



Rozwiązywanie nierówności z funkcją sinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności z funkcją sinus

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiesz już jak rozwiązywać nierówności typu: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$ oraz $\sin x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym materiale będziemy sprowadzać trudniejsze nierówności trygonometryczne do postaci zapisanych powyżej nierówności. Przypomnimy sobie także typowe techniki rozwiązywania nierówności. Nauczysz się rozwiązywać nierówności typu: $\sin 2x > \sin 3x$.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać trudniejsze nierówności trygonometryczne.
- Przypomnisz sobie typowe techniki rozwiązywania nierówności.

Przeczytaj

Wiele złożonych nierówności daje się przekształcić do znacznie prostszych postaci. Poniżej przedstawimy kilka typowych nierówności trygonometrycznych, które można sprowadzić do rozwiązania nierówności typu: $\sin x > a$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność: $\sin x \sin 2x > 0$.

Rozwiązanie

- **Sposób 1**

Zapiszemy równoważnie nierówność jako:

$(\sin x > 0 \text{ i } \sin 2x > 0)$ lub $(\sin x < 0 \text{ i } \sin 2x < 0)$. Rozważmy zatem przypadki.

Przypadek 1

Nierówność $\sin x > 0$ jest równoważna warunkowi:

$$x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Nierówność $\sin 2x > 0$ jest równoważna warunkowi:

$$x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem w przypadku pierwszym **rozwiązaniem nierówności** jest zbiór $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przypadek 2

Nierówność $\sin x < 0$ jest równoważna warunkowi:

$$x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Nierówność $\sin 2x < 0$ jest równoważna warunkowi:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem w przypadku drugim rozwiązaniem jest zbiór $x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

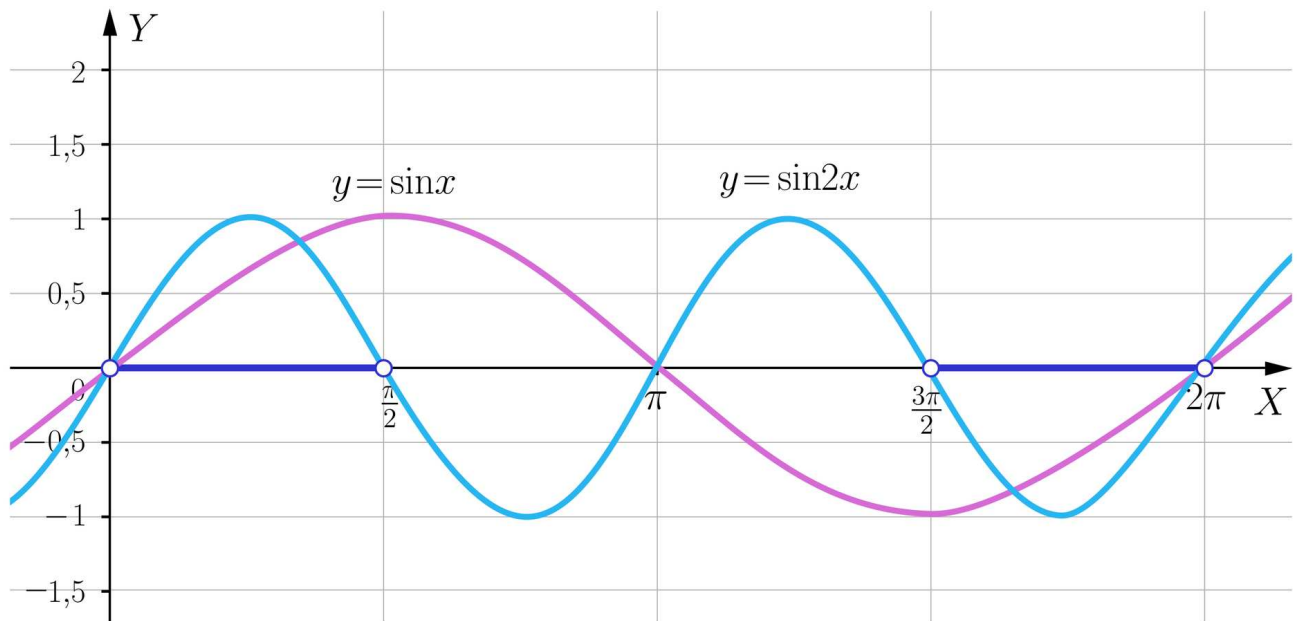
Biorąc pod uwagę obydwa przypadki, odpowiedź do zadania jest następująca:

$x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$ lub $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

• Sposób 2

Rysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji $y = \sin x$ i $y = \sin 2x$ oraz odczytujemy w jakich przedziałach te funkcje mają ten sam znak.

Zwróćmy uwagę na to, że wspólnym okresem tych funkcji jest liczba $t = 2\pi$, a więc możemy rozważyć rozwiązania tylko w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, a potem uogólnić rozwiązanie.



Odczytując zaznaczone przedziały, otrzymujemy rozwiązanie: $x \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$ lub $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność: $\sin x |\sin x| \leq \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli $\sin x < 0$, to nierówność z zadania jest spełniona, gdyż lewa strona nierówności jest ujemna, a prawa strona jest dodatnia. Zatem nierówność jest spełniona dla $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $\sin x \geq 0$, to nierówność z zadania przyjmuje postać: $\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$. Ponieważ $\sin x \geq 0$, zatem otrzymujemy w tym przypadku nierówność: $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta nierówność jest spełniona dla $x \in \left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Po uwzględnieniu obydwu przypadków otrzymujemy odpowiedź:

$$x \in \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $|4 \sin x - 1| < 1$.

Rozwiązanie

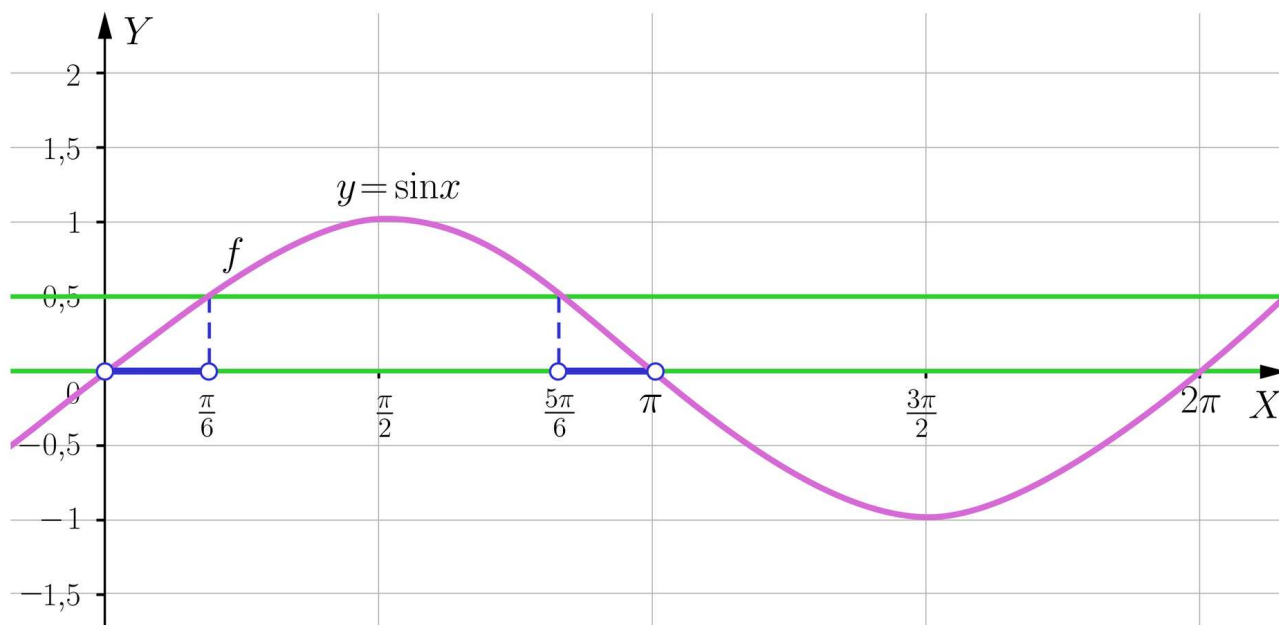
Zapiszmy nierówność w postaci:

$$-1 < 4 \sin x - 1 < 1$$

$$0 < 4 \sin x < 2$$

$$0 < \sin x < \frac{1}{2}$$

Rysujemy wykres funkcji $y = \sin x$, następnie zaznaczamy proste o równaniach: $y = 0$ i $y = \frac{1}{2}$ i odczytujemy, dla jakich argumentów fragmenty wykresu funkcji $y = \sin x$ znajdują się między tymi prostymi.



Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 4

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

$$\sin x < 9x^2 - 6x + 2.$$

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia zapiszmy nierówność w postaci:

$$\sin x < (3x - 1)^2 + 1.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności:

$1 \leq (3x - 1)^2 + 1$ oraz $\sin x \leq 1$. Stąd otrzymujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność: $\sin x \leq (3x - 1)^2 + 1$.

Pozostaje udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi warunek:

$$\sin x \neq (3x - 1)^2 + 1.$$

Zauważmy, że funkcja $y = (3x - 1)^2 + 1$ przyjmuje wartość 1 tylko dla argumentu $x = \frac{1}{3}$, ale funkcja $y = \sin x$ przyjmuje dla tego argumentu wartość mniejszą od 1.

Zatem dowiedliśmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

$$\sin x < 9x^2 - 6x + 2.$$

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność: $(2 \sin x - 1)(4 \sin^2 x - 3) < 0$.

Rozwiązanie

Nierówność można rozwiązać rozważając przypadki: $(2 \sin x - 1 > 0$ i $4 \sin^2 x - 3 < 0)$ lub $(2 \sin x - 1 < 0$ i $4 \sin^2 x - 3 > 0)$.

Ale wybierzemy inną metodę: metodę podstawienia.

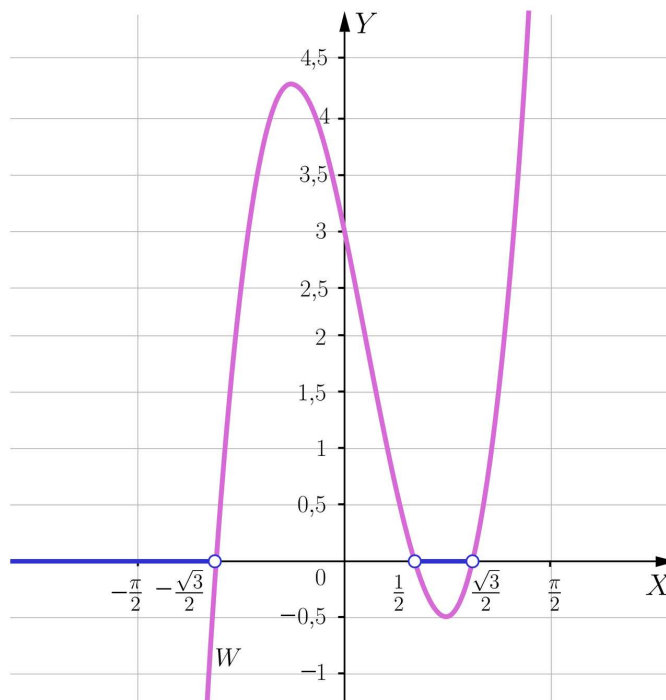
Podstawmy: $t = \sin x$.

Otrzymujemy nierówność wielomianową: $(2t - 1)(4t^2 - 3) < 0$,

$$(2t - 1)(2t - \sqrt{3})(2t + \sqrt{3}) < 0.$$

Pierwiastkami wielomianu $W(t) = (2t - 1)(2t - \sqrt{3})(2t + \sqrt{3})$ są: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rysujemy wykres wielomianu i rozwiązujemy nierówność.



Rozwiązaniem nierówności $(2t - 1)(2t - \sqrt{3})(2t + \sqrt{3}) < 0$ jest zbiór $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Zatem wróćmy do zmiennej x . Otrzymujemy nierówności:

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Słownik

rozwiązanie nierówności

zbiór wszystkich elementów dziedziny nierówności, które spełniają tę nierówność.

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie na jej podstawie wykonaj kolejne polecenie.

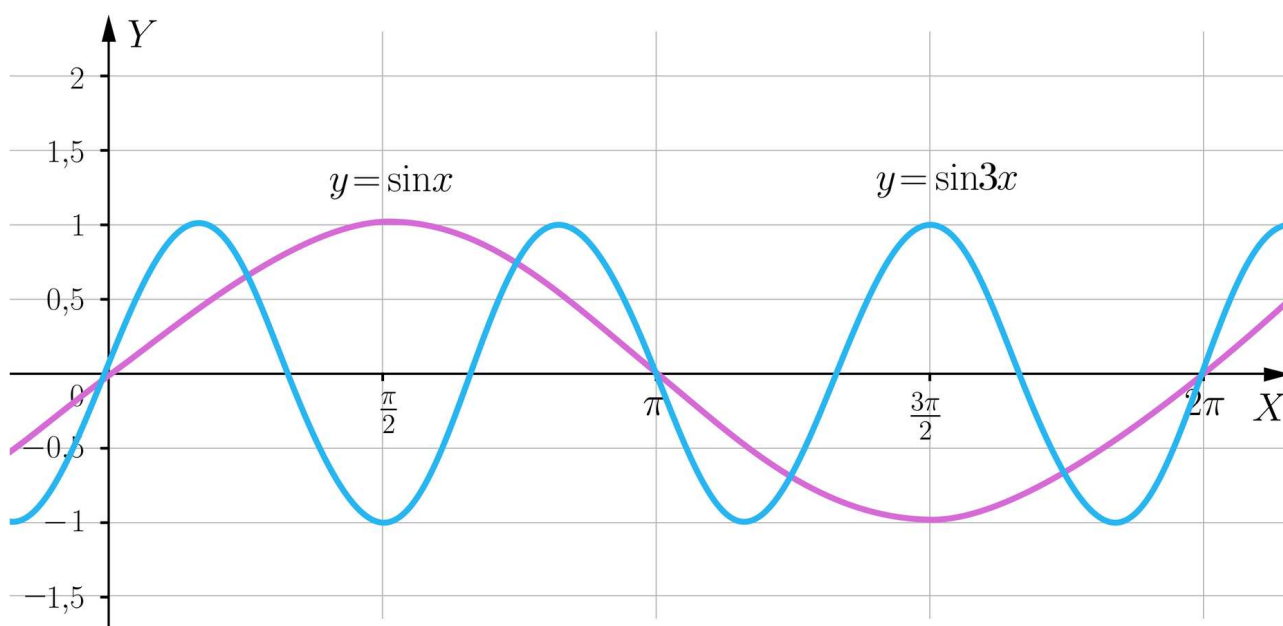
Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgGyc7jPF>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej rozwiązywania nierówności z funkcją sinus.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność: $\sin x \leq \sin 3x$. Wykorzystaj narysowany wykres.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie elementy spełniające nierówność: $\sin x \sin 3x < 0$.

☐ $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Wskaż wszystkie elementy spełniające nierówność: $\sin x \mid \sin x \mid > \frac{1}{2}$.

☐ $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówności, które mają to samo rozwiązanie.

$$|\sin x - \frac{1}{2}| > \frac{2}{3}$$

$$-1 < \sin x$$

$$|2 \sin x - 1| < 3$$

$$\sin x < -\frac{1}{6}$$

$$|3 \sin x + 1| < \frac{1}{2}$$

$$\sin x > -\frac{1}{2}$$

$$|\sin x + \frac{3}{4}| > \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2} < \sin x < -\frac{1}{6}$$

Ćwiczenie 4



Wstaw odpowiedni zbiór w puste pole.

Rozwiązaniem nierówności $2 \sin^2 x - \sin x > 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest zbiór: .

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup (\pi, 2\pi)$$

$$\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$$

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup (\pi, 2\pi)$$

Ćwiczenie 5



Wskaż nierówności, której rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.

☐ $\sin x \geq -x^2 + \pi x - \frac{\pi^2}{4} + 1$

☐ $\sin x > -x^2 + \pi x - \frac{\pi^2}{4} + 1$

☐ $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) < x^2 - 2x + 2$

☐ $2 \sin(x - 1) < 4x^2 - 4x + 3$

☐ $2 \sin(x - 1) \leq 4x^2 - 4x + 3$

☐ $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq x^2 - 2x + 2$

Ćwiczenie 6



Nierówność $6 \sin^2 x + \sin x - 1 > 0$ można równoważnie zapisać jako:

☐ $\sin x < \frac{1}{2}$ i $\sin x > -\frac{1}{3}$

☐ $\sin x < \frac{1}{3}$ lub $\sin x > \frac{1}{2}$

☐ $\sin x > -\frac{1}{2}$ lub $\sin x < \frac{1}{3}$

☐ $\sin x < -\frac{1}{2}$ lub $\sin x > \frac{1}{3}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż nierówność $\sin 2x < \sin x$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność: $4 \sin^3 x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 > 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności z funkcją sinus

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności trygonometryczne z funkcją sinus,
- analizuje wykresy funkcji w celu znalezienia rozwiązania nierówności trygonometrycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Rozwiązywanie nierówności z funkcją sinus” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z materiałem w sekcji przeczytaj. Następnie łączą się w dwie grupy. Każda z grup przygotowuje mapę myśli obrazującą metody przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”, czyta treść polecenia nr 2 – „Rozwiąż nierówność: $\sin x \leq \sin 3x$. Wykorzystaj narysowany wykres”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Rozwiązywanie nierówności z funkcją sinus”.