



Wyznaczanie pierwiastków wielomianu różnymi metodami

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wyznaczanie pierwiastków wielomianu różnymi metodami

Źródło: Tim Evans, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiemy, że wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych uwzględniając ich krotności – to znaczy, że suma krotności wszystkich pierwiastków wielomianu nie może przekroczyć liczby n .

Matematyka jest nauką rozwijającą się praktycznie niemal od początków ludzkości. Rozwijała się i rozwija w różnych tradycjach, kulturach, miejscach. Jest uprawiana przez ludzi posługujących się różnymi językami, zwyczajami, konwencjami zapisu. Jest bardzo ścisła i precyzyjna, ale ze względu na owe naleciałości kulturowe pojawiają się czasem pewne niejasności, wynikające np. z przyjmowania różnych definicji kluczowych pojęć. Tak jest choćby ze zbiorem liczb naturalnych – w zależności od przyjętej definicji najmniejszą liczbą naturalną jest 0 lub 1 (w polskiej szkole niemal powszechnie obowiązuje umowa, że 0 należy do zbioru liczb naturalnych).

Podobna nieścisłość może się zdarzyć przy liczeniu pierwiastków wielomianu. Rozważmy wielomian $W(x) = (x - 1)^3$. Równanie $(x - 1)^3 = 0$ ma jedno rozwiązanie rzeczywiste – liczbę 1. Zatem 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Ale ile ten wielomian ma pierwiastków? Niektórzy powiedzą, że jedynym pierwiastkiem tego wielomianu jest 1, ale za to jest to pierwiastek potrójny. Niektórzy zaś uznają, że wielomian ma trzy jednakowe pierwiastki, każdy z nich wynosi 1.

Dobrze, gdy autorzy zadań pamiętają o tych wątpliwościach i formułują pytania w ten sposób, by uniknąć niejednoznaczności. W wielu konkursach nie mówi się na przykład o liczbach naturalnych, ale o liczbach całkowitych nieujemnych lub o liczbach całkowitych dodatnich. Podobnie przy wielomianach – zamiast zapytać, kiedy wielomian ma dwa pierwiastki rzeczywiste lepiej pytanie doprecyzować pytając o dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Autorzy arkuszy maturalnych starają się tak zredagować zadania, by nie pozostawiać miejsca na takie wątpliwości i różne interpretacje.

Twoje cele

- Zastosujesz różne metody prowadzące do znalezienia wszystkich, albo przynajmniej niektórych pierwiastków wielomianu.
- Poznasz wzory wiążące współczynniki wielomianu i jego pierwiastki, będące uogólnieniem znanych z funkcji kwadratowej wzorów Viète'a.

Przeczytaj

W kolejnych przykładach pokażemy zastosowania różnych metod wyszukiwania pierwiastków rzeczywistych wielomianu.

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 5\sqrt{7}x + 3\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian pierwszego stopnia, więc dla wyznaczenia jego pierwiastka (jako wielomian pierwszego stopnia ma jeden pierwiastek) wystarczy rozwiązać proste równanie liniowe

$$5\sqrt{7}x + 3\sqrt{2} = 0.$$

Pierwiastkiem wielomianu jest rozwiązanie tego równania, czyli liczba

$$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{14}}{35}.$$

Przykład 2

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 7x^2 - 6\sqrt{2}x + 2$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian drugiego stopnia, czyli dla wyznaczenia jego pierwiastków wystarczy rozwiązać równanie kwadratowe

$$7x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 72 - 56 = 16.$$

$\Delta > 0$, wielomian ma więc dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{3\sqrt{2}-2}{7}, x_2 = \frac{3\sqrt{2}+2}{7}.$$

Przykład 3

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian trzeciego stopnia. Jako wielomian stopnia nieparzystego musi mieć co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Liczba wszystkich pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności nie może przekroczyć 3.

Analizując kolejne wyrazy wielomianu, można zauważyć wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy

$$W(x) = (2x - 3)^3.$$

Wystarczy zatem rozwiązać równanie

$$(2x - 3)^3 = 0.$$

Wielomian ma pierwiastek potrójny

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{3}{2}.$$

Przykład 4

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 + \sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian trzeciego stopnia. Jako wielomian stopnia nieparzystego musi mieć co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Liczba wszystkich pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności nie może przekroczyć 3.

Szukamy rozwiązań równania

$$x^3 + 5x^2 + \sqrt{2}x + 5\sqrt{2} = 0.$$

Zauważmy, że składniki wielomianu można pogrupować

$$x^2(x + 5) + \sqrt{2}(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 + \sqrt{2}) = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem rzeczywistym tego równania jest (-5) . Czynniki $x^2 + \sqrt{2}$ jest (w liczbach rzeczywistych) nierozkładalny.

Wielomian ma jeden pierwiastek rzeczywisty $x_1 = -5$.

Przykład 5

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 6x^3 + 11x^2 - 31x + 14$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian trzeciego stopnia. Jako wielomian stopnia nieparzystego musi mieć co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Liczba wszystkich pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności nie może przekroczyć 3.

Sprawdźmy, czy wielomian $W(x)$ ma jakiś pierwiastek całkowity. Zgodnie z twierdzeniem o pierwiastkach całkowitych wystarczy przeanalizować całkowite dzielniki wyrazu wolnego 14.

Łatwo zauważymy, że

$$W(1) = 6 + 11 - 31 + 14 = 0.$$

Zgodnie z **twierdzeniem Bézouta** wielomian jest podzielny przez $x - 1$. Po wykonaniu dzielenia (np. za pomocą schematu Hornera) możemy zapisać równanie z użyciem postaci iloczynowej

$$(x - 1)(6x^2 + 17x - 14) = 0.$$

Za pomocą wyróżnika Δ szukamy miejsc zerowych trójmianu kwadratowego $6x^2 + 17x - 14$.

Po obliczeniach uzyskujemy liczby $-\frac{7}{2}$ i $\frac{2}{3}$.

Zatem wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{2}, x_3 = \frac{2}{3}.$$

Przykład 6

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 8x - 2$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian czwartego stopnia, może mieć więc co najwyżej cztery pierwiastki rzeczywiste, z uwzględnieniem ich krotności.

Analizując dzielniki wyrazu wolnego (czyli liczby $\pm 1, \pm 2$) możemy zauważyć, że wielomian nie ma pierwiastków całkowitych.

Korzystając z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych, możemy szukać pierwiastków wielomianu wśród liczb $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

$W\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8} - 7 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 0$, czyli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - \frac{1}{2}$. Możemy to dzielenie wykonać dowolną metodą.

Szukamy więc rozwiązań równania

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^3 - 2x^2 - 8x + 4) = 0.$$

Wielomian w nawiasie możemy sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą grupowania

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2(2x - 1) - 4(2x - 1)) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x - 1)(2x^2 - 4) = 0$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x^2 - 2) = 0.$$

Po użyciu wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów mamy zapis

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0.$$

Wielomian ma zatem pierwiastek podwójny $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ oraz dwa pierwiastki jednokrotne $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

Przykład 7

Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Rozwiązanie

Jest to wielomian czwartego stopnia, może mieć więc co najwyżej cztery pierwiastki rzeczywiste, z uwzględnieniem ich krotności.

Korzystając z [twierdzenia o pierwiastkach wymiernych](#), możemy zauważyć, że jeśli wielomian ma pierwiastek wymierny, to musi to być całkowity dzielnik liczby 2.

Po sprawdzeniu wartości wielomianu dla liczb ± 1 , ± 2 wiemy, że wielomian $W(x)$ nie ma żadnych pierwiastków wymiernych.

Szukamy rozwiązań równania
$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Wiemy z twierdzenia o postaci iloczynowej wielomianu, że wielomian ten musi się dać zapisać w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Spróbujmy pogrupować wyrazy wielomianu

$$(x^4 - 2x^3 + 2x^2) + (x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$x^2(x^2 - 2x + 2) + (x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 1) = 0.$$

Zauważmy, że oba uzyskane wielomiany drugiego stopnia nie mają pierwiastków rzeczywistych, zatem wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Tych kilka przykładów pokazuje parę metod, które możemy zastosować szukając pierwiastków wielomianu. Nie ma natomiast ogólnej metody pozwalającej wyznaczyć wszystkie pierwiastki każdego wielomianu. Czasem będzie to zadanie bardzo proste, czasem nieco skomplikowane, a w wielu przypadkach niewykonalne. Ta ostatnia sytuacja nie będzie jednak dotyczyć zadań szkolnych czy maturalnych - tam wielomiany są tak dobrane, by - jeśli autor zadania polecił wyznaczyć pierwiastki wielomianu - dało się to wykonać w jakiś sposób.

Słownik

liczba pierwiastków wielomianu

- wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych z uwzględnieniem ich krotności (pierwiastki wielokrotne liczymy tyle razy, ile wynosi ich krotność)
- wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty

pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0) = 0$

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty.

twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ zapisana w postaci ułamka nieskracalnego, w którym liczby p i q są całkowite jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 , zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej

Galeria zdjęć interaktywnych

Jeżeli wielomian stopnia n ma n pierwiastków (z uwzględnieniem ich krotności), to związek między pierwiastkami wielomianu a jego współczynnikami opisują znane nam już z funkcji kwadratowej wzory Viète'a.

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, wprowadzającą zależności analogiczne do znanych ci z funkcji kwadratowej wzorów Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia.

Polecenie 2

Wykorzystując twierdzenie Bézouta i wzory Viète'a, zapisz podane wielomiany w postaci iloczynowej.

- $F(x) = x^2 + 4x - 21$
- $G(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$
- $H(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest wielomian czwartego stopnia $W(x)$, w którym współczynnik przy x^4 wynosi 1. Wiadomo, że pojedynczymi pierwiastkami wielomianu są liczby 3 i (-2) , zaś 4 jest pierwiastkiem krotności 2. Wskaż ten wielomian.

☐ $x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x - 24$

☐ $x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

☐ $x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 32x - 96$

☐ $x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

☐ $x^4 + 9x^3 - 18x^2 - 32x + 96$

☐ $x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x - 24$

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że liczba 2 jest pierwiastkiem pięciokrotnym wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych.

Kolorem zielonym zaznacz zdania prawdziwe. Kolorem czerwonym oznacz zdania fałszywe.

- ☐ $W(x)$ musi być wielomianem stopnia co najmniej piątego.
- ☐ Wyrazem wolnym wielomianu $W(x)$ musi być liczba 32.
- ☐ Wielomian $W(x)$ musi być podzielny przez wielomian $x^2 - 4x + 4$.

Ćwiczenie 3



Dany jest wielomian $W(x) = x^{11} - 2x^7 + x^3$.

Ustaw we właściwej kolejności zapis obliczeń prowadzących do wyznaczenia pierwiastków tego wielomianu.

$$x^{11} - 2x^7 + x^3 = 0$$



0 jest pierwiastkiem trzykrotnym, a (-1) i 1 to pierwiastki dwukrotne wielomianu $W(x)$.



$$x^3(x^8 - 2x^4 + 1) = 0$$



$$x^3(x^4 - 1)^2 = 0$$



$$x^3(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 1)^2 = 0$$



$$x^3(x^2 - 1)^2(x^2 + 1)^2 = 0$$



Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x) = x^6 - x^4 - 2x^3 + 2x$.

☐ $\sqrt[3]{2}$ ☐ $-\sqrt[3]{2}$ ☐ -1 ☐ $-\sqrt{3}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 0 ☐ 1

Ćwiczenie 5



Wskaż wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x) = 6x^3 - 5x^2 - 3x + 2$.

☐ $\frac{3}{2}$ ☐ 2 ☐ -2 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{2}{3}$ ☐ 1

Ćwiczenie 6



Dla każdego wielomianu wskaż jego pierwiastki rzeczywiste.

$$3x^4 + 2x^2 + 1$$

Ten wielomian nie ma
pierwiastków rzeczywistych

$$-3x^4 + 18x^3 - 9x^2 - 78x + 72$$

$$-2x^4 + 18x^2 - 8x - 24$$

$$2x^4 + 16x^3 + 34x^2 + 16x + 32$$

Ćwiczenie 7



Dane są wielomiany

- $F(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$
- $G(x) = x^4 + 3x^2 - 4$
- $H(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
- $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
- $Q(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$

Zaznacz w tabeli pierwiastki każdego wielomianu.

wielomian	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
$F(x)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$G(x)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$H(x)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$P(x)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$Q(x)$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Ćwiczenie 8



Dany jest wielomian

$$W(x) = 3x^4 - 16x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Wiadomo, że liczba 1 jest trzykrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Podaj wartości parametrów a , b i c .

- $a =$
- $b =$
- $c =$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie pierwiastków wielomianu różnymi metodami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy

Uczeń:

4. rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$
5. znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

1. znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje metody prowadzące do znalezienia wszystkich albo przynajmniej niektórych pierwiastków wielomianu.
- stosuje wzory Viète'a wiążące współczynniki wielomianu i jego pierwiastki, będące uogólnieniem znanych wzorów z funkcji kwadratowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- drzewo pomysłów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie sposoby wzorów Viète'a dla funkcji kwadratowej.

Faza wstępna:

- Uczniowie przypominają wspólnie znane im wzory Viète'a dla funkcji kwadratowej i ich zastosowania.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
- Uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4-osobowych zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania.

2. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
3. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z przykładami w galerii zdjęć iteratywnych, zwracając uwagę na zależności analogiczne do znanych z funkcji kwadratowej wzorów Viète'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne numer 4 – 8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się ...

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne numer 1 – 3 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

- Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału przed sprawdzianem.