



## Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Równanie okręgu może występować w różnych postaciach. Jeżeli dany jest okrąg w układzie współrzędnych kartezjańskich, to jego równanie możemy zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej oraz za pomocą równania parametrycznego. W tej lekcji zaprezentujemy metody zamiany postaci ogólnej równania okręgu na postać kanoniczną i odwrotnie.

### Twoje cele

- Utrwalisz wiadomości dotyczące równania okręgu na płaszczyźnie.
- Poznasz sposoby konwersji równania okręgu w postaci kanonicznej na postać ogólną i odwrotnie.
- Rozwiążesz typowe zadania związane z tematem lekcji.

# Przeczytaj

---

W trakcie lekcji poznamy metody zamiany postaci ogólnej równania okręgu na postać kanoniczną i na odwrót.

## Już wiesz

Równanie okręgu możemy zapisać w postaci kanonicznej i ogólnej.

Postać kanoniczną równania okręgu zapisujemy za pomocą równania:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \text{ gdzie } S = (a, b) - \text{środek okręgu, } r - \text{promień okręgu.}$$

Równanie okręgu w postaci ogólnej zapiszemy natomiast następująco:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ przy czym } r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \text{ oraz } r > 0.$$

## Zamiana postaci kanonicznej równania okręgu na postać ogólną

### sposób I

Wykorzystując wzory skróconego mnożenia, równanie  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  przekształcamy do postaci:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy, że:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ .

Gdy oznaczymy wyrażenie  $a^2 + b^2 - r^2$  literą  $c$ , otrzymamy postać ogólną równania okręgu:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

### sposób II

Z [postaci kanonicznej](#) równania okręgu możemy odczytać wartości  $a$ ,  $b$  oraz  $r^2$ .

Do wyznaczenia postaci ogólnej wystarczy wykorzystać wzór  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

Mając współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  możemy zapisać postać ogólną równania okręgu.

### Przykład 1

Wyznamy równanie ogólne okręgu zadanego w postaci kanonicznej:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia mamy, że:  $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16$ .

Po uporządkowaniu otrzymujemy postać ogólną równania okręgu:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0.$$

## Przykład 2

Wyznamy postać ogólną równania okręgu zadanego w postaci kanonicznej:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Odczytujemy wartości:  $a = -1$ ,  $b = 3$  oraz  $r^2 = 9$ .

Podstawiamy do wzoru  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .

Otrzymujemy, że  $c = (-1)^2 + 3^2 - 9 = 1 + 9 - 9 = 1$ .

Wartości współczynników podstawiamy do postaci ogólnej równania okręgu i otrzymujemy, że:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot (-1)x - 2 \cdot 3y + 1 = 0.$$

Po uporządkowaniu, otrzymujemy postać ogólną równania okręgu:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0.$$

## Zamiana postaci ogólnej równania okręgu na postać kanoniczną

### sposób I

W tym przypadku skorzystamy z metody uzupełniania do kwadratu.

Do obu stron równania  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  dodamy wyrażenie  $a^2 + b^2$ .

Otrzymujemy, że  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + c = a^2 + b^2$ .

Grupujemy następnie wyrazy równania do postaci:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Skorzystamy teraz ze wzorów skróconego mnożenia. Otrzymujemy, że

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Wyrażenie  $a^2 + b^2 - c$  oznaczymy jako  $r^2$  i otrzymujemy w ten sposób postać kanoniczną równania okręgu:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

## sposób II

Z postaci ogólnej równania okręgu  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  możemy odczytać wartości współczynników  $a, b$  oraz  $c$ .

Po wykorzystaniu wzoru  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ , otrzymamy postać kanoniczną równania okręgu:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

### Przykład 3

Równanie okręgu  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$  zapiszemy w postaci kanonicznej.

Zapiszmy podane równanie jako:

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 + 4 + 25 = 29.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy, że  $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 16$ .

Wykorzystując metodę związania do kwadratu, otrzymujemy:  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$ .

### Przykład 4

Znajdziemy postać kanoniczną równania okręgu zapisanego w postaci  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ .

Z równania możemy odczytać, że  $-2a = 6$ ,  $-2b = -2$  oraz  $c = 6$ .

Zatem  $a = -3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 6$ .

Obliczamy wartość  $r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 - 6} = \sqrt{4} = 2$ .

Podstawiamy otrzymane liczby do postaci kanonicznej i otrzymujemy:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

## Słownik

**równanie okręgu w postaci kanonicznej**

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , gdzie  $S = (a, b)$  - środek okręgu,  $r$  - promień okręgu

**równanie okręgu w postaci ogólnej**

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , gdzie  $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$  i  $r > 0$

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2xqf7ChE>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zamiany postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie. Lektorem w filmiku jest Piotr Kryszkiewicz.

---

## Polecenie 2

Wykonaj polecenia.

a. Zapisz równanie okręgu  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$  w postaci ogólnej.

b. Zapisz równanie okręgu  $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$  w postaci kanonicznej.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Połącz w pary postać kanoniczną okręgu z odpowiadającą jej postacią ogólną:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 + 6y - 1 = 0$$

## Ćwiczenie 2



Po zamianie równania okręgu  $(x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 2$  na postać ogólną otrzymujemy:

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

## Ćwiczenie 3

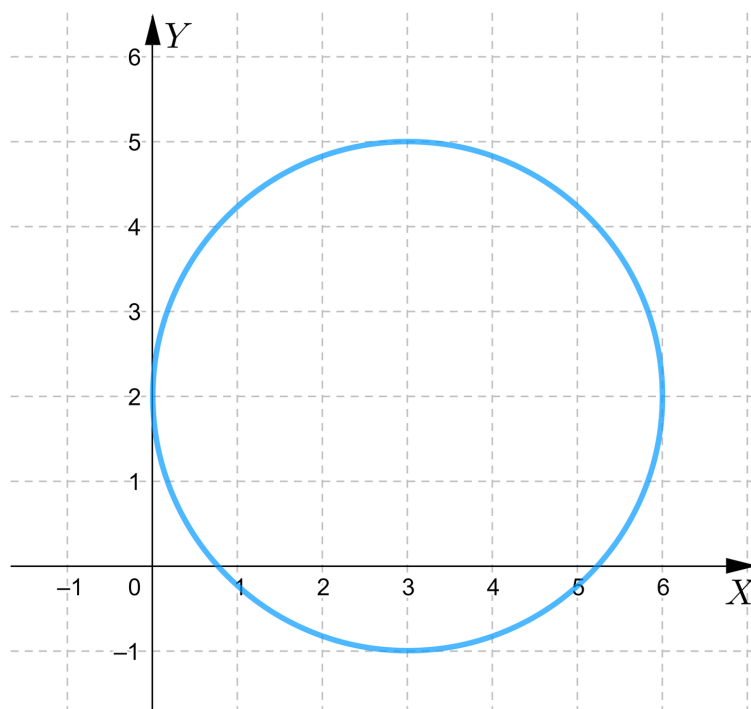


Promień okręgu  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$  ma długość , a środek ma współrzędne (, ).

## Ćwiczenie 4



Przyjrzyj się wykresowi na rysunku poniżej.



Z wykresu można odczytać, że:

środek okręgu ma współrzędne  $(3, 2)$

średnica ma długość 8

promień okręgu jest równy 3

równanie okręgu jest postaci  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$



### Ćwiczenie 5



Po zamianie równania okręgu  $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$  na postać kanoniczną otrzymujemy:

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$

### Ćwiczenie 6



Uzupełnij krzyżówkę.

1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
6.									
7.									

1. Kanoniczna lub ogólna okręgu.
2. Najdłuższa cięciwa w okręgu.
3. Nazywany brzegiem koła.
4. Jego wynikiem jest iloczyn.
5. Odcinek łączący dwa dowolne punkty na okręgu.
6. Punkt wewnątrz okręgu, równo oddalony od każdego z punktów na okręgu.
7. Zbiór wszystkich punktów.

### Ćwiczenie 7



Pogrupuj elementy zgodnie z podanym opisem:

Okręgi o środku w punkcie  $(-1, 2)$ :

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$$

Okręgi o promieniu 4:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$$

### Ćwiczenie 8



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami.

Średnica okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$  ma długość ,

a suma współrzędnych środka okręgu wynosi .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zapisuje równanie okręgu w postaci ogólnej i kanonicznej,
- opisuje sposoby zamiany równania okręgu z postaci ogólnej na postać kanoniczną,
- zamienia równanie okręgu w postaci kanonicznej na postać ogólną,
- tworzy plan rozwiązania problemu matematycznego.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;

- objaśnienie nowej wiedzy.

### **Formy pracy:**

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Film samouczek”.

#### **Faza wstępna:**

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie”.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Zadania powtórzeniowe z okręgu](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zamiana postaci kanonicznej okręgu na ogólną i odwrotnie”.