



Rozpoznawanie funkcji wewnętrznych i zewnętrznych na podstawie wzorów funkcji złożonych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozpoznawanie funkcji wewnętrznych i zewnętrznych na podstawie wzorów funkcji złożonych

Źródło: Guillaume de Germain, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Złożenie funkcji f i g nazywamy ich superpozycją. W fizyce mówimy np. o superpozycji fal, gdy w danym ośrodku rozchodzi się więcej niż jedna fala lub o superpozycji pól pochodzących z różnych źródeł.

W tej lekcji będziemy rozpoznawać funkcje wewnętrzne oraz zewnętrzne funkcji złożonych.

Twoje cele

- Rozpoznasz funkcję wewnętrzną i zewnętrzną mając dany wzór funkcji złożonej.
- Przedstawisz daną funkcję jako złożenie dwóch innych funkcji.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Jeżeli funkcja g odwzorowuje zbiór X w zbiór Y , a funkcja f odwzorowuje zbiór Y w zbiór Z , to funkcję h określoną wzorem $h(x) = f(g(x))$ dla $x \in X$ nazywamy złożeniem funkcji g i f i oznaczamy $f \circ g$.

Funkcję g nazywamy funkcją wewnętrzną funkcji $f \circ g$ natomiast funkcję f nazywamy funkcją zewnętrzną funkcji $f \circ g$.

Jeżeli istnieje **złożenie funkcji** f z funkcją g to jest ono wyznaczone jednoznacznie.

Przykład 1

Przedstawmy złożenie funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x + 4$ jako $h(x) = f(g(x))$.

Funkcja wewnętrzna to $g(x) = 2x + 4$, gdzie $D_g = \mathbb{R}$ i $g(D_g) = \mathbb{R}$.

Funkcja zewnętrzna to $f(x) = x^2$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$ i $g(D_g) \subset D_f$.

Istnieje więc złożenie $h(x) = f(g(x))$, gdzie $h(x) = f(g(x)) = f(2x + 4) = (2x + 4)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Gdy daną funkcję h traktujemy jako złożenie dwóch funkcji f i g , to funkcje f i g nie są wyznaczone jednoznacznie przez funkcję h .

Przykład 2

Funkcję h określoną wzorem $h(x) = (2x + 4)^2$ przedstaw jako złożenie dwóch funkcji.

Rozwiązanie:

Funkcję $h(x) = (2x + 4)^2$ możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x + 4)^2 = (2x)^2 + 8(2x) + 16 = \\ &= 4x^2 + 16x + 16 = 4(x^2 + 4x + 4) = 4(x + 2)^2 \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższy zapis, otrzymujemy:

$$\text{a) } h(x) = (2x + 4)^2, x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(2x + 4) = (2x + 4)^2.$$

Funkcja zewnętrzna to $f_1(x) = x^2$, a funkcja wewnętrzna $g_1(x) = 2x + 4$.

$$\text{b) } h(x) = (2x)^2 + 8(2x) + 16, x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = f_2(g_2(x)) = f_2(2x) = (2x)^2 + 8(2x) + 16.$$

Funkcja zewnętrzna to $f_2(x) = x^2 + 8x + 16$, a funkcja wewnętrzna: $g_2(x) = 2x$.

$$c) h(x) = 4(x + 2)^2, x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = f_3(g_3(x)) = f_3(x + 2) = 4(x + 2)^2.$$

Funkcja zewnętrzna to $f_3(x) = 4x^2$, a funkcja wewnętrzna $g_3(x) = x + 2$.

Nie są to wszystkie możliwe przedstawienia funkcji f w postaci złożenia dwóch funkcji. Takich przedstawień jest nieskończenie wiele.

Przykład 3

Funkcję h określoną wzorem $h(x) = 2^{x^2-5x-4}$ przedstaw w postaci złożenia dwóch funkcji.

Rozwiązanie:

$$h(x) = 2^{x^2-5x-4}.$$

$$D_h = \mathbb{R}.$$

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5x - 4) = 2^{x^2-5x-4}.$$

Funkcja zewnętrzna to $f(x) = 2^x$, a funkcja wewnętrzna $g(x) = x^2 - 5x - 4$.

Przykład 4

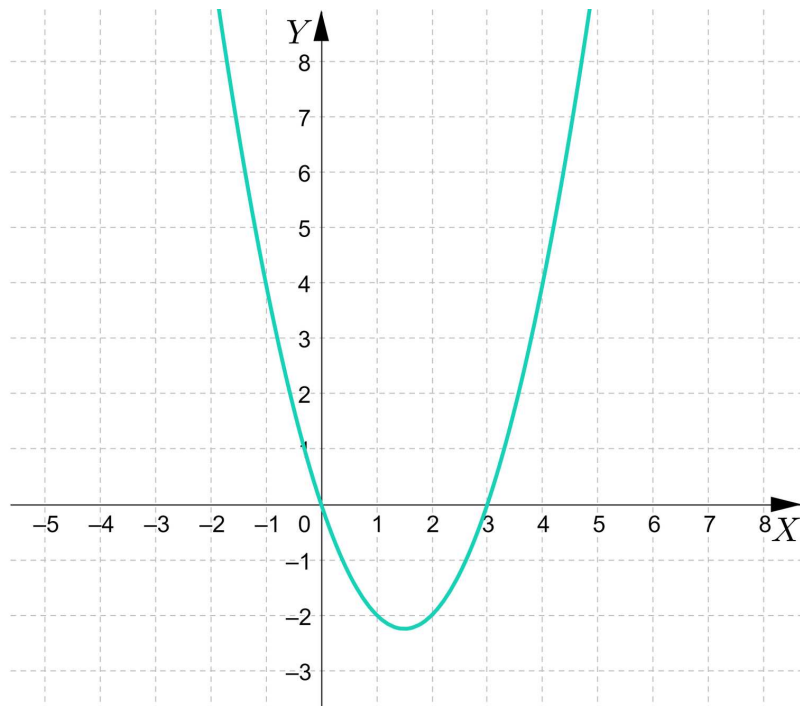
Funkcję h określoną wzorem $h(x) = \log_2 \sqrt{x^2 - 3x}$ przedstaw na dwa sposoby w postaci złożenia dwóch funkcji.

Rozwiązanie:

Określmy dziedzinę funkcji $h(x) = \log_2 \sqrt{x^2 - 3x}$.

Dziedziną funkcji logarytmicznej $y = \log_a x$ jest zbiór $\mathbb{R}_+$ więc:

$$\sqrt{x^2 - 3x} > 0, \text{ skąd } x^2 - 3x > 0, \text{ a następnie } x(x - 3) > 0.$$



Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x - 3) > 0$ jest:

$x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, a zatem

$$D_h = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty).$$

$$h(x) = f_1(g_1(x)) = f(\sqrt{x^2 - 3x}) = \log_2 \sqrt{x^2 - 3x}, x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty).$$

Funkcja zewnętrzna to zatem $f_1(x) = \log_2 x$, a funkcja wewnętrzna $g_1(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

$$h(x) = f_2(g_2(x)) = f(x^2 - 3x) = \log_2 \sqrt{x^2 - 3x}, x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Funkcja zewnętrzna to $f_1(x) = \log_2 \sqrt{x}$, a funkcja wewnętrzna $g_2(x) = x^2 - 3x$.

Słownik

funkcja złożona

funkcja h określona wzorem $h(x) = f(g(x))$ dla $x \in X$, gdy funkcja g odwzorowuje zbiór X w zbiór Y , a funkcja f odwzorowuje zbiór Y w zbiór Z

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą rozpoznawanie funkcji wewnętrznych i zewnętrznych na podstawie wzoru funkcji złożonych. Rozwiąż zadania i sprawdź odpowiedzi.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2OxytQFy>

Film pokazuje przykładowe zadania polegające na rozpoznawaniu funkcji wewnętrznej i zewnętrznej na podstawie wzoru funkcji złożonych.

Polecenie 2

Funkcję h określoną wzorem $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ przedstaw w postaci złożenia dwóch funkcji.

Polecenie 3

Funkcję h określoną wzorem $h(x) = (9x^2 - 6x + 1)^6$ przedstaw na 2 sposoby w postaci złożenia dwóch funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są funkcje: $f(x) = -2x^2$ oraz $g(x) = 3x - 1$. Wybierz wzór funkcji złożonej $h(x) = f(g(x))$.

☐ $h(x) = -6x^2 - 1$

☐ $h(x) = (2 - 6x)^2$

☐ $h(x) = -2x^2 - 6x + 2$

☐ $h(x) = -2(3x - 1)^2$

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja złożona $h(x) = (8x - 4)^2$. Dobierz wzór funkcji zewnętrznej $f(x)$ do wzoru funkcji wewnętrznej $g(x)$, tak aby $h(x) = f(g(x))$.

$f(x) = x^2$

$g(x) = 8x - 4$

$f(x) = 16x^2 - 32x + 16$

$g(x) = 4x - 2$

$f(x) = 4x^2$

$g(x) = 8x$

$f(x) = x^2 - 8x + 16$

$g(x) = 2x$

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja złożona $h(x) = (2x - 6)^3$. Wybierz wszystkie wzory funkcji $f(x)$ i $g(x)$, dla których $h(x) = f(g(x))$.

☐ $f(x) = 8x - 216$ i $g(x) = x^3$

☐ $f(x) = 2x^3$ i $g(x) = x - 3$

☐ $f(x) = x^3 - 18x^2 + 108x - 216$ i $g(x) = 2x$

☐ $f(x) = x^3$ i $g(x) = 2x - 6$

Ćwiczenie 4



Dana jest funkcja złożona $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6x+9}$. W puste miejsce wstaw odpowiednie liczby całkowite, tak aby $h(x) = f(g(x))$.

1) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $g(x) = x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$ i $g(x) = \boxed{}x + \boxed{}$

3) $f(x) = 3^x$ i $g(x) = \boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}$

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja złożona $h(x) = \sqrt{9x^2 - 4}$ określona dla $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Wybierz wzory funkcji $f(x)$ i $g(x)$, dla których $h(x) = f(g(x))$.

☐ $f(x) = 3\sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 4$

☐ $f(x) = |x|$; $g(x) = 3x - 2$

☐ $f(x) = 3\sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

☐ $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9x - 4$

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja złożona $h(x) = \log_{0,5} \sqrt{x^2 - 8x + 16}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
Funkcja $h(x)$ jest określona dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.	☐	☐
Dla $f(x) = \frac{1}{2} \log_{0,5} x$ i $g(x) = x^2 - 8x + 16$ funkcja h jest złożeniem $h(x) = f(g(x))$.	☐	☐
Dla $f(x) = x - 4$ i $g(x) = \log_{0,5} x $ funkcja h jest złożeniem $h(x) = g(f(x))$.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja złożona $h(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$. Wybierz wzory funkcji $f(x)$ i $g(x)$, dla których $h(x) = f(g(x))$.

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x; g(x) = 3x - 1$

☐ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x; g(x) = 3x - 3$

☐ $f(x) = 3x + 1; g(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

☐ $f(x) = 3^x; g(x) = 5 - 9x$

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja złożona $h(x) = \sqrt{15 + 10x - 5x^2}$. Prawdą jest, że:

☐ dla $f(x) = \sqrt{5x}$ i $g(x) = -x^2 - 2x - 3$ funkcja h jest złożeniem $h(x) = g(f(x))$

☐ dla $f(x) = \sqrt{5x}$ i $g(x) = 3 + 2x - x^2$ funkcja h jest złożeniem $h(x) = f(g(x))$

☐ dla $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 5(x+1)(3-x)$ funkcja h jest złożeniem $h(x) = f(g(x))$

☐ funkcja $h(x)$ jest określona dla wszystkich $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, +\infty)$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: matematyka

Temat: Rozpoznawanie funkcji wewnętrznych i zewnętrznych na podstawie wzorów funkcji złożonych.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcję jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach)
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 2) posługuje się złożeniami funkcji;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- określa wzory funkcji zewnętrznych i wewnętrznych funkcji złożonej,
- rozpoznaje funkcje wewnętrzne i zewnętrzne na podstawie wzorów funkcji złożonych,
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się definicją funkcji złożonej,

- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda plakatu
- rybi szkielet

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie metodą wędrującego plakatu przypominają określenie funkcji.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wraz z uczniami określa kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 4 osobowe, każda grupa otrzymuje przykład wzoru funkcji złożonej. Zadaniem każdej grupy jest zapoznanie się z animacją, rozwiązanie zadań pod animacją.
2. Następnie przedstawia każdej z grup funkcję. W każdej grupie tworzony jest rybi szkielet przedstawiający jak największą ilość sposobów w postaci złożenia funkcji
3. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek,
4. Po 10 minutach reprezentant każdej grupy przedstawia na forum klasy efekt pracy grupy w postaci „rybiego szkieletu” (na górze wzór funkcji złożonej, po lewej stronie funkcja zewnętrzna, po prawej - wewnętrzna),
5. Uczniowie z grup, które znalazły najwięcej sposobów złożenia są oceniani po wspólnym omówieniu przykładów.
6. Następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie trzech ostatnich ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją. Animacje z lekcji można wykorzystać jako rozszerzenie informacji zawartych w infografice z lekcji „Złożenie funkcji”.
- Animacja może zostać wykorzystana jako wprowadzenie na lekcji pokazującej funkcje złożone.