



Prosta przebijająca płaszczyznę

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Hich Saidi, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W tym materiale skupimy się na prostych, które przebijają płaszczyznę. Nazwa tutaj jest adekwatna do zjawiska i podpowiada, o jakim wzajemnym położeniu prostej i płaszczyzny mowa. Omówimy też pojęcia bezpośrednio z tym zagadnieniem związane. Dobrą ilustracją prostej przebijającej płaszczyznę jest szpilka wbita w tablicę korkową lub śledź od namiotu wbity w ziemię. Poniżej znajduje się zdjęcie drutu ozdobnego (nieidealna ilustracja idealnej prostej) wbitego w styropian.



Źródło: Gromar, licencja: CC BY 3.0.

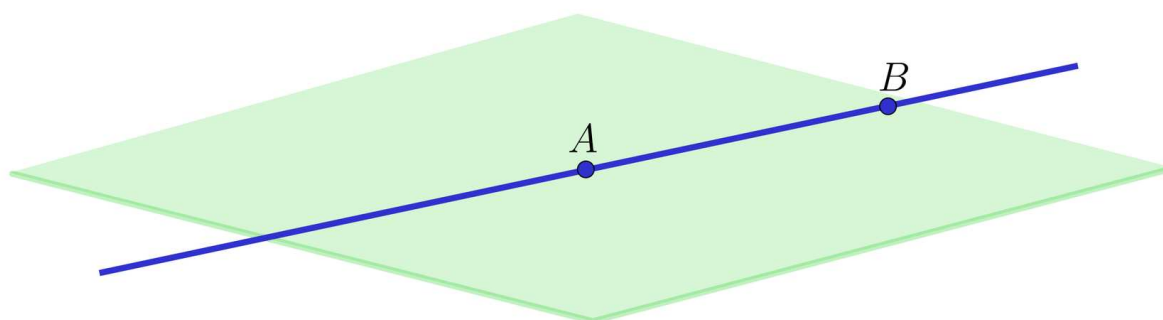
Twoje cele

- Wyznaczysz rzut prostokątny prostej na płaszczyznę.
- Wyznaczysz kąt między prostą a płaszczyzną w przestrzeni.

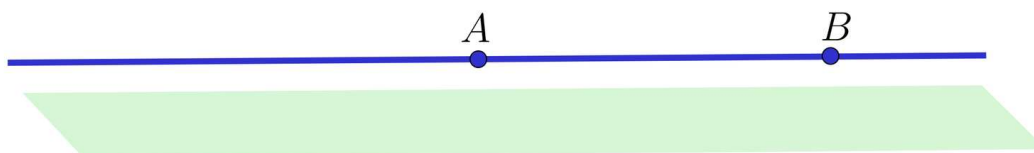
Przeczytaj

Przypomnijmy, że prosta i płaszczyzna w przestrzeni trójwymiarowej mogą być położone na jeden z trzech sposobów:

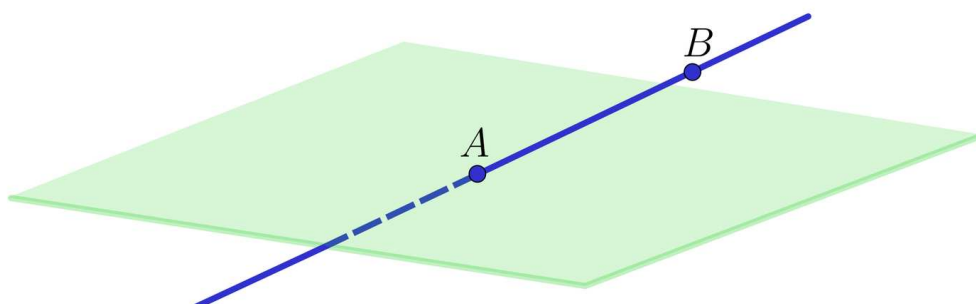
1) prosta może leżeć na płaszczyźnie – każdy punkt prostej jest jednocześnie punktem płaszczyzny:



2) prosta, która nie jest zawarta w płaszczyźnie i jest równoległa do płaszczyzny – prosta i płaszczyzna nie mają punktów wspólnych:



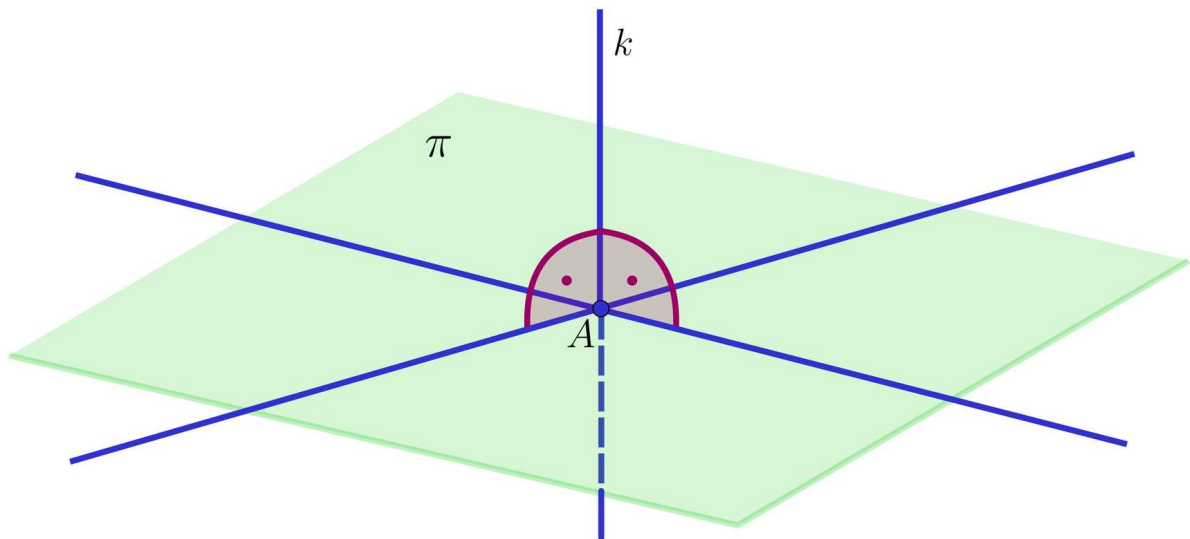
3) prosta może przebijać płaszczyznę – prosta i płaszczyzna mają dokładnie jeden punkt wspólny:



Prosta może przebijać płaszczyznę pod różnymi kątami. Zaczniemy jednak od zdefiniowania prostej prostopadłej do płaszczyzny.

Definicja: Prosta prostopadła do płaszczyzny

Niech punktem wspólnym prostej k przebijającej płaszczyznę π będzie A . Mówimy, że prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π , jeśli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie π przechodzącej przez punkt A .

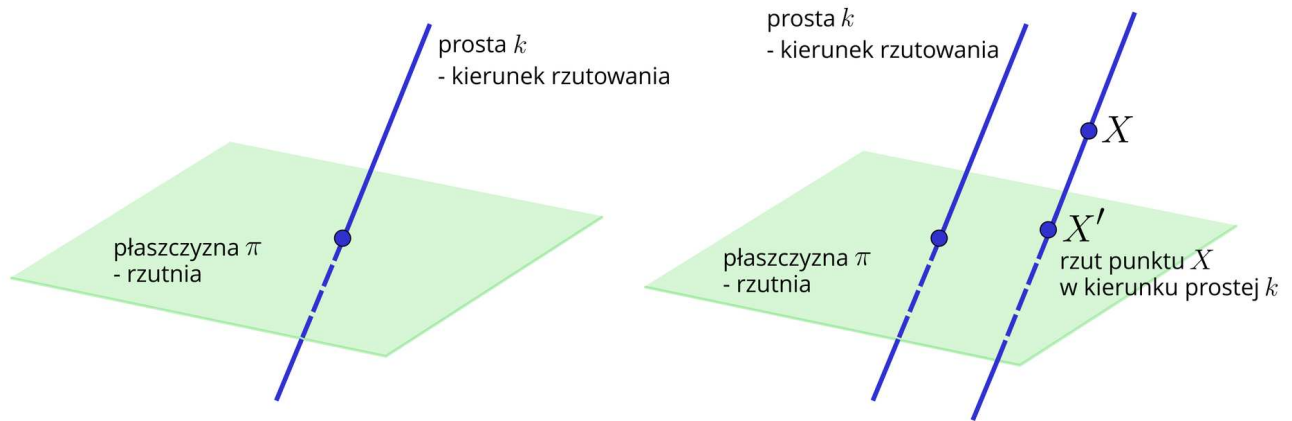


Można zauważyć, że jeśli prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A , jest prostopadła do dwóch różnych prostych leżących w płaszczyźnie π i przechodzących przez A , to jest prostopadła do płaszczyzny π .

Jeżeli prosta k przebija płaszczyznę π , to możemy zdefiniować przekształcenie przestrzeni zwane rzutem równoległym.

Definicja: Rzut równoległy

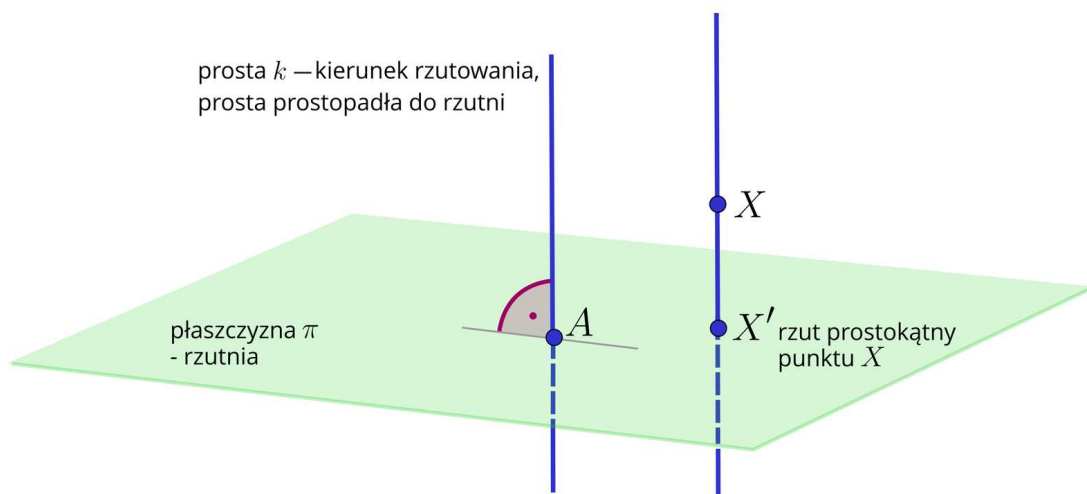
Rzutem równoległym na płaszczyznę π w kierunku prostej k nazywamy takie przekształcenie przestrzeni trójwymiarowej, które każdemu punktowi X tej przestrzeni przyporządkowuje punkt X' płaszczyzny π , będący punktem przecięcia płaszczyzny π oraz prostej równoległej do k przechodzącej przez punkt X . Płaszczyznę π w tym przekształceniu nazywamy rzutnią. Jeżeli punkt X leży na rzutni, to obraz X w rzutowaniu jest równy X' .



Szczególnym przypadkiem rzutu równoległego jest rzut prostokątny.

Definicja: Rzut prostokątny

O rzucie prostokątnym mówimy wówczas, gdy prosta będąca kierunkiem rzutowania jest prostopadła do rzutni.

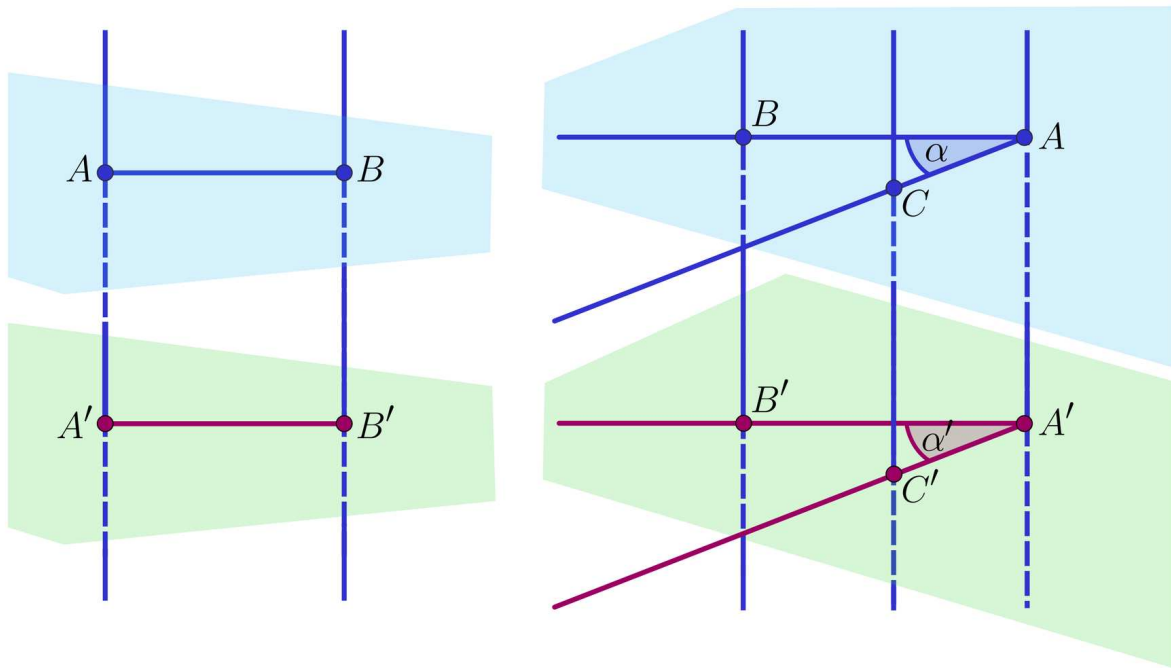


Zauważmy, że rzutem prostokątnym na płaszczyznę π prostej prostopadłej do tej płaszczyzny jest punkt.

Można udowodnić, że rzutem prostokątnym na płaszczyznę π prostej nieprostopadłej do płaszczyzny π jest prosta.

Ponadto:

- rzut prostokątny odcinka AB równoległego do rzutni ma taką długość jak AB ;
- rzut prostokątny kąta α , którego ramiona są równoległe do rzutni, ma taką samą miarę jak kąt α .



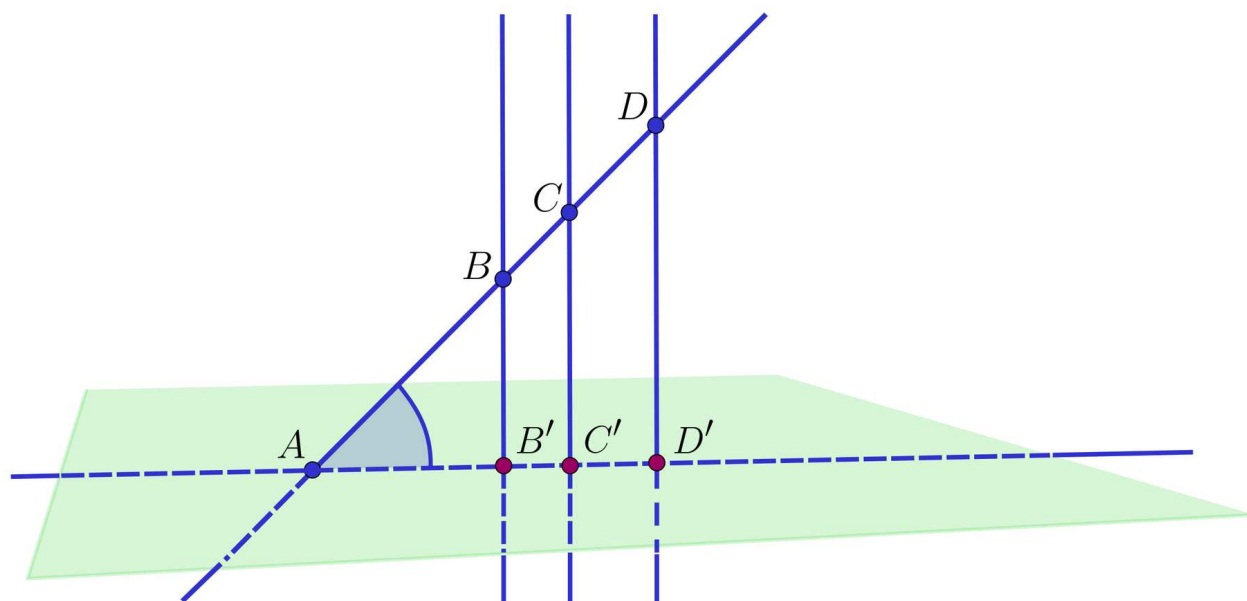
Możemy teraz zdefiniować kąt między prostą a płaszczyzną.

Definicja: Kąt między prostą a płaszczyzną

Jeżeli prosta k jest równoległa do płaszczyzny π (czyli nie ma z nią punktów wspólnych lub jest w niej zawarta w całości), to przyjmujemy, że kąt między k a π ma miarę 0° .

Jeżeli prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π , to przyjmujemy, że kąt między k a π ma miarę 90° .

Jeżeli prosta k nie jest ani równoległa, ani prostopadła do płaszczyzny π , to kąt między k a π definiujemy jako kąt między π a rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π .

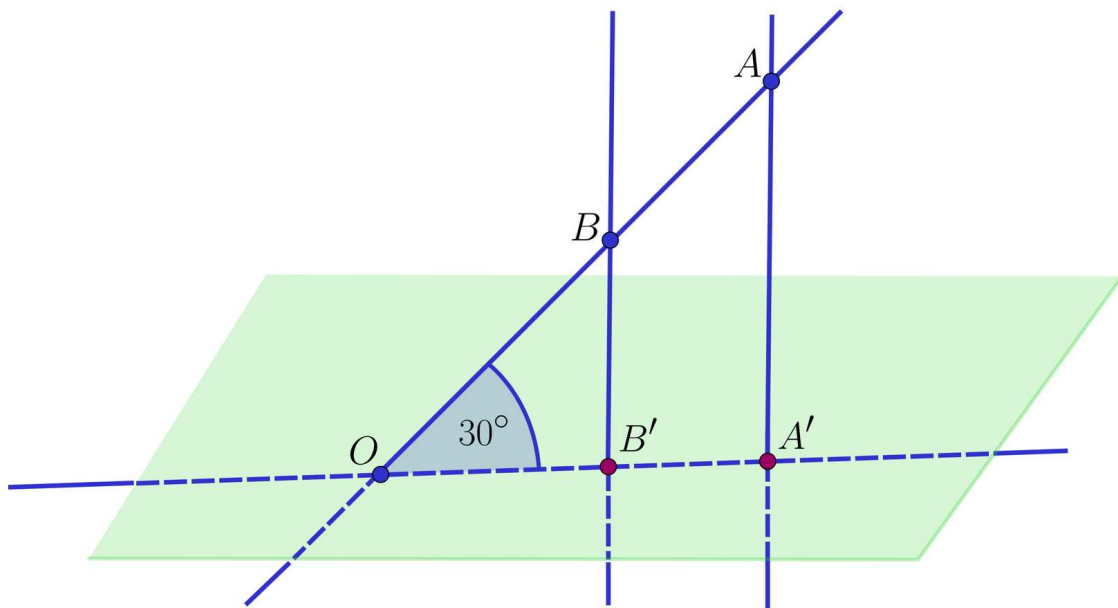


Przykład 1

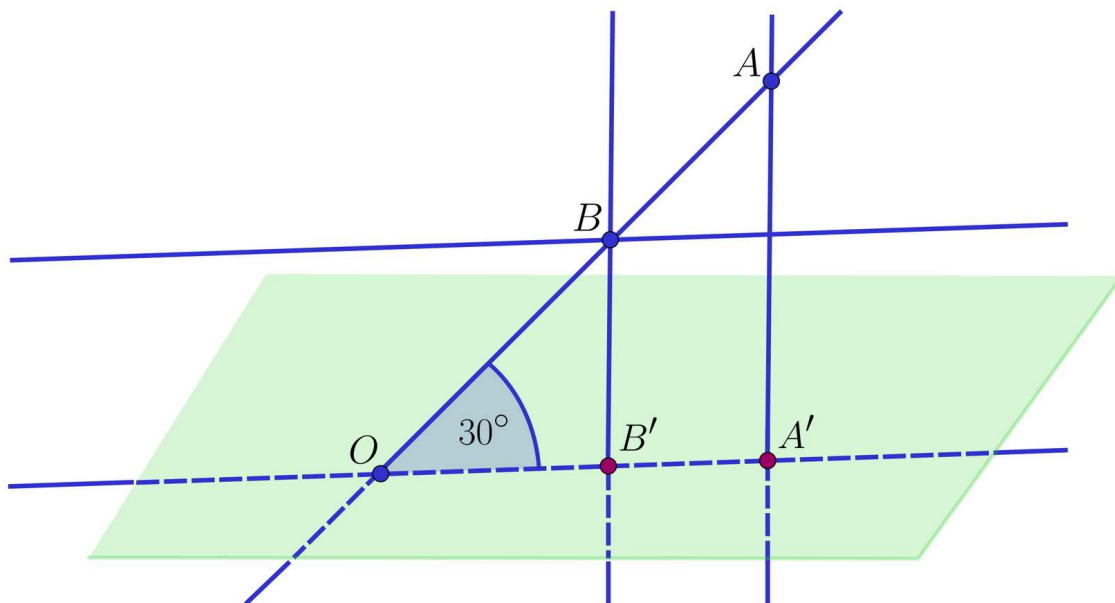
Odcinek AB ma długość 5 i jest nachylony do płaszczyzny π pod kątem 30° . Obliczmy, jaką długość ma rzut prostokątny odcinka AB na płaszczyznę π .

Rozwiązanie

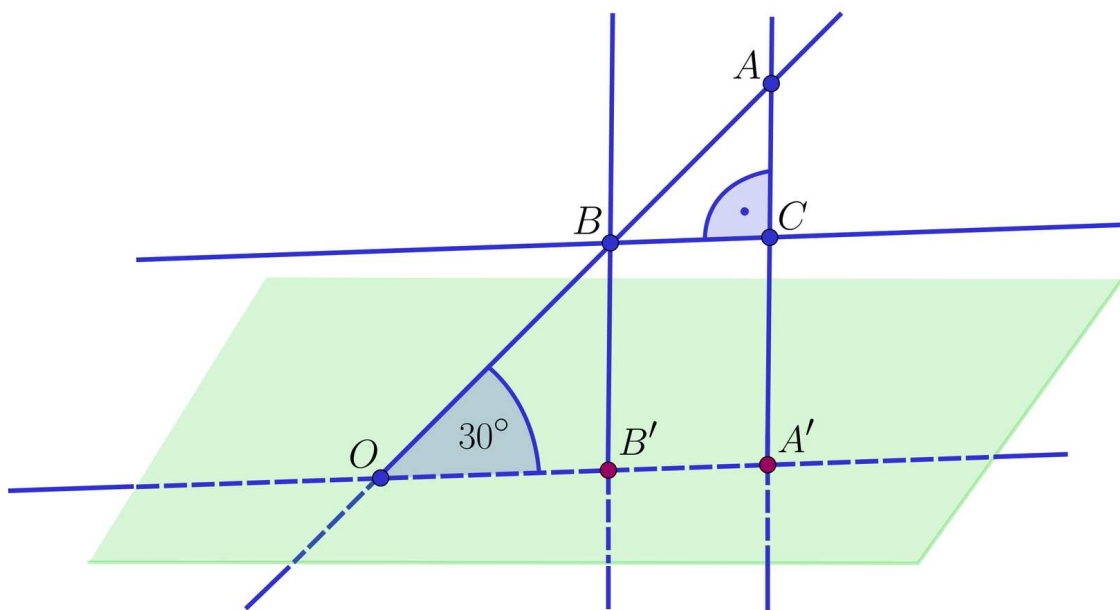
Niech A' i B' oznaczają odpowiednio rzuty prostokątne punktów A i B na płaszczyznę π . Poprowadźmy proste AB oraz $A'B'$. Zauważmy, że prosta $A'B'$ jest rzutem prostokątnym na π prostej AB .



Możemy dorysować prostą k równoległą do prostej $A'B'$ przechodzącą przez punkt B . Nazwijmy punkt wspólny prostych AA' oraz k przez C .



Wówczas utworzony trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o jednym z kątów o mierze 30° oraz przeciwprostokątnej długości 5.



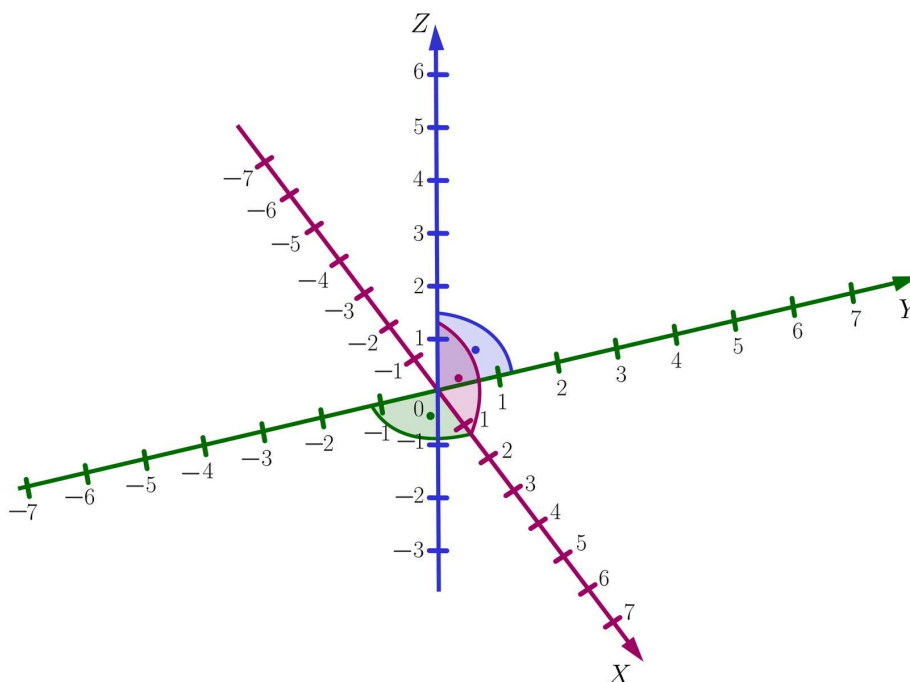
Z własności trójkąta o kątach 90° , 60° , 30° (ekierkowego) wynika, że $|BC| = 2,5\sqrt{3}$.
Ponieważ $BC \parallel B'A'$, więc $|B'A'| = 2,5\sqrt{3}$.

Uwaga!

W powyższym przykładzie założyliśmy, że odcinek AB nie przebijał płaszczyzny π . Zastanów się, jak zmieniłoby się rozwiązanie i odpowiedź na postawione pytanie, gdyby odcinek przebijał płaszczyznę π .

Trójwymiarowy układ współrzędnych

Trzy parami prostopadłe osie liczbowe przecinające się w jednym punkcie (mającym współrzędną 0 na każdej z osi) nazywamy trójwymiarowym układem współrzędnych. Osie nazywamy zwykle przez X , Y i Z . Punktowi przecięcia osi przypisujemy współrzędne $(0, 0, 0)$ i na każdej z nich wybieramy zwrot i jednostkę.



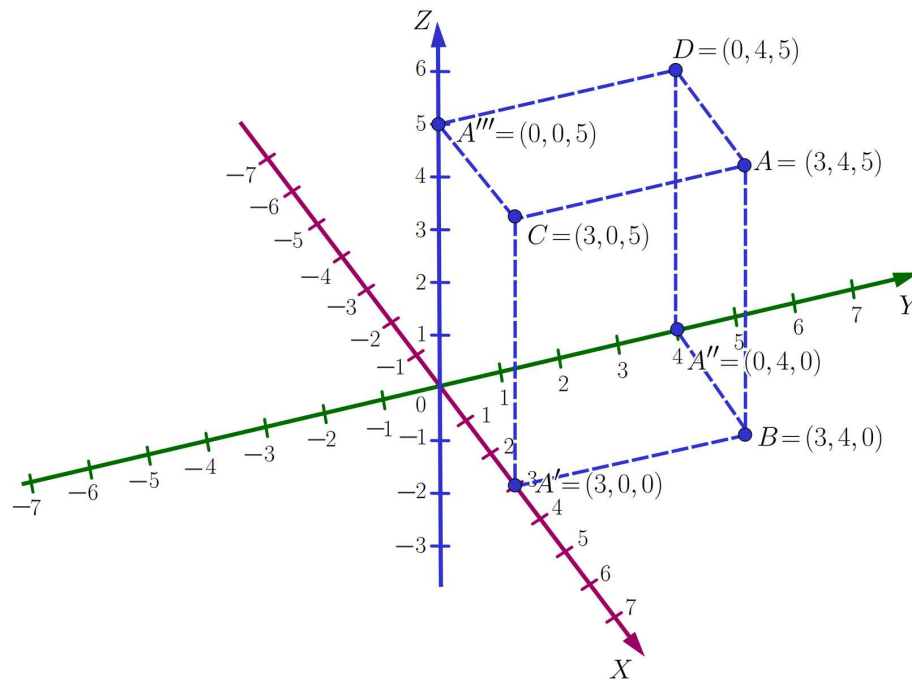
Jeśli punkt leży na osi X , to ma współrzędne $(x, 0, 0)$, jeśli leży na osi Y , ma współrzędne $(0, y, 0)$, jeśli na osi Z , ma współrzędne $(0, 0, z)$.

Jeśli punkt leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie X i Y , to ma współrzędne $(x, y, 0)$, jeśli na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie X i Z , to ma współrzędne $(x, 0, z)$, jeśli na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie Y i Z , to ma współrzędne $(0, y, z)$.

Każdy punkt przestrzeni trójwymiarowej ma jednoznacznie przypisane współrzędne, które odczytujemy jako rzuty prostokątne kolejno na oś X , oś Y i oś Z .

Przykład 2

Na poniższym rysunku zaznaczono punkt A o współrzędnych $(3, 4, 5)$, jego rzuty prostokątne na płaszczyzny XY , XZ i YZ oraz rzuty na osie X , Y i Z .



Słownik

prosta przebijająca płaszczyznę

prosta, która ma z daną płaszczyzną dokładnie jeden punkt wspólny

prosta prostopadła do płaszczyzny

prosta k przebijająca płaszczyznę π w punkcie A jest prostopadła do płaszczyzny π , gdy jest prostopadła do każdej prostej zawartej w π przechodzącej przez A

rzut prostokątny

rzutem prostokątnym na płaszczyznę π nazywamy takie przekształcenie przestrzeni trójwymiarowej, które dowolnemu punktowi X przyporządkowuje taki punkt X' należący do π , że prosta XX' jest prostopadła do π

kąt między prostą, a płaszczyzną

- 1) jeżeli prosta k jest równoległa do płaszczyzny π , to kąt między nimi jest równy 0° ;
- 2) jeżeli prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π , to kąt między nimi jest równy 90° ;
- 3) jeżeli prosta k jest przebija płaszczyznę π , ale nie jest do niej prostopadła, to kąt między nimi jest równy kątowi między π a rzutem prostokątnym k na π

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w prezentacji multimedialnej. Na ich podstawie rozwiąż test z polecenia 2.

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Bok AB trójkąta ABC zawarty jest w płaszczyźnie π i ma długość $3\sqrt{3}$. Bok BC jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 9. Pod jakim kątem bok AC tego trójkąta jest nachylony do płaszczyzny π ?

Ćwiczenie 4



Odcinek AB ma długość 6 i jest nachylony do płaszczyzny π pod kątem 60° . Oblicz, jaką długość ma rzut odcinka AB na płaszczyznę π .

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Narysuj rzut prostokątny:

a) ostrosłupa prawidłowego trójkątnego,

b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego,

na płaszczyznę zawierającą podstawę tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prosta przebijająca płaszczyznę

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza rzut prostokątny prostej na płaszczyznę.
- wyznacza kąt między prostą, a płaszczyzną w przestrzeni.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda przypadków;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Prosta przebijająca płaszczyznę” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują treści z sekcji „Przeczytaj” metodą tekstu przewodniego. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-7 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Prosta przebijająca płaszczyznę” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Prosta przebijająca płaszczyznę”).

Materiały pomocnicze:

Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wskazówki metodyczne:

Analizę prezentacji multimedialnej, wykonanie poleceń z nią związanych nauczyciel może zadać jako pracę domową