



Równanie wielomianowe zapisane w postaci iloczynowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wielomianowe zapisane w postaci iloczynowej

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Często zdarza się, że skomplikowane równanie wyższego stopnia daje się sprowadzić do iloczynu równań liniowych lub kwadratowych. Jest to bardzo wygodna postać, ponieważ aby iloczyn kilku czynników równał się zero wystarczy, aby jeden z tych czynników był równy zero.

W tym materiale utrwalimy i rozszerzymy umiejętności dotyczące rozwiązywania równań wielomianowych zapisanych w postaci iloczynowej.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania zapisane w postaci iloczynu równań liniowych lub kwadratowych.
- Wybierzesz równania, które mają określoną liczbę rozwiązań.
- Określisz krotność pierwiastka równania.
- Sprowadzisz równania wyższych stopni do postaci iloczynu równań jak najmniejszego stopnia i podasz ich rozwiązania (jeżeli istnieją).

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$ nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n .

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą a , dla której zachodzi warunek $W(a) = 0$.

Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania wielomianowego

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej jest nie większa niż stopień wielomianu $W(x)$.

Zapisanie równania w postaci iloczynowej polega zazwyczaj na zapisaniu równania za pomocą iloczynu czynników, w których niewiadoma jest jak najniższego stopnia.

Przykład 1

Znajdziemy rozwiązanie równania $x(x + 3)(x - 4) = 0$.

Lewa strona równania jest iloczynem trzech czynników. Iloczyn równa się zero jeżeli przynajmniej jeden z tych czynników jest równy zero.

Czyli otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 3 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0.$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 4$$

Równanie ma trzy rozwiązania $x = -3$, $x = 0$, $x = 4$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

Aby uzyskać **postać iloczynową równania** wielomianowego trzeciego stopnia wyłączymy x przed nawias.

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } (x^2 - 5x + 6) = 0$$

Ze wzorów Viete'a łatwo odgadniemy, że liczby 2 i 3 są rozwiązaniami drugiego równania.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

Przykład 3

$$\text{Rozwiążemy równanie } x(x + 2)(x - 1)^2(x^2 - 4) = 0.$$

Lewa strona równania jest iloczynem czterech czynników. Iloczyn równa się zero jeżeli przynajmniej jeden z tych czynników jest równy zero.

Czyli otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } (x - 1)^2 = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0.$$

$$x = 0 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Stąd wynika, że nasze równanie ma cztery rozwiązania:

$$x = -2 \text{ lub } x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 2,$$

przy czym liczba -2 jest pierwiastkiem podwójnym, liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym, liczba 0 jest pierwiastkiem pojedynczym, liczba 2 jest pierwiastkiem pojedynczym.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $(x - 4)^2(x^3 - 27)(4 - x^2)(x - 3) = 0$ i określimy krotność pierwiastków.

Lewa strona równania jest iloczynem czterech czynników. Jeżeli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z czynników jest równy zero.

$$(x - 4)^2 = 0 \text{ lub } (x^3 - 27) = 0 \text{ lub } (4 - x^2) = 0 \text{ lub } (x - 3) = 0$$

$$\text{Zatem: } x = 4 \text{ lub } x = 4 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3.$$

Stąd wynika, że nasze równanie ma cztery rozwiązania:

$$x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = 4,$$

przy czym liczba 3 jest pierwiastkiem podwójnym, liczba 4 jest pierwiastkiem podwójnym, liczba 2 jest pierwiastkiem pojedynczym, liczba -2 jest pierwiastkiem pojedynczym.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $2 \cdot (x - 1) = x(x - 1)$.

Najpierw przeniesiemy wszystkie wyrażenia na jedną stronę równania.

$$2 \cdot (x - 1) - x(x - 1) = 0$$

Zauważmy, że suma algebraiczna $(x - 1)$ powtarza się w obydwu wyrażeniach algebraicznych.

Wyciągniemy wyrażenie $(x - 1)$ przed nawias.

$$(x - 1)(2 - x) = 0$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie zapisane w postaci iloczynowej. Dalej już łatwo rozwiążemy równanie, przyrównując każdy z czynników do zera.

$$x - 1 = 0 \text{ lub } 2 - x = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 2$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $x = 1$ lub $x = 2$.

Słownik

postać iloczynowa równania

zapisanie równania za pomocą iloczynu czynników, w których niewiadoma jest jak najniższego stopnia

Galeria zdjęć interaktywnych




Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykłady, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, analizując poszczególne zdjęcia.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Określ krotność pierwiastków równania.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wielomianowe zapisane w postaci iloczynowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania zapisane w postaci iloczynowej
- wybiera równania, które mają określoną liczbę rozwiązań
- określa krotność pierwiastka równania
- sprowadza równania wyższych stopni do postaci iloczynu równań liniowych lub kwadratowych i podaje ich rozwiązania (jeżeli istnieją)
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych przykładów równań zapisanych w postaci iloczynu dwóch równań liniowych. Uczniowie podają rozwiązania tych równań.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów prostych równań liniowych, kwadratowych lub równań wyższych stopni typu: $x + 7 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^3 + 8 = 0$. Następnie stara się zapisać równania w postaci iloczynowej i podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują liczbę rozwiązań równania.
3. Przykłady rozwiązań równań znajdujące się w części Przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
4. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stolik zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje bardzo dobrą ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów rozwiązywania równań zapisanych w postaci iloczynowej.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się dokończyć pracy rozwiązują pozostałe zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

[Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu](#)

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Zadania z galerii zdjęć interaktywnych mogą być materiałem powtórzeniowym przed pracą klasową.