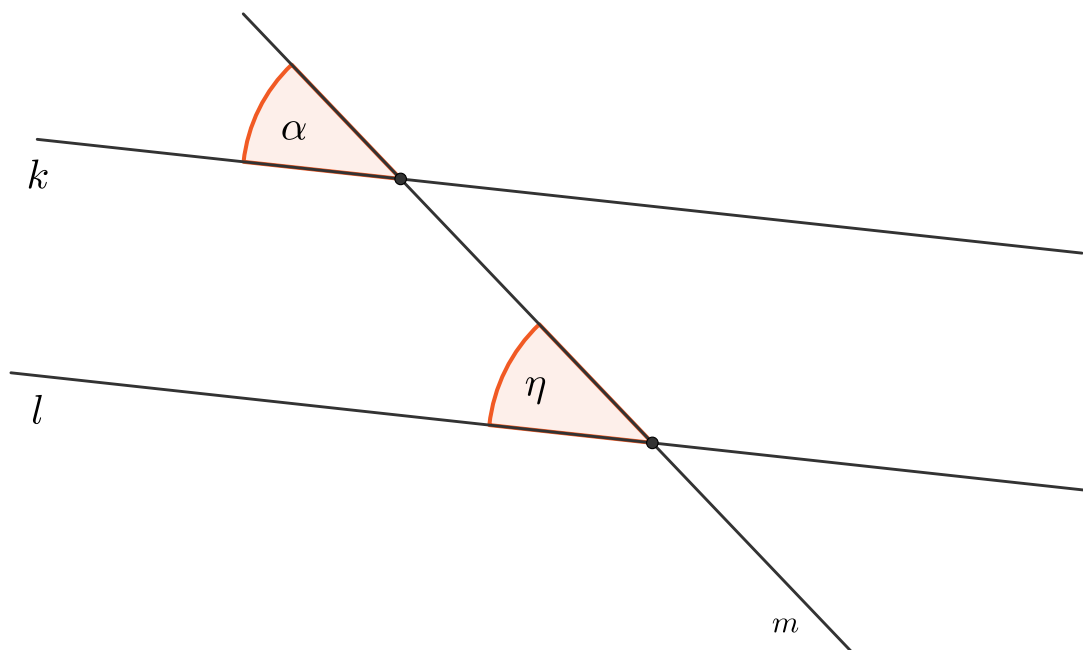
Podobne dwa twierdzenia dotyczą **kątów odpowiadających**.

Twierdzenie: o kątach odpowiadających

Jeżeli proste k i l są równoległe, to kąty odpowiadające są równe.

Twierdzenie: odwrotne do twierdzenia o kątach odpowiadających

Jeżeli kąty odpowiadające są równe, to proste k i l są równoległe.



Ilustracja twierdzenia o kątach odpowiadających.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Te dwa twierdzenia też możemy zapisać w postaci równoważności:

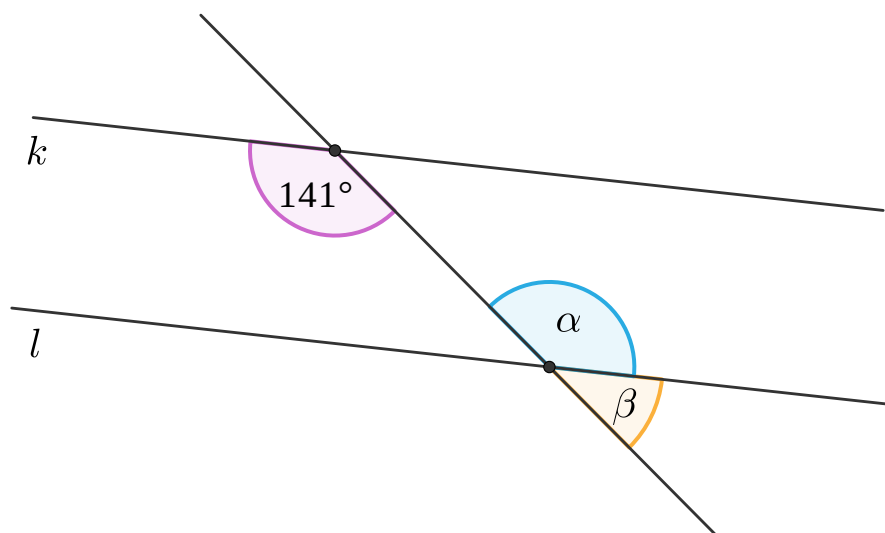
Ważne!

Proste k i l są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty odpowiadające są równe.

Prześledźmy trzy przykłady zastosowania omówionych definicji i twierdzeń. W jednym z przykładów podamy matematyczne uzasadnienie poprawności działania pantograficznego mechanizmu podnoszenia blatu stołu.

Przykład 1

Proste k i l są równoległe. Oblicz miary zaznaczonych kątów α i β .



Dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

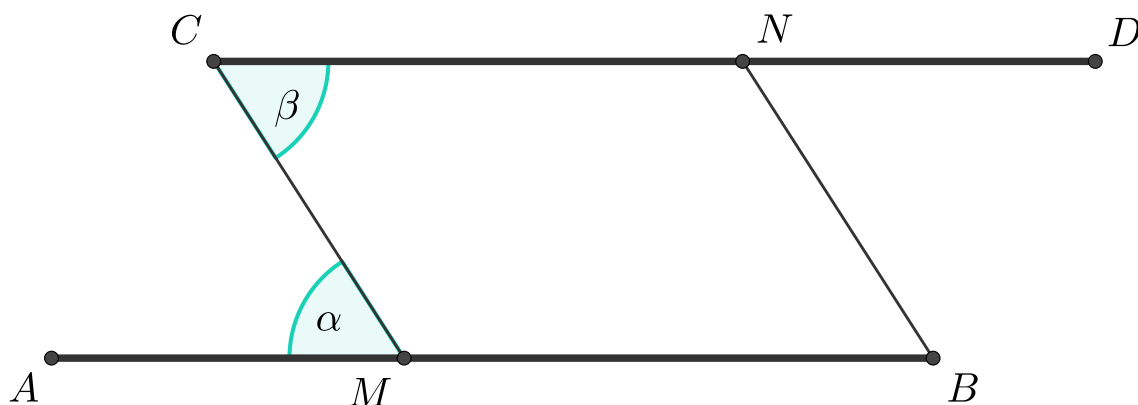
Zaznaczony kąt 141° oraz kąt α to kąty naprzemianległe, a ponieważ proste k i l są równoległe, to $\alpha = 141^\circ$.

Z kolei kąty α i β są przyległe, więc $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Zatem $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 141^\circ = 39^\circ$.

Przykład 2

Zastosujemy poznane twierdzenia do odpowiedzi na pytanie dlaczego pantograficzny mechanizm podnoszenia blatu gwarantuje nam, że płaszczyzna blatu stołu w pozycji podniesionej jest zawsze równoległa do płaszczyzny tego blatu w pozycji opuszczonej. Sporządzmy w tym celu rysunek poglądowy.



Schemat działania pantograficznego mechanizmu podnoszenia blatu stołu.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wyobraźmy sobie, że odcinek AB to blat w pozycji opuszczonej, odcinek CD – blat w pozycji podniesionej, odcinki MC i BN to jednakowej długości elementy mechanizmu. Odcinki AB i CD będą równoległe tylko wtedy, gdy kąty α i β będą równe.

Jak więc konstruktor mechanizmu zagwarantował sobie równość tych kątów?

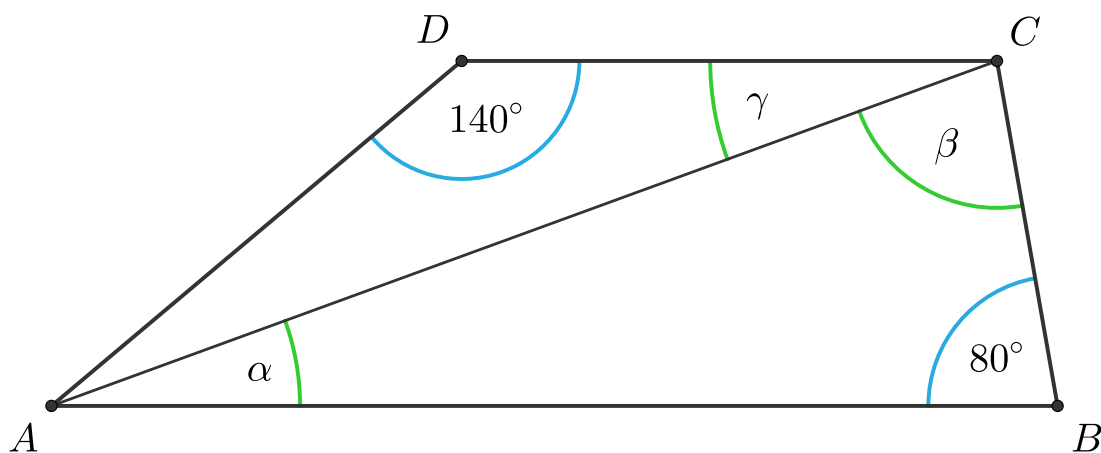
Poza tym, że odcinki MC i BN są równej długości to jeszcze punkty M i N mocowania elementów mechanizmu są tak dobrane, żeby zachodziła równość $|MB| = |CN|$.

To oznacza, że czworokąt $MBNC$ ma dwie pary przeciwległych boków równej długości. Jest to więc równoległobok, co oznacza, że istotnie $AB \parallel CD$.

Przykład 3

Przekątna AC czworokąta $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty równoramienne, przy czym w trójkącie ABC jest ona ramieniem, a w trójkącie ACD podstawą. Rozstrzygnij, czy jeśli kąty przy wierzchołkach B i D tego czworokąta są równe odpowiednio 80° i 140° , to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt $ABCD$.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny i BC jest jego podstawą, więc kąty ABC i ACB przy tej podstawie są równe, więc $\beta = 80^\circ$.

Kąt przy wierzchołku A w tym trójkącie jest więc równy $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$.

Trójkąt ACD też jest równoramienny, a jego podstawą jest odcinek AC . Zatem kąty przy tej podstawie są równe.

Trzeci kąt przy wierzchołku D jest równy 140° , więc $140^\circ + 2 \cdot \gamma = 180^\circ$. Stąd $\gamma = 20^\circ$.

Ponieważ kąty α i γ są równe, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kątach naprzemianległych wynika, że proste AB i CD są równoległe. To oznacza, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD .

Słownik

kąty naprzemianległe

pary kątów utworzonych przez przecięcie dwóch prostych k i l trzecią prostą m , leżące po przeciwnych stronach prostej m

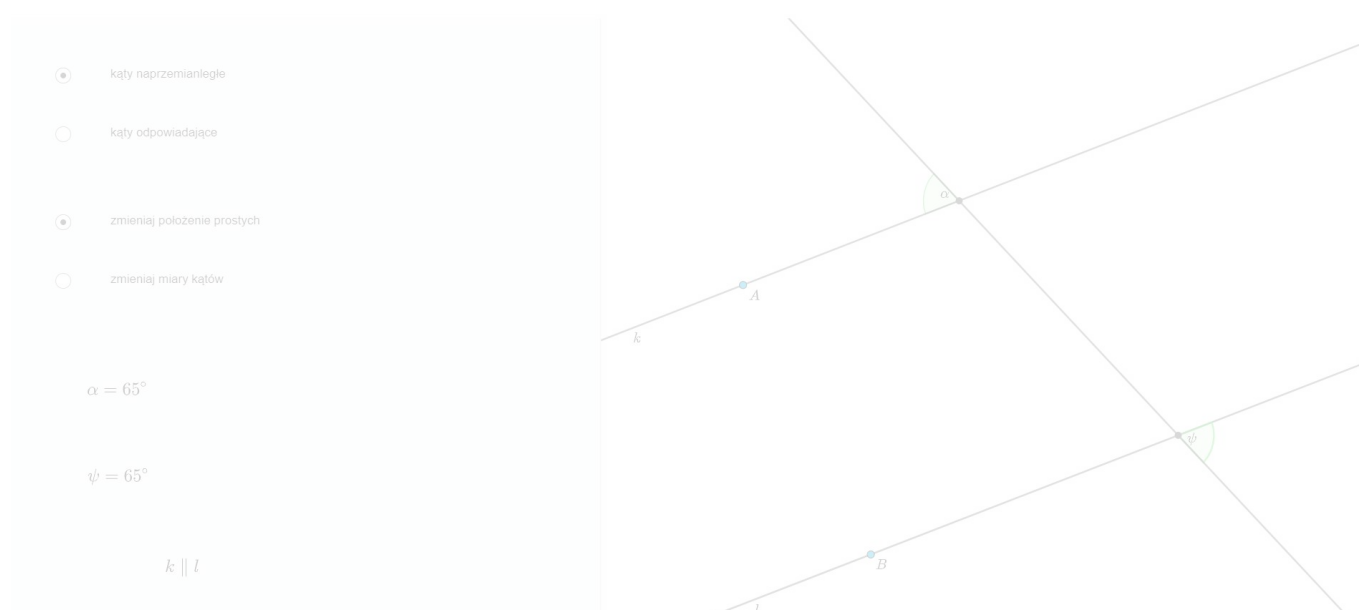
kąty odpowiadające

pary kątów utworzonych przez przecięcie dwóch prostych k i l trzecią prostą m , leżące po tej samej stronie prostej m

Aplet

Polecenie 1

Otwórz aplet geogebry. Wybierz opcje: **kąty naprzemianległe**, a następnie **zmieniaj położenie prostych**. Poruszając punktami A i B obserwuj, jak zmieniają miary wybranych kątów. Jednocześnie obserwuj, jaka jest relacja między prostymi k i l . Następnie, przy wybranej opcji **kąty naprzemianległe**, wybierz **zmieniaj miary kątów**. Przeprowadź te same obserwacje, co poprzednio. Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci twierdzeń.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D16QfskvY>

Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią prostą

Polecenie 2

Otwórz aplet geogebry. Wybierz opcje: **kąty odpowiadające**, a następnie **zmieniaj położenie prostych**. Poruszając punktami A i B obserwuj, jak zmieniają miary wybranych kątów. Jednocześnie obserwuj, jaka jest relacja między prostymi k i l . Następnie, przy wybranej opcji **kąty odpowiadające**, wybierz **zmieniaj miary kątów**. Przeprowadź te same obserwacje, co poprzednio. Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci twierdzeń.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



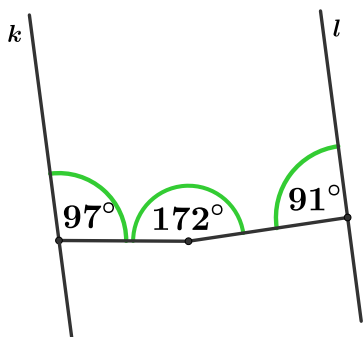
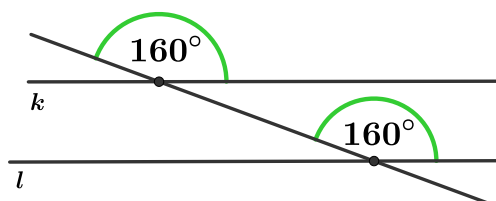
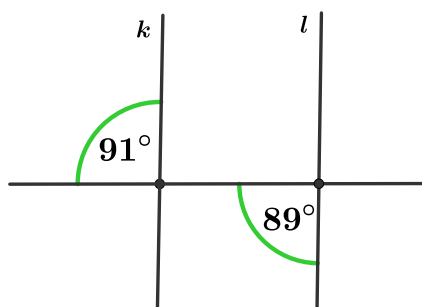
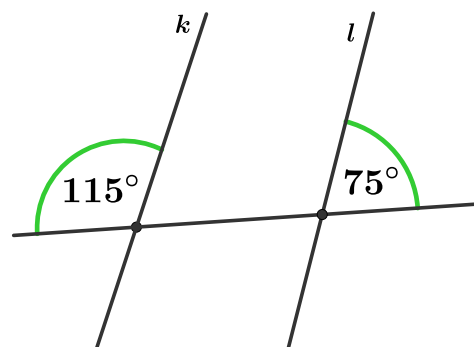
Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią prostą.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 2



Wskaż te rysunki, na których proste k i l są równoległe.

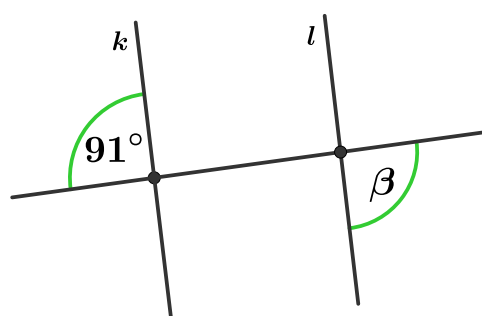
☐☐☐☐

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

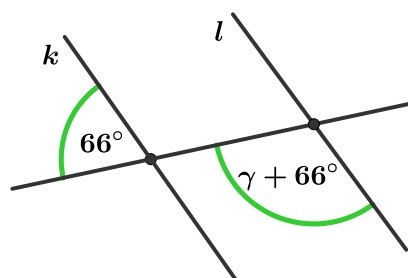
Ćwiczenie 3



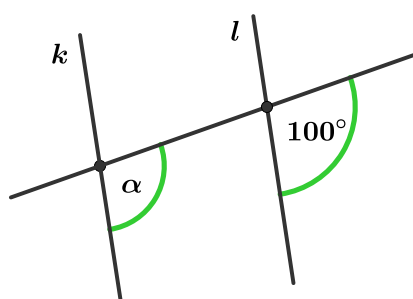
Na wszystkich rysunkach w tym ćwiczeniu proste k i l są równoległe. Zaznacz wszystkie poprawne miary podanych kątów.



$$\beta = 89^\circ$$

☐

$$\gamma = 48^\circ$$

☐

$$\alpha = 100^\circ$$

☐

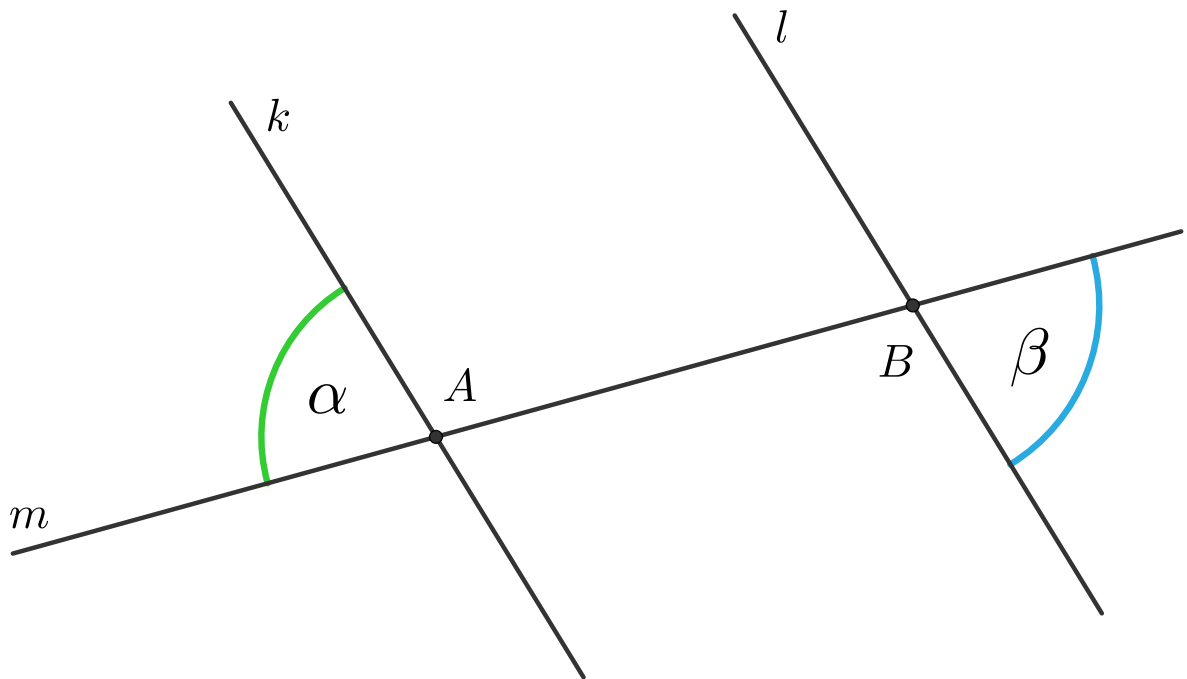
Kąty utworzone przez dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 4



Prosta m przecina proste k i l w punktach A i B , a proste k i l przecinają się w punkcie niewidocznym na rysunku, leżącym po tej samej stronie prostej m , po której leży zaznaczony kąt α .



Wynika stąd, że

☐ $\alpha < \beta$

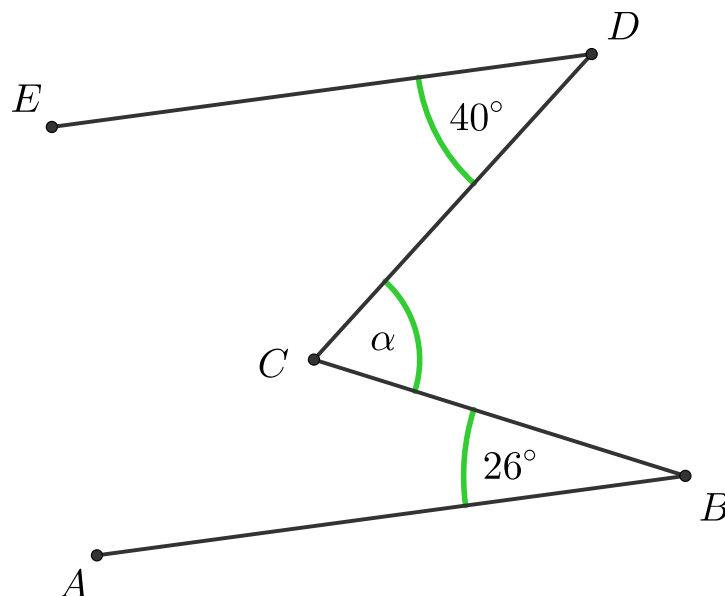
☐ $\alpha = \beta$

☐ $\alpha > \beta$

Ćwiczenie 5



Pierwszy i ostatni odcinek łamanej otwartej $ABCDE$ są równoległe



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wówczas kąt wypukły α pomiędzy odcinkami BC i CD tej łamanej jest równy

☐ $\alpha = 66^\circ$

☐ $\alpha = 33^\circ$

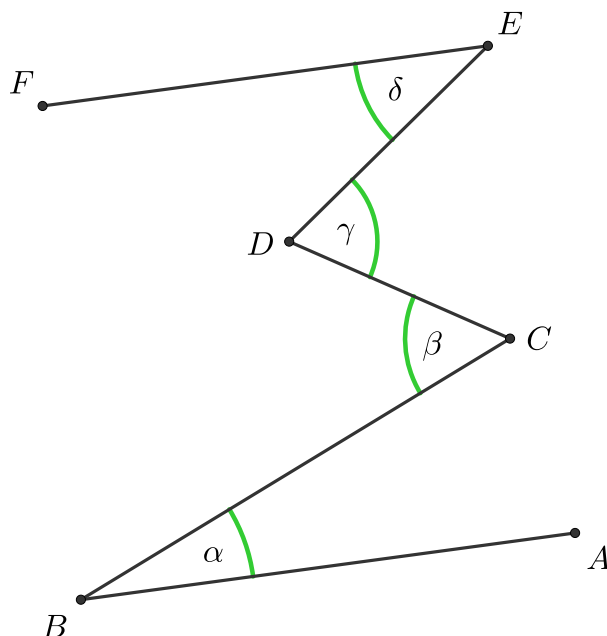
☐ $\alpha = 54^\circ$

☐ $\alpha = 60^\circ$

Ćwiczenie 6



Na rysunku jest przedstawiona łamana otwarta $ABCDEF$, w której odcinki AB i EF są równoległe



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wynika stąd, że prawdziwa jest równość

☐ $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

☐ $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

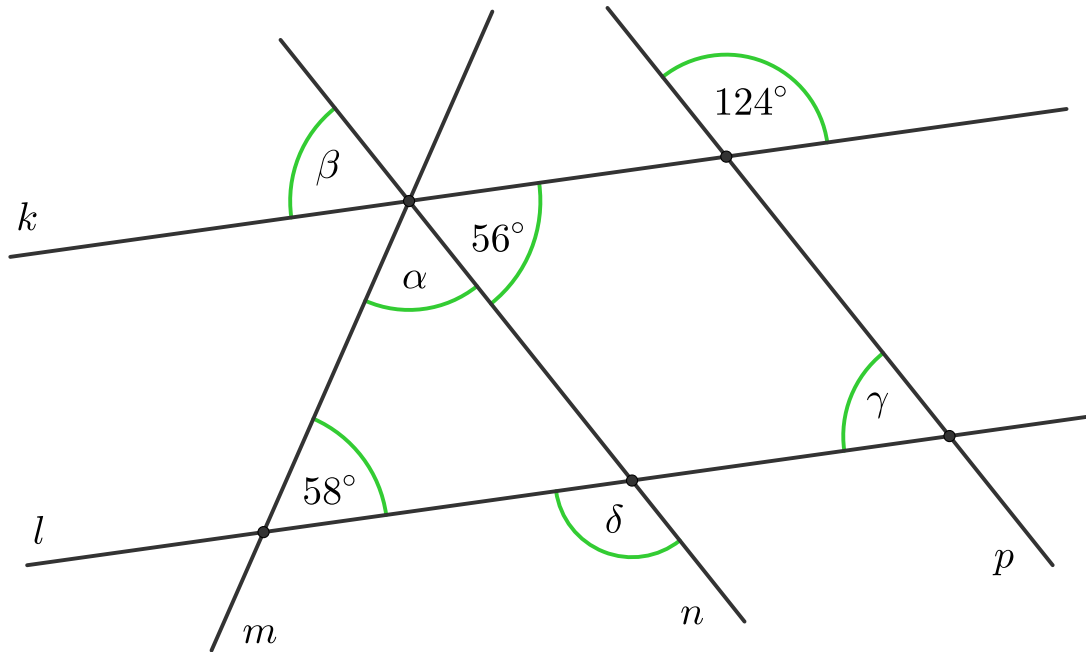
☐ $\alpha + \gamma = \beta + \delta$

☐ $\alpha + \delta = \beta + \gamma$

Ćwiczenie 7



Na rysunku są przedstawione proste: k , l , m , n , p oraz zaznaczone są niektóre kąty utworzone przez te proste. Proste k i l są równoległe.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Z poniższych zdań wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ $\alpha > 60^\circ$

☐ Proste m i p przecinają się pod kątem 66° .☐ Proste n i p są równoległe.

☐ $\alpha = \gamma$

☐ $\alpha + \beta = 124^\circ$

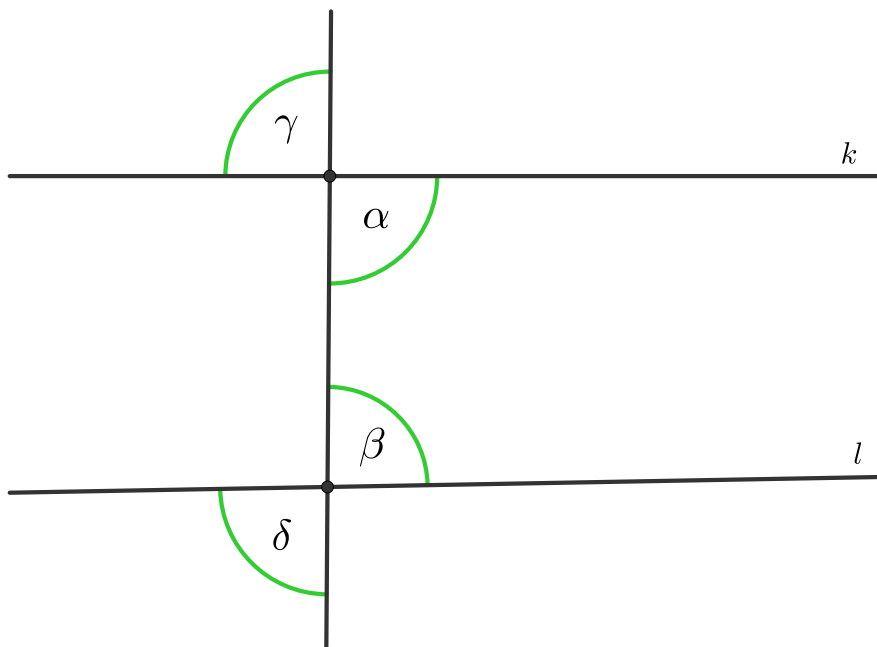
☐ $\alpha < \beta$

☐ Trójkąt, którego boki zawarte są w prostych l , m i n jest równoramienny.

Ćwiczenie 8



Na rysunku są przedstawione proste k i l przecięte trzecią prostą.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wskaż wszystkie zdania fałszywe.

- ☐ Dla dowolnych kątów α , β , γ i δ takich, że $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, proste k i l są równoległe.
- ☐ Dla dowolnych kątów α i β takich, że $\alpha = \beta$, proste k i l przecinają się.
- ☐ Dla pewnych kątów α , β , γ i δ takich, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$, proste k i l przecinają się.
- ☐ Dla pewnych kątów γ i β takich, że $\gamma = \beta$, proste k i l są równoległe.

Ćwiczenie 9



Sformułuj i uzasadnij twierdzenie o kątach jednostronnych.

Ćwiczenie 10



Wykorzystując poznane twierdzenie o kątach naprzemianległych, udowodnij twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta.

Ćwiczenie 11



W trapezie $ABCD$ długość ramienia BC jest równa sumie długości podstaw AB i CD . Udowodnij, że wtedy na ramieniu BC istnieje taki punkt E , że kąt AED jest prosty. W dowodzie wykorzystaj twierdzenie o kątach naprzemianległych.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią prostą

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum

Podstawa programowa: Zakres rozszerzony

VIII. Planimetria

4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa kąty naprzemianległe zewnętrzne, naprzemianległe wewnętrzne, odpowiadające, jednostronne zewnętrzne i jednostronne wewnętrzne, także w sytuacjach praktycznych,
- stosuje twierdzenie o kątach naprzemianległych oraz twierdzenie o kątach odpowiadających do obliczania miar kątów oraz ustalania zależności między katami,
- stosuje twierdzenia odwrotne do twierdzenia o kątach naprzemianległych oraz twierdzenia o kątach odpowiadających do badania relacji równoległości prostych lub odcinków,
- odkrywa związki między kątami jednostronnymi i formułuje je w postaci twierdzeń.

Strategie nauczania

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania

- dyskusja,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej,
- lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym..

Przebieg zajęć

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie sytuacji z życia, które dają się zilustrować za pomocą kątów utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią (proste ulice na planie miasta, proste wyznaczone przez przecięcie wybranej ściany w pokoju z sufitem, podłogą i ewentualnie innymi ścianami).
3. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia kąta, rodzajów kątów (ostre, prosty, rozwarte, wypukłe, wklęsłe), znanych im własności kątów (twierdzenie o sumie kątów trójkąta itp.).
4. Wspólnie z uczniami nauczyciel ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wprowadza pojęcie kątów naprzemianległych, kątów odpowiadających i kątów jednostronnych. Zwraca uwagę, że w różnych publikacjach mogą się spotkać z różnymi definicjami tych kątów: często mówiąc o kątach naprzemianległych lub odpowiadających ma się na myśli kąty utworzone przez dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą. Nauczyciel uzasadnia dlaczego taka definicja jest niewygodna. Zwraca też uwagę, że podział kątów naprzemianległych i jednostronnych na zewnętrzne i wewnętrzne nie jest już tak istotny.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie znanych im liter alfabetu greckiego, jakich najczęściej używamy do oznaczania kątów, podaje im te, których nie pamiętają lub się z nimi nie spotkali, a które będą wykorzystywane podczas lekcji.
3. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują aplet geogebry Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią.

4. Nauczyciel steruje dyskusją, jaką uczniowie prowadzą w trakcie wykonywania ćwiczeń z użyciem apletu w takim kierunku, aby uczniowie samodzielnie odkryli twierdzenia o kątach naprzemianległych, o kątach odpowiadających i twierdzenia do nich odwrotne.
5. Uczniowie wykonując wskazane ćwiczenia interaktywne, przy czym nauczyciel prosi ich o to, żeby próbowali wykorzystywać głównie poznane twierdzenia i, o ile tylko potrafią, nie wykorzystywali innych znanych im twierdzeń o kątach, np. twierdzenia o sumie kątów trójkąta.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.
2. Nauczyciel informuje uczniów, że poznane twierdzenia wynikają wprost z V aksjomatu Euklidesa i często twierdzeń tych używa się jak aksjomatów geometrii. Nawiązuje też do ćwiczenia 10.

Praca domowa

Nauczyciel poleca uczniom wykonać pozostałe ćwiczenia interaktywne (te, które nie zostały wykonane podczas lekcji) oraz ćwiczenie 10 i 11.

Materiały pomocnicze

[Twierdzenie o sumie kątów trójkąta](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Aplet geogebry można użyć do wprowadzenia twierdzenia o sumie dwóch sąsiednich kątów równoległoboku oraz twierdzenia o sumie kątów przy ramieniu w trapezie. Można to jednak zrobić dopiero po omówieniu własności kątów przyległych i kątów wierzchołkowych.