

Figury podobne

Podobieństwo, skala podobieństwa, przykłady figur podobnych. Przykłady podobieństwa w życiu codziennym. Zasób zawiera prezentację multimedialną ilustrującą podobieństwo figur.

Przykłady figur podobnych i zależności pomiędzy nimi. Skala podobieństwa. Zasób zawiera ćwiczenie interaktywne ilustrujące skale podobieństwa i film z przykładami figur podobnych.

Konstruowanie figur podobnych w podanej skali podobieństwa. Obliczanie długości odcinków, obwodów lub pola powierzchni z wykorzystaniem podanej skali podobieństwa. Wyznaczanie skali podobieństwa. Ilustracja interaktywna: konstrukcja odcinka w podobieństwie. Ilustracja interaktywna: pary figur podobnych.

Konstruowanie odcinka z innych odcinków przy wskazanej proporcji pomiędzy ich długościami. Zadania na dowodzenie. Obliczanie pola odcinka kołowego. Skala podobieństwa w zadaniach na długości odcinków.

Figury podobne

Materiał ten poświęcony jest figurom podobnym. Analizując zawarte tu przykłady, dowiesz się, jak wyznaczyć skalę podobieństwa figur oraz jak obliczyć wymiary figury podobnej, znając tylko skalę jej podobieństwa.

Podobieństwo

etap 1 z 5



Podobieństwo można zilustrować w prosty sposób, powiększając lub pomniejszając jakiś obiekt.

W konstrukcji obok, obiektem tym jest płaska fotografia drzewa, której wymiary możemy zmniejszać lub powiększać, zmieniając położenie punktu .

Otrzymujemy w ten sposób całą rodzinę fotografii, z których każda ma inne wymiary, ale wszystkie są do siebie podobne.

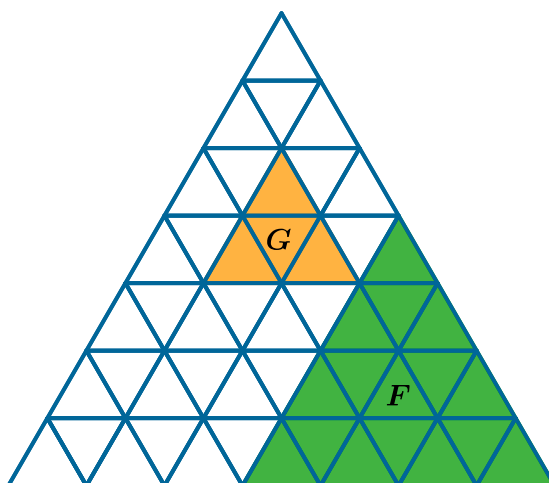


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xl2egV>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Ważne!

Figury, które mają ten sam kształt, ale które mogą mieć inną wielkość, nazywamy **podobnymi**.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Figura F jest podobna do figury G . Symbolicznie zapisujemy

$$F \sim G.$$

Skala podobieństwa



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/R1YUS1TpQO8Te](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia, czym jest skala.

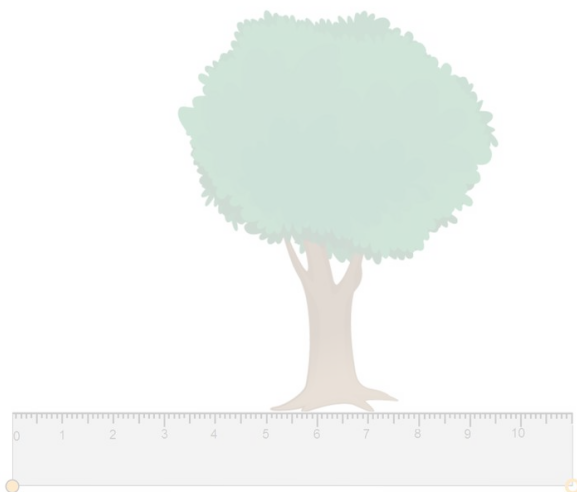
Ćwiczenie 1

Skala

Drzewo narysowano w pewnej skali.
Wysokość drzewa wynosi
w rzeczywistości 6 metrów.
W jakiej skali zostało narysowane drzewo?

Posłuż się linijką o centymetrowej skali.

skala 1:



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xl2egV>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

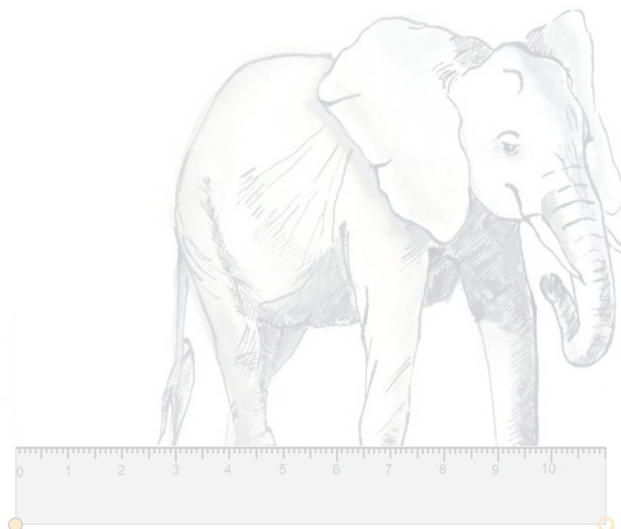
Ćwiczenie 2

Skala

Dorosłego słonia narysowano
w pewnej skali.
Wysokość słonia jest równa 3,6 m.
W jakiej skali został narysowany ten słoń?

Posłuż się linijką o centymetrowej skali.

skala 1:



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xl2egV>

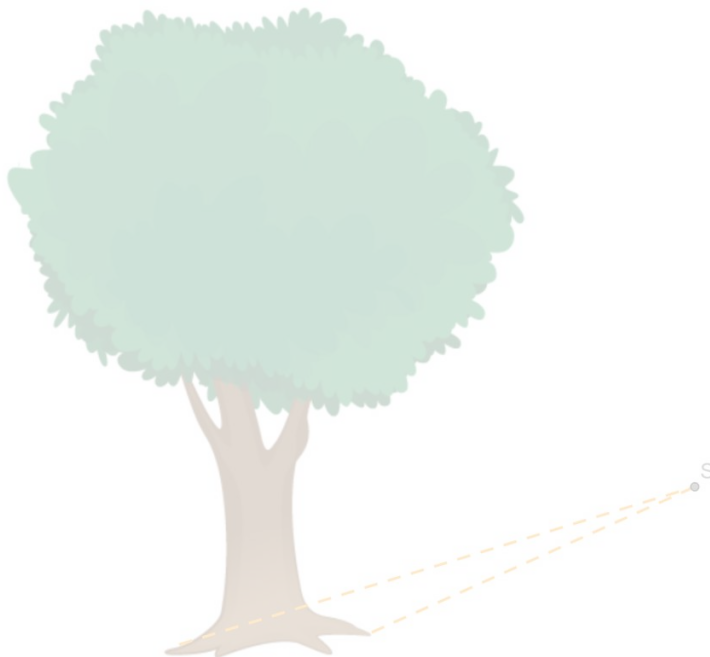
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Skala podobieństwa

etap 1 z 4



Podobieństwo figur dostrzegamy na co dzień. Oglądając to samo drzewo z różnych odległości, widzimy ten sam kształt drzewa. Zmienia się tylko jego wielkość. Na dynamicznym rysunku obok widzimy drzewa o takim samym kształcie, przy czym jedno z nich zmniejsza się lub zwiększa w miarę przybliżania lub oddalania od punktu S. Mówimy, że oba drzewa są podobne.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xI2egV>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

100%



75%



54%



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pierwszą z fotografii zmniejszono. Wymiary drugiej fotografii stanowią 75% odpowiednich wymiarów pierwszej fotografii.

Wymiary trzeciej fotografii stanowią 54% odpowiednich wymiarów pierwszej fotografii.

Zatem druga z fotografii jest obrazem pierwszej w skali 75 : 100, a trzecia jest obrazem pierwszej w skali 54 : 100.

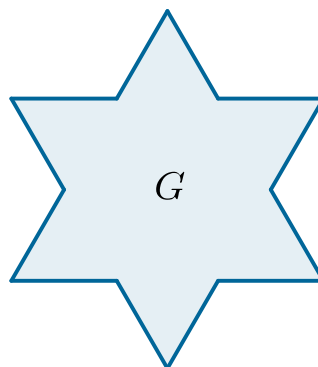
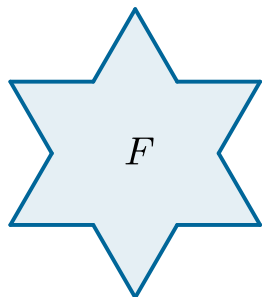
Prostokąty, w kształcie których są fotografie, to figury podobne. Powiemy, że drugi jest podobny do pierwszego w skali $\frac{75}{100}$, a trzeci do pierwszego w skali $\frac{54}{100}$.

Ważne!

Skalą podobieństwa nazywamy liczbę k ($k > 0$), wyrażającą stosunek odpowiadających sobie odcinków w figurach podobnych.

Przykład 1

Figurę F przedstawiono w skali $1,2 : 1$, otrzymując figurę G .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Figury F i G to figury podobne. Figura F jest podobna do figury G w skali $k = \frac{10}{12}$. Figura G jest podobna do figury F w skali $s = \frac{12}{10}$.

Ważne!

Niech figury F i G będą podobne w skali k .

Jeśli A, B są punktami figury F , a punkty A_1, B_1 są odpowiadającymi im punktami figury G , to $|A_1B_1| = k \cdot |AB|$.

Ćwiczenie 3



Określ skalę podobieństwa figur.

Ćwiczenie 3

Na rysunku obok podano miarę wielkości boku każdej z sześciu figur. Twoim zadaniem jest umieścić w okrągłych polach pod figurami prawidłową skalę podobieństwa. Zmień położenie punktów $\blacklozenge$ z wartościami liczbowymi skal podobieństwa do odpowiednich kół pod rysunkami.

$\frac{1}{3}$ $\blacklozenge$ $\frac{1}{7}$ $\blacklozenge$ $\frac{1}{2}$ $\blacklozenge$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xl2egV>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 w skali $k = \frac{3}{4}$. Średnica okręgu O_1 jest równa 15. Oblicz pole koła, którego promień jest równy promieniowi okręgu O_2 .

Oznaczmy:

d_1 – średnica okręgu O_1 ,

d_2 – średnica okręgu O_2 .

Okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 w skali $k = \frac{3}{4}$. Zapisujemy wynikającą stąd proporcję i wyznaczamy średnicę drugiego z okręgów.

$$\frac{d_1}{d_2} = k$$

$$\frac{15}{d_2} = \frac{3}{4}$$

$$3d_2 = 60$$

$$d_2 = 20.$$

Średnica okręgu O_2 jest równa 20, zatem promień tego okręgu wynosi 10.

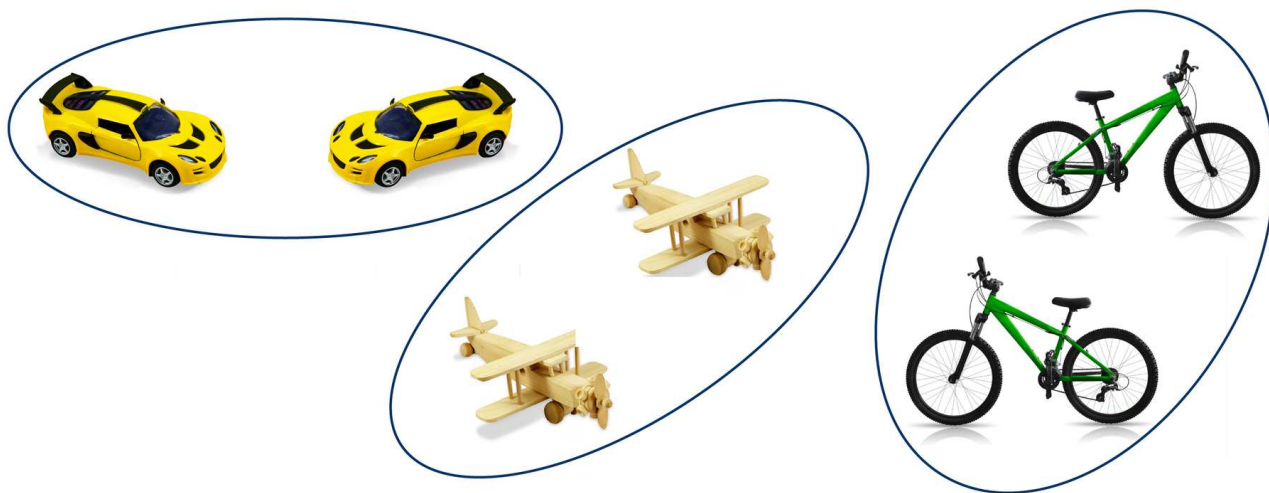
Obliczamy pole koła o promieniu 10.

$$P = \pi \cdot 10^2 = 100\pi.$$

Pole koła jest równe 100π .

Ważne!

Każde dwie figury przystające są podobne. Ich skala podobieństwa wynosi 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Ogrodzenie zbudowane jest z elementów, z których każdy podobny jest do sąsiedniego w skali 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W skład porcelanowego serwisu do kawy wchodzi 6 filiżanek, podobnych jedna do drugiej w skali 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Przykłady figur podobnych.

W życiu codziennym często spotykamy się z obiektami, które przypominają figury podobne.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R17VLg7UUOP1f>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia, że rosyjska zabawka o nazwie matryoszka składa się z figur podobnych.

Ważne!

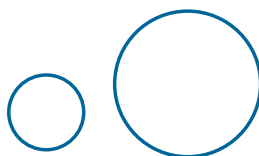
Figury geometryczne podobne to na przykład:

- dwa dowolne odcinki,
- dwa dowolne okręgi,
- dwa dowolne kwadraty.

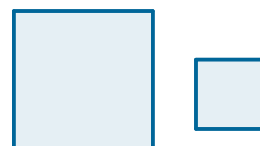
a)



b)



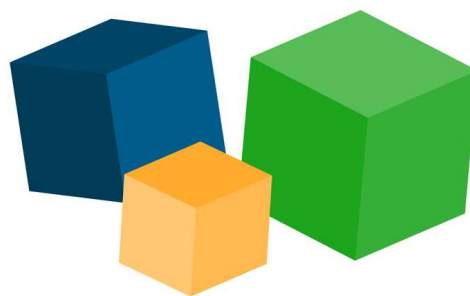
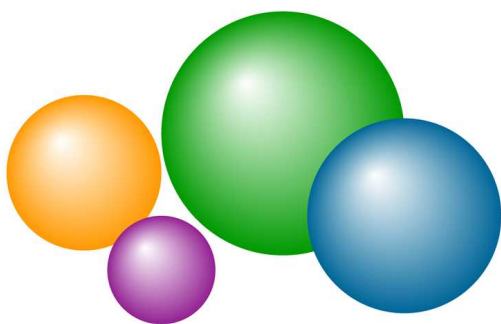
c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Każde dwa odcinki są podobne. Każde dwa okręgi są podobne. Każde dwa kwadraty są podobne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każde dwie kule są podobne.

Każde dwa sześciany są podobne.

Przykład 5

Na planie wykonanym w skali 1 : 50 dywan leżący w pokoju Wieśka jest przedstawiony jako kwadrat o przekątnej długości 8 cm. W rzeczywistości dywan leży pośrodku pokoju i jest oddalony od każdej ze ścian o 0,75 m. Oblicz pole powierzchni podłogi pokoju Wieśka.

Kwadrat, w kształcie którego jest dywan leżący w pokoju Wieśka, jest podobny w skali $k = 50$ do kwadratu przedstawiającego go na planie.

Obliczmy rzeczywistą długość d przekątnej dywanu.

$$\frac{d}{8} = 50$$

$$d = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m.}$$

Korzystamy ze wzoru na długość przekątnej kwadratu i obliczamy długość a boku kwadratu.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$4 = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Teraz możemy obliczyć długość x boku kwadratu, w kształcie którego jest podłoga.

$$x = 1,5 + 2\sqrt{2}$$

$$x = (1,5 + 2\sqrt{2}) \text{ m.}$$

Obliczamy pole P powierzchni podłogi – jako pole kwadratu.

$$P = (1,5 + 2\sqrt{2})(1,5 + 2\sqrt{2})$$

$$P = 2,25 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 8$$

$$P = 10,25 + 6\sqrt{2}$$

$$P \approx 18,74 \text{ m}^2.$$

Pole powierzchni podłogi pokoju Wieśka jest równe około $18,74 \text{ m}^2$.

Otrzymywanie figur podobnych

Pokażemy na przykładach, jak można skonstruować figurę podobną do danej.

Przykład 6

Skonstruujemy odcinek CD podobny do danego odcinka AB w skali $k = 3$.

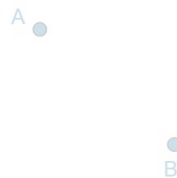
Konstrukcja odcinka w podobieństwie
etap 1 z 5

Dane są punkty A i B.
Kreślimy odcinek AB.



Wybieramy punkt S nie leżący na tym odcinku.

☐ punkt S



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xI2egV>

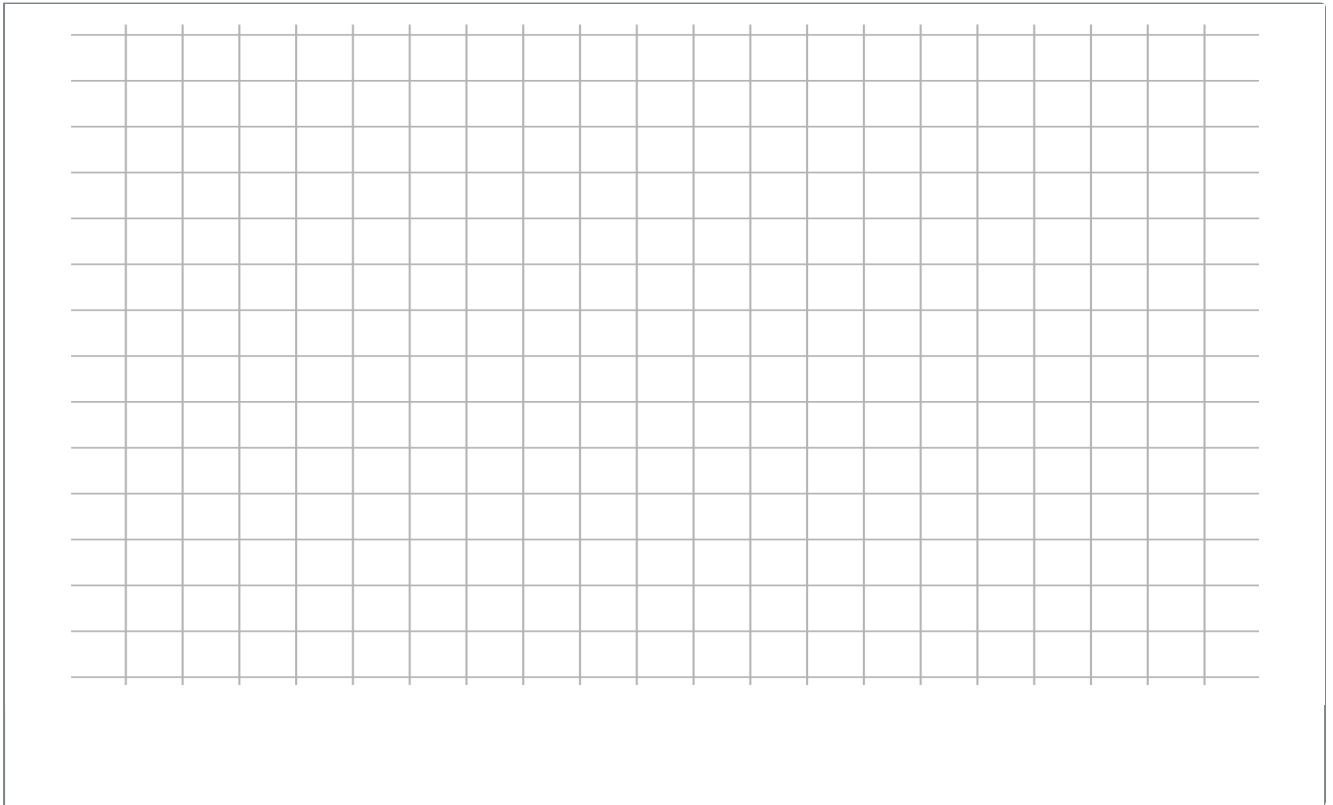
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Narysuj dowolny czworokąt.

Zaproponuj sposób konstrukcji figury podobnej w skali $k = 0,5$ do tego czworokąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Każde dwa prostopadłe odcinki są podobne.
- ☐ Okrąg o promieniu r jest podobny do koła o promieniu $2r$.
- ☐ Każde dwa okręgi o równych obwodach są podobne.
- ☐ Prosta jest podobna do odcinka, który jest do niej równoległy.
- ☐ Każde dwa kąty są podobne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Dwa odcinki podobne są w skali 4 : 5. Krótszy odcinek ma długość 7 cm. Zaznacz, ile wynosi suma długości tych dwóch odcinków.

☐ 39 cm

☐ 15,75 cm

☐ 9 cm

☐ 14,75 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Zaznacz, w którym przypadku, w skali 1 : 2, podobny jest odcinek AB do odcinka CD .

☐ $|AB| = 1, |CD| = \sqrt{2}$

☐ $|AB| = \sqrt{3}, |CD| = \sqrt{6}$

☐ $|AB| = \sqrt{2}, |CD| = \sqrt{8}$

☐ $|AB| = \sqrt{2}, |CD| = \sqrt{32}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Obwód okręgu O_1 jest równy 6π . Promień okręgu O_2 jest równy 4. Zaznacz, w jakiej skali okrąg O_1 jest podobny do okręgu O_2 .

☐ 3 : 4

☐ 6 : 4

☐ 3π : 4

☐ 3 : 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Podobieństwo - ćwiczenie

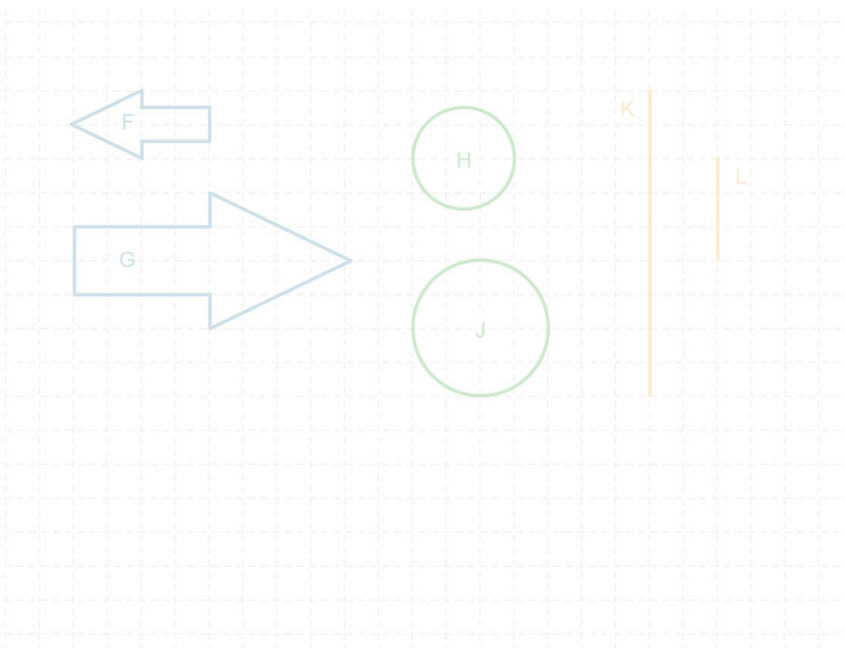
Wykorzystując siatkę, wyznacz skale podobieństwa:

figury F do figury G, $s =$

figury H do figury J, $s =$

figury K do figury L, $s =$

i wpisz je do odpowiednich pól tekstowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PE3xl2egV>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

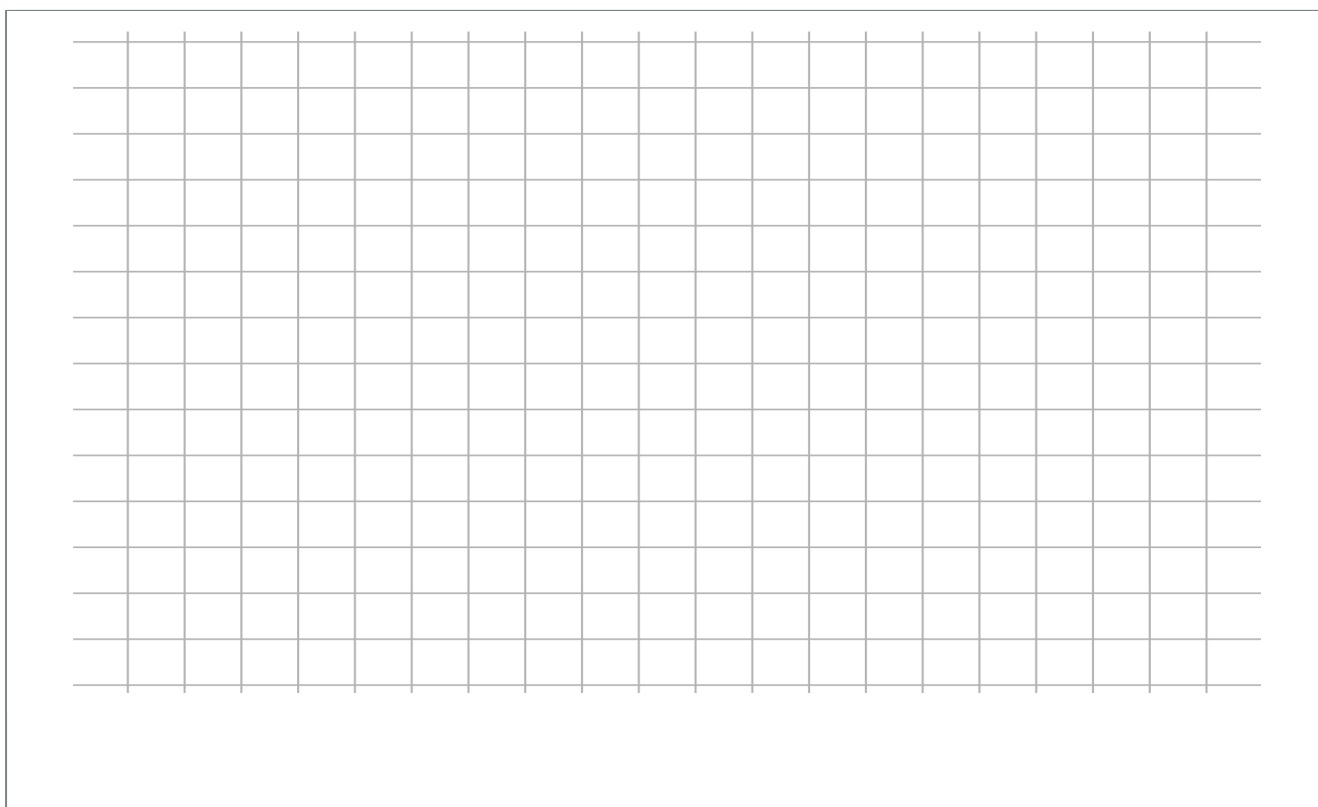
Ćwiczenie 10



Narysuj dowolny odcinek.

Znajdź konstrukcyjnie odcinek

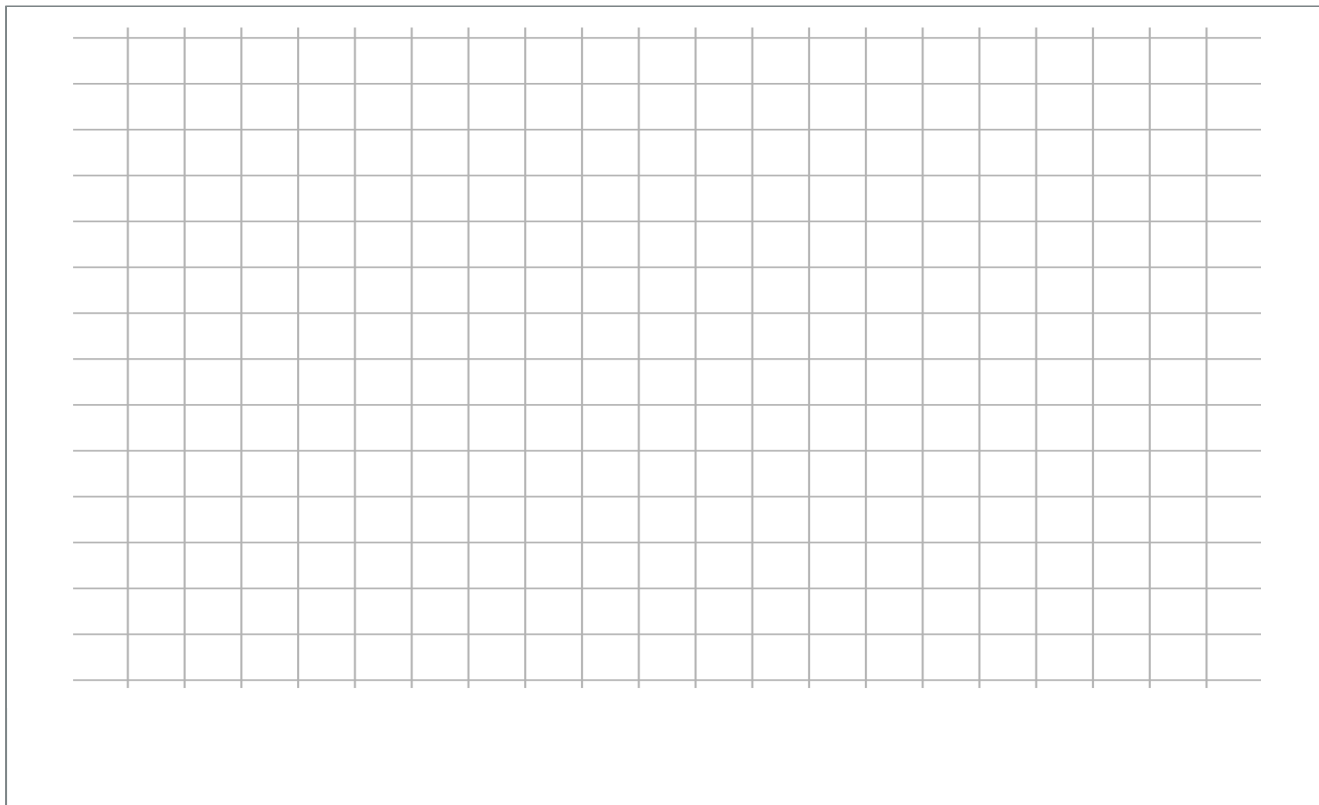
- a. dwa razy dłuższy,
- b. cztery razy dłuższy,
- c. trzy razy dłuższy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

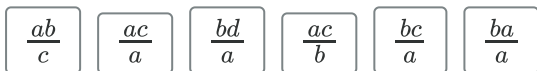
Narysuj trzy różne odcinki i oznacz ich długości literami a , b i c . Podaj długość odcinka y , aby spełniona była każda z poniższych równości.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{y}$, zatem odcinek y będzie miał długość
- $\frac{y}{a} = \frac{c}{b}$, zatem odcinek y będzie miał długość
- $\frac{y}{a} = \frac{b}{c}$, zatem odcinek y będzie miał długość



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Udowodnij, że każda figura osiowosymetryczna składa się z dwóch figur podobnych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Udowodnij, że dwusieczna kąta dzieli ten kąt na dwa kąty podobne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k . Figura F_2 jest podobna do figury F_3 w skali m . Czy figury F_1 i F_3 są podobne? Jeśli tak, to w jakiej skali? Jeśli nie, podaj przykład.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k . Figura F_2 jest przystająca do figury F_3 . Czy figury F_1 i F_3 są podobne? Jeśli tak, to w jakiej skali? Jeśli nie, podaj przykład.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Każde dwa wycinki danego koła są podobne.

☐ Figura F' będąca obrazem figury F w symetrii osiowej jest podobna do figury F .

☐ Figura F' będąca obrazem figury F w symetrii środkowej jest podobna do figury F .

☐ Każde dwie figury podobne są przystające.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Zaznacz każde zdanie prawdziwe. Koło K_2 jest podobne do koła K_1 w skali $k = 3$. Wycinkowi koła K_1 o polu 6π odpowiada kąt środkowy o mierze 60° .

☐ Obwód koła K_2 jest równy 36.

☐ Pole koła K_2 jest o 288π większe od pola koła K_1 .

☐ Promień koła K_1 jest równy 6.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Okrąg O_2 jest podobny do okręgu O_1 w skali $\frac{2}{5}$. W okręgu O_1 kąt środkowy o mierze 12° jest oparty na łuku długości 2π .
- Długość okręgu O_1 jest równa , zatem promień tego okręgu jest równy .
- Ponieważ promień okręgu O_2 jest równy , to kąt środkowy w tym okręgu oparty na łuku długości ma miarę 45° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Koło K_2 jest podobne do koła K_1 w skali $k = 4$. Promień koła K_1 jest równy 5.

Oblicz pole odcinka kołowego wyznaczonego przez cięciwę łączącą końce dwóch prostopadłych do siebie promieni koła K_2 . Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole odcinka kołowego wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Jeśli figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k , to F_2 jest podobna do F_1 w skali .
- Jeśli koło K jest podobne do koła M w skali to promienie tych kół są równe.
- Przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty podobne w skali .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Koło K o promieniu r jest podobne do koła W o promieniu w .
Uzupełnij tabelę, przeciągając do niej prawidłowe wartości.

Skala podobieństwa	Długość promienia r	Długość promienia w	Obwód koła K	Obwód koła W	Pole koła K
5		9			
0,2	10				
			16π	2π	
					π

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.