



Suma n początkowych wyrazów ciągu liczbowego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Suma n początkowych wyrazów ciągu liczbowego

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Na początek wierszyk Jana Brzechwy *Sum*, który zapewne pamiętasz z dzieciństwa.

« Mieszkał w Wiśle sum wąsaty,
Znakomity matematyk.
Krzyczał więc na całe skrzele:
– Do mnie, młodzi przyjaciele!
W dni powszednie i w niedziele
Na życzenie mnożę, dzielę,
Odejmuję i dodaję
I pomyłek nie uznaję!
Każdy mógł więc przyjść do suma



Sum pospolity

Źródło: Florian Dieter, dostępny w internecie:
commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

I zapytać: – jaka suma?

Zapewne domyślasz się, że tematem tego materiału będzie suma. Summa summarum – będziemy tworzyć i obliczać sumy wyrazów ciągów liczbowych.

W materiale spotkasz też symbol „sigma”, którego znajomość wykracza poza zakres podstawy programowej. Ten element materiału możesz potraktować więc jako miłe urozmaicenie.

Twoje cele

- Zapiszesz różnymi sposobami sumę częściową ciągu liczbowego.
- Obliczysz sumę wyrazów ciągu.
- Określisz wzór ogólny ciągu, na podstawie jego sumy częściowej.

Przeczytaj

Wyrazy zarówno ciągów skończonych, jak i nieskończonych, można dodawać.

Wyrazy ciągu	Suma wyrazów
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
3, 5, 7, 9, 11, ...	3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ...
-4, -1, 0, 1, 5, ...	-4 + (-1) + 0 + 1 + 5 + ...

Suma wyrazów ciągu skończonego jest liczbą (być może bardzo dużą, albo bardzo małą). Natomiast suma wyrazów nieskończonego ciągu liczbowego, może być nieskończona, ale też może być pewną liczbą.

Na przykład suma wyrazów nieskończonego ciągu (0, 27; 0, 0027; 0, 000027; ...) jest równa $\frac{27}{99}$.

$$0, 27 + 0, 0027 + 0, 000027 + \dots = \frac{27}{99}$$

W tym materiale będziemy rozpatrywać tylko sumy, których wynikiem jest liczba.

Przykład 1

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 2(n + 3)$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obliczymy sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Wyznamy najpierw wyrazy ciągu, które musimy dodać.

$$a_1 = 2 \cdot (1 + 3) = 8$$

$$a_2 = 2 \cdot (2 + 3) = 10$$

$$a_3 = 2 \cdot (3 + 3) = 12$$

$$a_4 = 2 \cdot (4 + 3) = 14$$

$$a_5 = 2 \cdot (5 + 3) = 16$$

Obliczamy sumę.

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 60$$

Przykład 2

Obliczymy sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = 2^n - n$.

Najpierw obliczymy wyrazy ciągu, które będziemy dodawać.

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 2 = 2$$

$$a_3 = 2^3 - 3 = 5$$

$$a_4 = 2^4 - 4 = 12$$

Obliczamy sumę wyznaczonych wyrazów.

$$S_4 = 1 + 2 + 5 + 12 = 20$$

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym określonym wzorem ogólnym $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

Wtedy:

$$S_1 = 1 - \text{suma składająca się z pierwszego wyrazu ciągu}$$

$$S_2 = 1 - 2 = -1 - \text{suma dwóch początkowych wyrazów ciągu}$$

$$S_3 = 1 - 2 + 3 = 2 - \text{suma trzech początkowych wyrazów ciągu}$$

$$S_4 = 1 - 2 + 3 - 4 = -2 - \text{suma czterech początkowych wyrazów ciągu}$$

...

$$S_{100} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 100 - \text{suma stu początkowych wyrazów ciągu}$$

...

Kolejne tak utworzone sumy nazywamy **sumami częściowymi ciągu**.

Definicja: Ciąg sum częściowych ciągu (a_n)

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Wówczas ciąg (S_n) o kolejnych wyrazach

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

nazwany ciągiem sum częściowych ciągu (a_n) .

Przykład 3

Obliczymy sumę częściową S_4 ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{n-2}{n}$.

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = \frac{-1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4}$$

$$S_4 = -\frac{1}{6}$$

Obliczanie sumy niewielu wyrazów ciągu nie sprawia większych problemów. Jednak wypisywanie większej ilości liczb jest kłopotliwe, szczególnie w przypadku, gdy trudno zauważyć jakąś regularność między tymi wyrazami. W takim przypadku można zastosować operator sumowania „sigma” \sum .

Na przykład sumę opisaną w Przykładzie 2 możemy zapisać w postaci:

$$\sum_{k=1}^4 (2^k - k)$$

Zapis ten oznacza, że dodajemy kolejne wyrazy ciągu określonego wzorem $a_k = 2^k - k$ od wyrazu pierwszego ($k = 1$) do wyrazu czwartego ($k = 4$) włącznie.

k – to indeks sumowania,

1 – to dolna granica sumowania,

4 – to górna granica sumowania.

Przykład 4

Zapiszemy sumę

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$$

kolejnych początkowych wyrazów ciągu (a_k) za pomocą operatora \sum .

Określamy najpierw wzór ciągu, którego wyrazy sumujemy.

$$a_k = (-1)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Dodaliśmy pięć początkowych wyrazów ciągu.

Zapisujemy sumę za pomocą operatora sumowania:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Sumę początkowych wyrazów niektórych ciągów, można wyznaczyć szybko, korzystając ze wzorów odkrytych przez siedemnastowiecznego matematyka szwajcarskiego Jakoba Bernoulli.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Przykład 5

Pokażemy prawdziwość jednego ze wzorów Bernoulliego – wykażemy, że suma n początkowych kolejnych liczb naturalnych $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jest równa

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Oznaczmy:

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

Wtedy:

$$2S_n = 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) + n + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

Grupujemy odpowiednio wyrazy.

$$2S_n = (1 + n) + [2 + (n-1)] + [3 + (n-2)] + \dots + [2 + (n-1)] + (n + 1)$$

Wyrażenie to jest sumą n jednakowych składników, z których każdy jest równy $(n + 1)$.

Zatem

$$2S_n = n(n + 1)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

c.n.w.

Przykład 6

Obliczymy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2$, korzystając ze wzoru podanego przez Bernoulliego.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = \frac{12(12+1)(2 \cdot 12+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 2 \cdot 13 \cdot 25$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650$$

Znając wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , można wyznaczyć wzór ogólny ciągu.

$$S_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = S_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow a_3 = S_3 - S_2$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

Podsumowując:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

Przykład 7

Wyznamy wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) , w którym suma n początkowych wyrazów ciągu określona jest wzorem

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Korzystamy ze wzoru

$$a_n = S_n - S_{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$

$$a_n = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Obliczmy jeszcze wyraz a_1 .

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Słownik

ciąg sum częściowych ciągu (a_n)

niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczbowym; wówczas ciąg (S_n) o kolejnych wyrazach

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

...

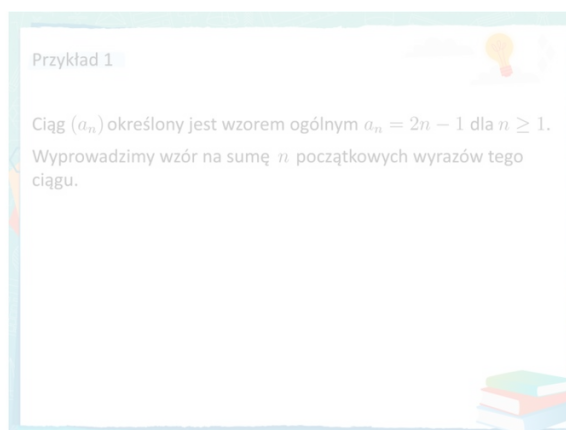
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

nazwany ciągiem sum częściowych ciągu (a_n)

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady, a następnie porównaj z rozwiązaniami.





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D13iR1CNk>

Polecenie 2

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 2n$ dla $n \geq 1$.

Wyprowadź wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Wyprowadź wzór na sumę częściową ciągu:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! + \dots$$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że liczba $K = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Suma n początkowych wyrazów ciągu liczbowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje różnymi sposobami sumę częściową ciągu liczbowego
- oblicza sumę wyrazów ciągu
- określa wzór ogólny ciągu, na podstawie jego sumy częściowej
- posługuje się analogiami, stawia hipotezy i sprawdza je
- prowadzi nieformalne dowody wyprowadzonych wniosków

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące ciągów, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z prezentacją multimedialną. Najpierw próbują samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady, a następnie porównują z przedstawionym rozwiązaniem. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4 osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji „Sprawdź się”. Grupa rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Kończącym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest samodzielne ułożenie i rozwiązanie dwóch zadań podobnych do tych, które były rozwiązywane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana na zajęciach wprowadzających wzór na sumę n – początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.