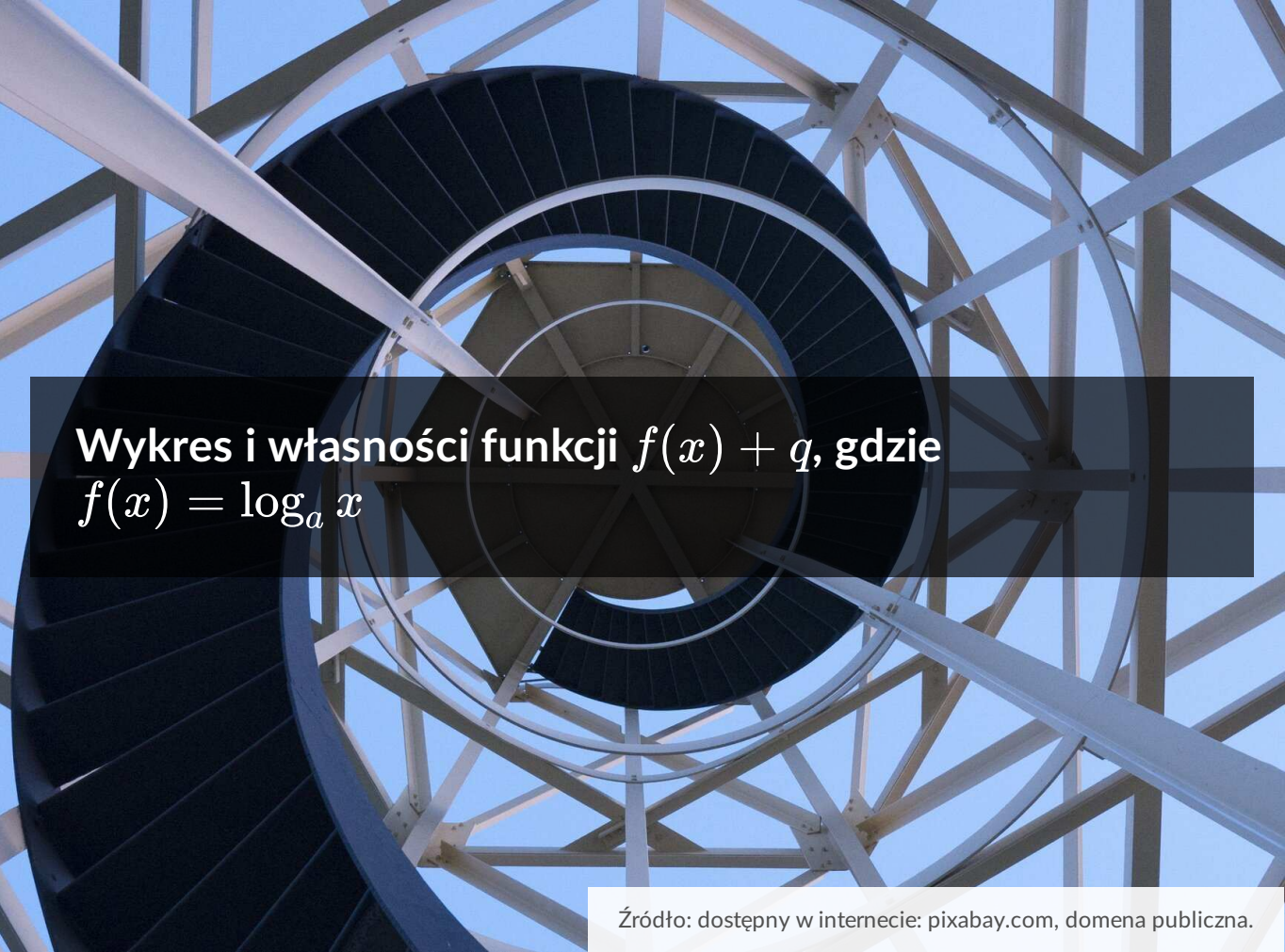




Wykres i własności funkcji $f(x) + q$, gdzie $f(x) = \log_a x$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji $f(x) + q$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wykresy funkcji można przekształcać względem różnych prostych, w tym osi układu współrzędnych. Okazuje się, że po przesunięciu wykresu funkcji logarytmicznej względem osi rzędnych, zmieniają się różne własności tej funkcji. Podczas lekcji, po zapoznaniu z częścią teoretyczną, będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na podanych przykładach.

Twoje cele

- Określisz własności wykresu funkcji logarytmicznej po przesunięciu wzdłuż osi rzędnych.
- Sprawdzisz, czy punkt o podanych współrzędnych należy do wykresu funkcji.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$.

W trakcie lekcji omówimy własności oraz będziemy szkicować wykresy funkcji logarytmicznych po przesunięciu ich w górę lub w dół wzdłuż osi rzędnych układu współrzędnych.

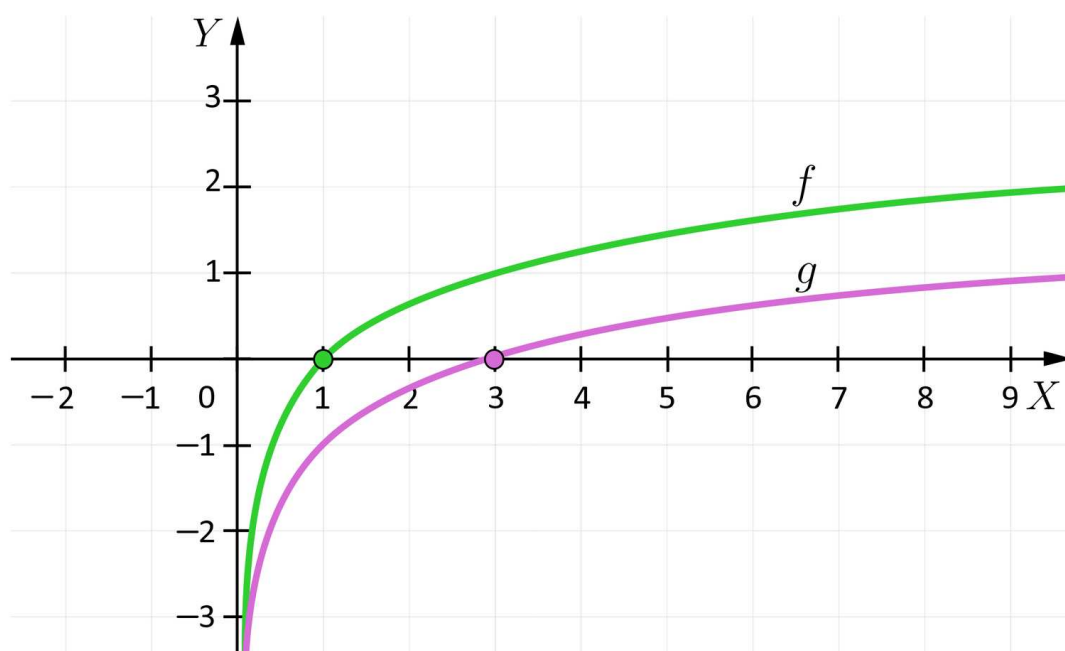
Naszkuje wykresy funkcji zadanych wzorami $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = \log_3 x - 1$.

W tym celu w tabeli przedstawimy wartości tych funkcji dla kilku argumentów.

Argumenty i Wartości Funkcji				
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-1	0	1	2

Argumenty i Wartości Funkcji				
x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$g(x)$	-2	-1	0	1

Wykresy naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych.



Zauważmy, że wykres funkcji g moglibyśmy otrzymać po przesunięciu wykresu funkcji f o 1 jednostkę w dół wzdłuż osi Y układu współrzędnych.

Korzystając z wykresów, porównamy własności funkcji f i g :

- funkcje f i g mają te same dziedziny oraz takie same zbiory wartości,
- funkcje f i g są rosnące i różnowartościowe,
- asymptotą wykresów funkcji jest prosta $x = 0$,
- miejscem zerowym funkcji f jest 1, a miejscem zerowym funkcji g jest 3,
- $f(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$, $g(x) < 0$ dla $x \in (0, 3)$,
- $f(x) > 0$ dla $x \in (1, \infty)$, $g(x) > 0$ dla $x \in (3, \infty)$.

Przy przekształceniu $f(x) + q$ wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ zmienia się miejsce zerowe funkcji oraz zbiory argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne.

Jeżeli mamy dane współrzędne punktu, który należy do wykresu funkcji logarytmicznej, to możemy znaleźć wzór, za pomocą którego ta funkcja jest określona.

Przykład 1

Wiadomo, że punkt o współrzędnych $(9, -1)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + q$.

Wyznamy wzór tej funkcji oraz wartość funkcji dla argumentu $\frac{1}{27}$.

W celu wyznaczenia wartości q rozwiążemy równanie:

$$-1 = \log_{\frac{1}{3}} 9 + q.$$

Z równania otrzymujemy, że $q = 1$, zatem wzór funkcji jest postaci $f(x) = \log_3 x + 1$.

$$\text{Obliczamy } f\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3 \frac{1}{27} + 1 = -3 + 1 = -2.$$

Przykład 2

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$. Niech $g(x) = f(x) + 3$. Obliczmy wartości funkcji g dla argumentów: $\frac{1}{25}$, 5, 25, $5\sqrt{5}$.

Zauważmy, że funkcja g wyraża się wzorem $g(x) = \log_{\sqrt{5}} x + 3$, zatem:

$$g\left(\frac{1}{25}\right) = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25} + 3 = -4 + 3 = -1$$

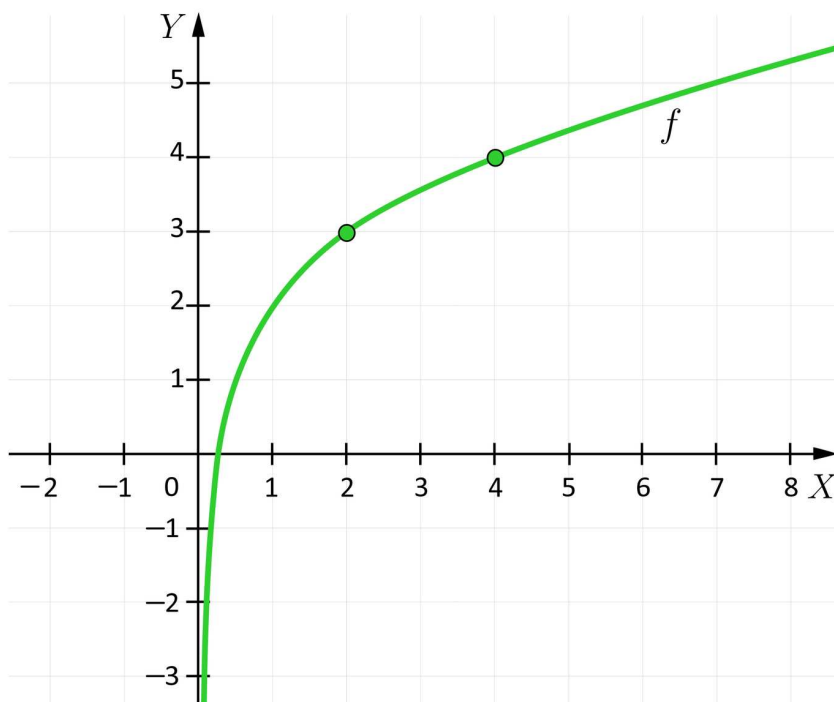
$$g(5) = \log_{\sqrt{5}} 5 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$g(25) = \log_{\sqrt{5}} 25 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(5\sqrt{5}) = \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} + 3 = 3 + 3 = 6.$$

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_a x + q$. Wyznamy wzór tej funkcji.



Z rysunku możemy odczytać, że należą do niego punkty o współrzędnych: $(2, 3)$ i $(4, 4)$.

Po podstawieniu współrzędnych tych punktów do wzoru funkcji, mamy równania:

$$4 = \log_a 4 + q \text{ oraz } 3 = \log_a 2 + q.$$

Równania przekształcamy do postaci $a^{4-q} = 4$ oraz $a^{3-q} = 2$.

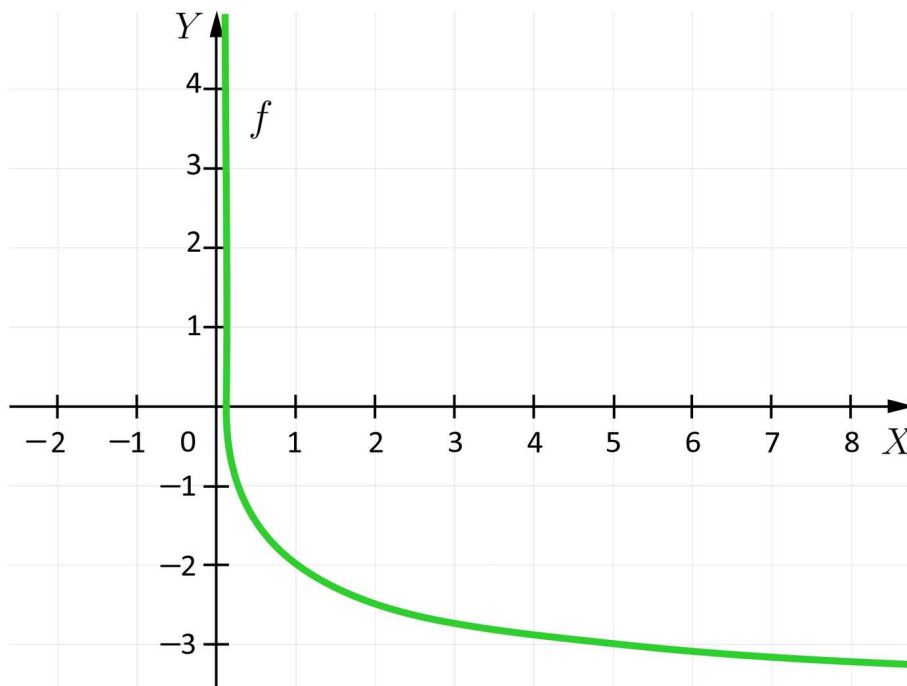
Po podzieleniu tych równań stronami mamy, że $a = 2$, zatem $2^{4-q} = 4$, czyli $q = 2$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = \log_2 x + 2$.

Mając dany wykres funkcji logarytmicznej po przesunięciu wzdłuż osi rzędnych, możemy odczytać różne własności tej funkcji.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x - 2$.



Wyznaczymy:

- a) miejsce zerowe tej funkcji,
- b) argument dla którego funkcja przyjmuje wartość -2 ,
- c) wartość funkcji dla argumentu 25 .

Rozwiązania:

- a) w celu wyznaczenia miejsca zerowego rozwiążemy równanie:

$$0 = \log_{\frac{1}{5}} x - 2, \text{ zatem } x = \frac{1}{25}$$

- b) z wykresu tej funkcji możemy odczytać, że funkcja f przyjmuje wartość -2 dla argumentu 1 ,

- c) obliczamy $f(25) = \log_{\frac{1}{5}} 25 - 2 = -2 - 2 = -4$.

Ciekawostka

Jeżeli mamy naszkicować wykres funkcji będącej logarytmem iloczynu lub ilorazu, to możemy posłużyć się przesunięciem.

Przykład 5

Jak przekształcić wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log x$, aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \log\left(\frac{x}{100}\right)$?

Zauważmy, że wzór funkcji g możemy zapisać w postaci:

$$g(x) = \log\left(\frac{x}{100}\right) = \log x - \log 100 = \log x - 2$$

Zatem, żeby otrzymać wykres funkcji g należy wykres funkcji f przesunąć o 2 jednostki w dół.

Słownik

funkcja logarytmiczna

funkcja określona wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x > 0$

przekształcenie wykresu funkcji $f(x) + q$

przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ o q jednostek w górę ($q > 0$) lub o q jednostek w dół ($q < 0$)

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie zaobserwuj, jak zmienia się położenie wykresu oraz własności funkcji logarytmicznej przy przesunięciu tego wykresu w górę lub w dół wzdłuż osi Y układu współrzędnych.

Polecenie 2

Wiadomo, że do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_2 x + q$ należy punkt o współrzędnych $(\frac{1}{8}, -2)$.

a) Wyznacz wzór tej funkcji.

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

c) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od 3.

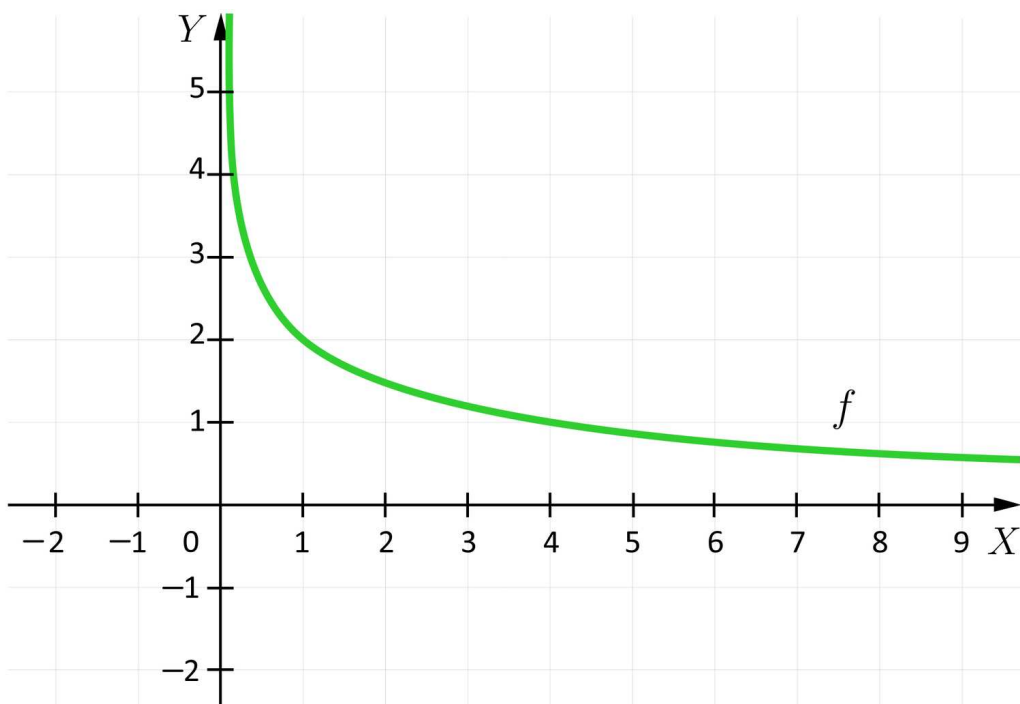
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 2$.



Uzupełnij zdania.

Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(4, \text{[input]})$.

Miejscem zerowym jest liczba .

Funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 2 dla argumentów większych od .

Ćwiczenie 2



Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3 x$ przesunięto o 2 jednostki w dół i otrzymano wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \log_3 x + q$. Wtedy:

☐ $q = 3$

☐ $q = -2$

☐ $q = 2$

Ćwiczenie 3



Przyporządkuj własności odpowiednim funkcjom.

Własności funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \log_2 x - 1:$$

dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość 1

dla argumentu 4 funkcja przyjmuje wartość 4

Własności funkcji określonej wzorem

$$f(x) = \log_2 x + 2:$$

miejscem zerowym funkcji jest liczba $\frac{1}{4}$

funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od $\frac{1}{4}$

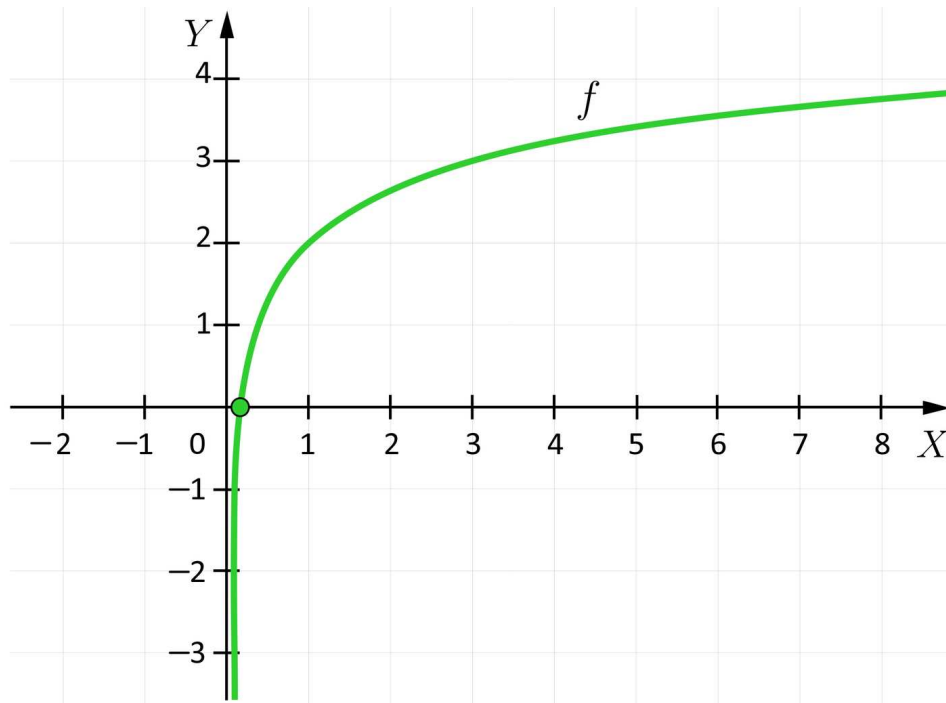
funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od 2

miejscem zerowym funkcji jest liczba 2

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3 x + 2$. Wskaż zdanie prawdziwe.



Wskaż zdanie prawdziwe.

- ☐ Dla argumentów mniejszych od 3 funkcja przyjmuje wartości większe od 3.
- ☐ Miejscem zerowym jest liczba $\frac{1}{6}$.
- ☐ Wykres możemy otrzymać poprzez przesunięcie wykresu funkcji określonej wzorem $y = \log_3 x$ o 2 jednostki w górę.

Ćwiczenie 5



Połącz wzór funkcji g z odpowiadającym mu przesunięciem wykresu funkcji f .

$$g(x) = \log_4 x + 2$$

przesunięcie wykresu funkcji
 $f(x) = \log_4 x$ o 1 jednostkę w górę

$$g(x) = \log_4 x - 1$$

przesunięcie wykresu funkcji
 $f(x) = \log_4 x$ o 1 jednostkę w dół

$$g(x) = \log_4 x + 1$$

przesunięcie wykresu funkcji
 $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w dół

$$g(x) = \log_4 x - 2$$

przesunięcie wykresu funkcji
 $f(x) = \log_4 x$ o 2 jednostki w górę

Ćwiczenie 6



Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \log_{2\sqrt{2}} x$. Niech $g(x) = f(x) - 1$. Wstaw odpowiednie wartości funkcji g .

$$\begin{aligned} g(2) &= \boxed{} \\ g(1) &= \boxed{} \\ g(8) &= \boxed{} \end{aligned}$$

0

$-\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

3

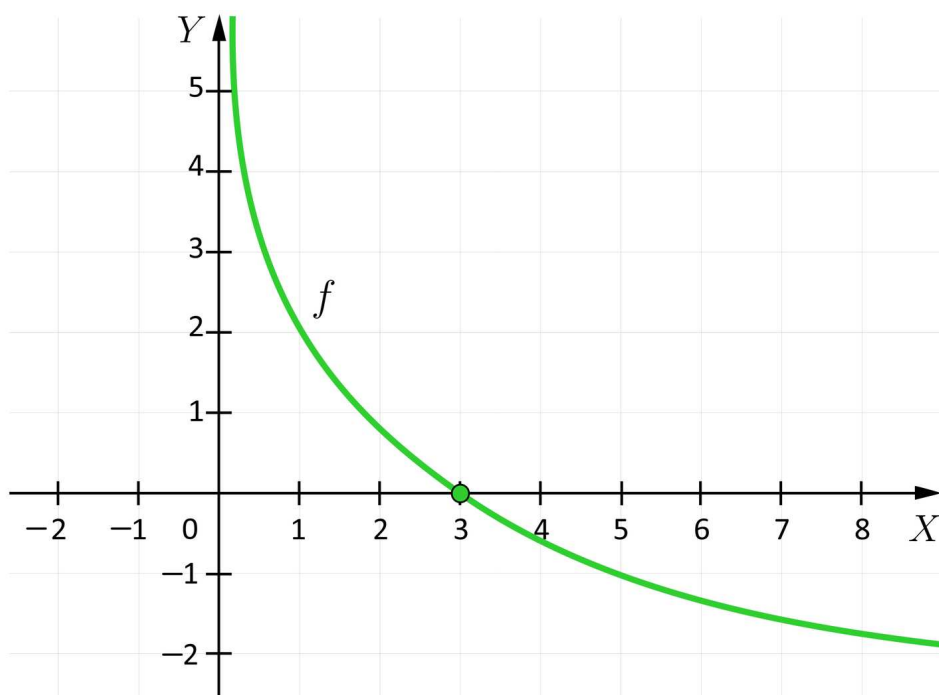
-1

1

Ćwiczenie 7



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x + 2$.



Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Funkcja przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów mniejszych od 3.

☐ Dla argumentu 9 funkcja przyjmuje wartość -2 .

☐ Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 1)$.

☐ Do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(1, 2)$.

Ćwiczenie 8



Dla funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_4 x - 1$ wyznacz:

a) miejsce zerowe,

b) argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od -1 .

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji $f(x) + q$, gdzie $f(x) = \log_a x$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odkrywa własności wykresu funkcji logarytmicznej po przesunięciu wzdłuż osi rzędnych układu współrzędnych;
- sprawdza, czy punkt o podanych współrzędnych należy do wykresu funkcji logarytmicznej;
- łączy wzór funkcji logarytmicznej z własnościami jej wykresu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa kierowana;

- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wykres i własności funkcji $f(x) + q$, gdzie $f(x) = \log_a x$ ”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wykres i własności funkcji $f(x) + q$, gdzie $f(x) = \log_a x$ ” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

- Uczniowie w parach przygotowują po 3 zadania z rozwiązaniami do przerobionego materiału. Na kolejnej lekcji przedstawiają swoje pomysły.

Materiały pomocnicze:

[Wykresy funkcji specjalnych i ich własności](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał z części „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie mogą zapoznać się z jego treścią i przygotować do pracy na zajęciach tak, żeby samodzielnie rozwiązywać zadania. W tym celu powinni przypomnieć wiadomości na temat przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi rzędnych oraz podstawowe własności funkcji logarytmicznej.