Okrąg wpisany w trójkąt

Źródło: dostępny w internecie: needpix.com, domena publiczna.

W bieżącym materiale poznamy własności okręgu wpisanego w trójkąt. Przeanalizujemy szczególne przypadki trójkąta i zastanowimy się, czy w dowolny trójkąt można wpisać okrąg. Niekiedy zamiennie będziemy używali pojęcia koła wpisanego w trójkąt (szczególnie w zadaniach dotyczących pól powierzchni). Intuicyjnie to jest takie samo zagadnienie – wówczas brzeg koła, czyli okrąg jest styczny do każdego boku.

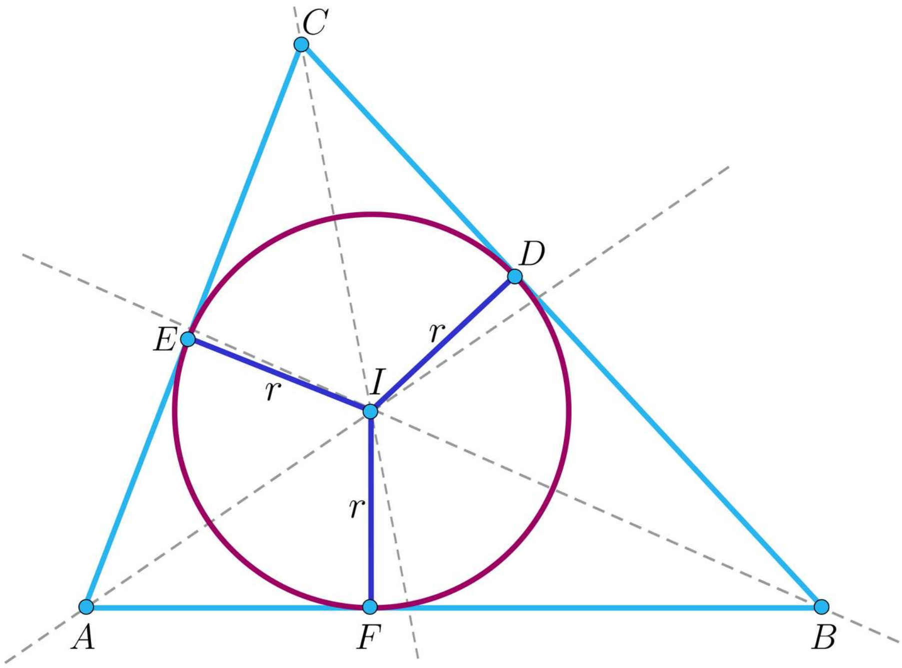
Twoje cele

- Podasz własności okręgu wpisanego w trójkąt.
- Wyznaczysz środek okręgu wpisanego w dowolny trójkąt.
- Wyznaczysz wzory na długości promieni okręgów wpisanych w trójkąty szczególne.
- Wykorzystasz własności okręgu wpisanego w trójkąt w zadaniach geometrycznych.

Przeczytaj

Definicja: okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg wpisany w trójkąt to okrąg, który jest styczny do wszystkich boków trójkąta.

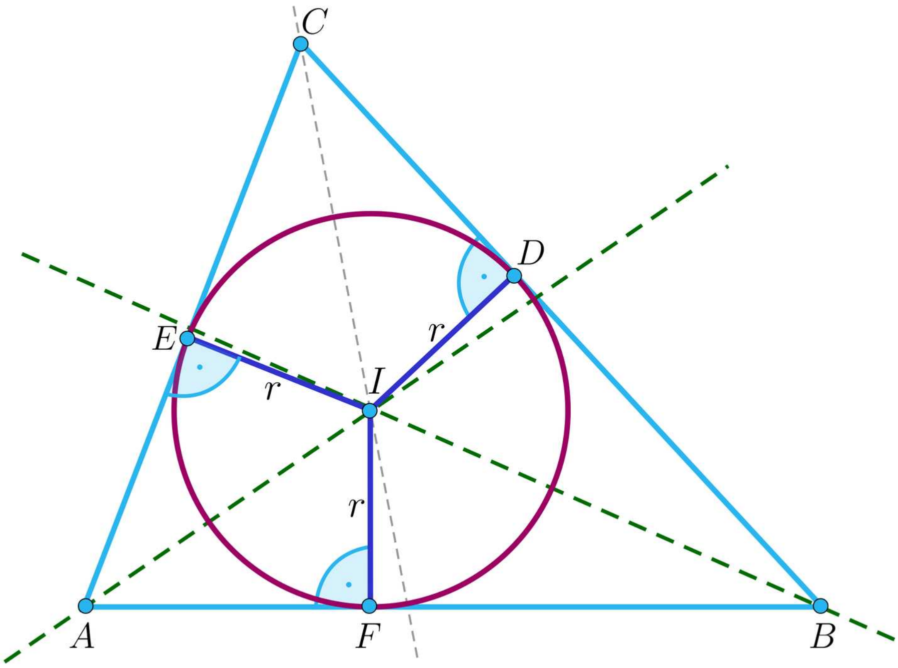


Odcinki łączące środek okręgu wpisanego z punktami styczności znajdującymi się na bokach trójkąta są do tych boków prostopadłe i są promieniami tego okręgu.

Czasem używa się także pojęcia koła wpisanego w trójkąt – jest to koło, zawarte w trójkącie i którego brzeg jest styczny do wszystkich boków wielokąta.

W każdy trójkąt można wpisać okrąg

Pokażemy, że dwusieczne kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt:

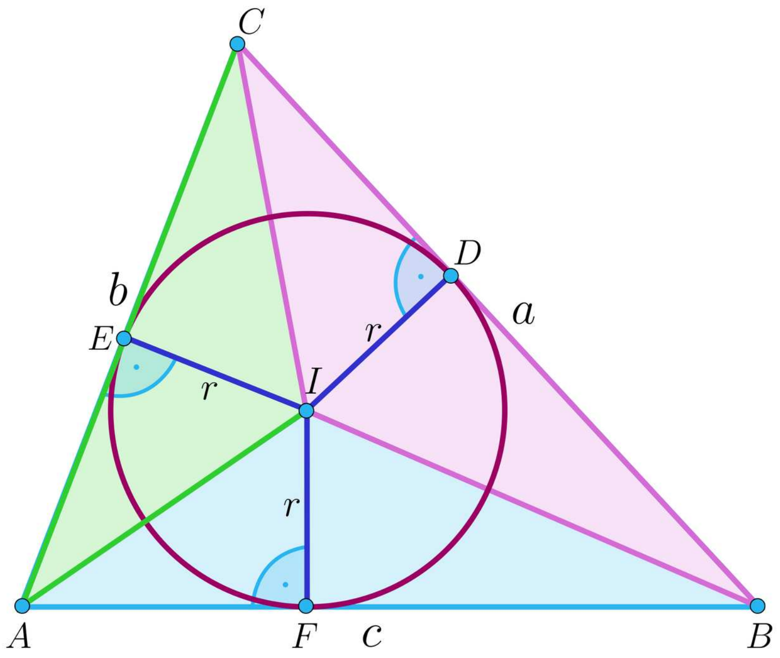


Przypomnijmy, że dwusieczna kąta jest zawarta w osi symetrii kąta, a więc jest zbiorem punktów równoodległych od ramion tego kąta.

Rozważmy punkt przecięcia dwusiecznych kątów BAC i ABC - nazwijmy go I. Ponieważ punkt I leży na dwusiecznej kąta w trójkącie BAC, to jest on równoodległy od boków AB i AC, czyli $|IF| = |IE|$. Podobnie, ponieważ leży też na dwusiecznej kąta ABC to jest on równoodległy od boków AB i BC (czyli $|IF| = |ID|$). Z równości $|IF| = |IE|$ oraz $|IF| = |ID|$ wynika, że $|IE| = |ID|$, czyli, ze punkt I jest równoodległy od ramion CA i CB, więc leży na dwusiecznej kąta ACB.

Zatem dwusieczne kątów przecinają się w punkcie I. Odcinki ID, IE, IF są równej długości, nazwijmy ją r. Odcinki te są również prostopadłe do boków, więc okrąg o środku w punkcie I i promieniu r jest styczny do każdego z boków trójkąta.

Pole trójkąta opisanego na okręgu o promieniu r



Widzimy, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trzech zaznaczonych trójkątów. Zatem:

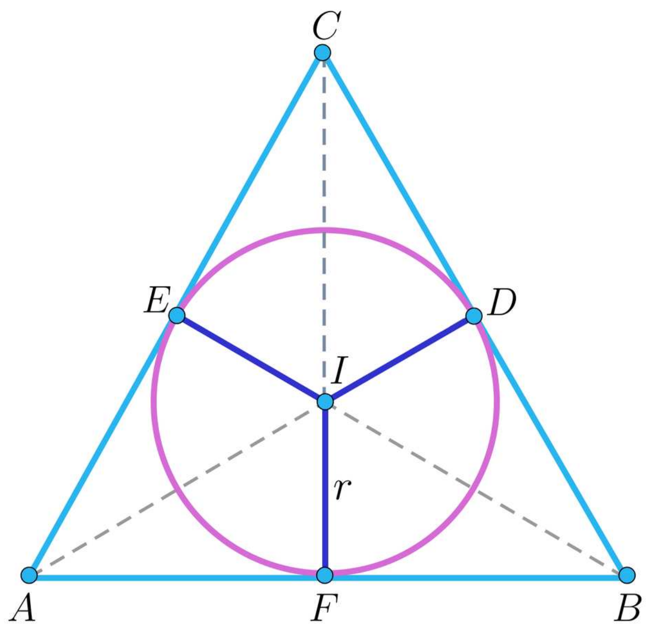
$$P = P_{\Delta ABI} + P_{\Delta BCI} + P_{\Delta CAI} = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r.$$

$P = p \cdot r$, gdzie p to połowa obwodu.

> **Ważne!**
>
> Powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnego wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r.

Szczególne przypadki trójkąta

> **Przykład 1**
>
> Wyznaczymy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku długości a.



Rozwiązanie

W trójkącie równobocznym proste zawierające dwusieczne pokrywają się z prostymi zawierającymi środkowe, więc punkt przecięcia dwusiecznych dzieli odcinki dwusiecznych w stosunku $2 : 1$ licząc od wierzchołka trójkąta.

Jednocześnie, w trójkącie równobocznym proste zawierające dwusieczne pokrywają się z prostymi zawierającymi wysokość, więc łatwo wyznaczyć ich długości.

Otrzymujemy:

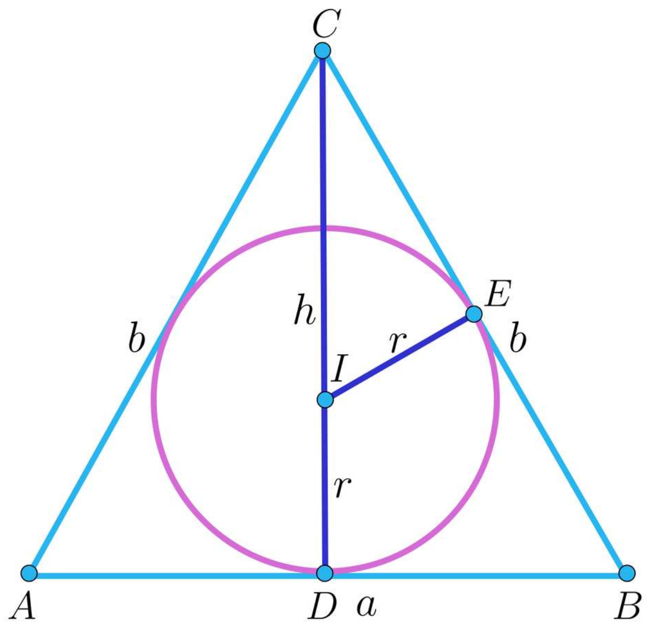
$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Przykład 2

Wyznaczymy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie długości $|AB| = a$ i ramionach długości $|BC| = |CA| = b$.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:



Z twierdzenia Pitagorasa możemy obliczyć długość wysokości trójkąta:

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$.

Mamy długości wszystkich boków i wysokości, zatem możemy obliczyć połowę obwodu i pole trójkąta, a więc i długość promienia okręgu wpisanego:

$P = pr$

$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a + 2b)r$

$r = \frac{ah}{a+2b} = \frac{a\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}}{a+2b} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2a+4b}$.

Uwaga! Gdy zauważymy, że trójkąt ICE jest podobny do „połowy” trójkąta równoramiennego ABC i zapiszemy odpowiednią proporcję boków, np.:

$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{h-r}{b}$,

to po przekształceniu również otrzymujemy

$r = \frac{ah}{a+2b}$.

Przykład 3

Wyznaczymy teraz dwoma sposobami wzór na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b.

Rozwiązanie

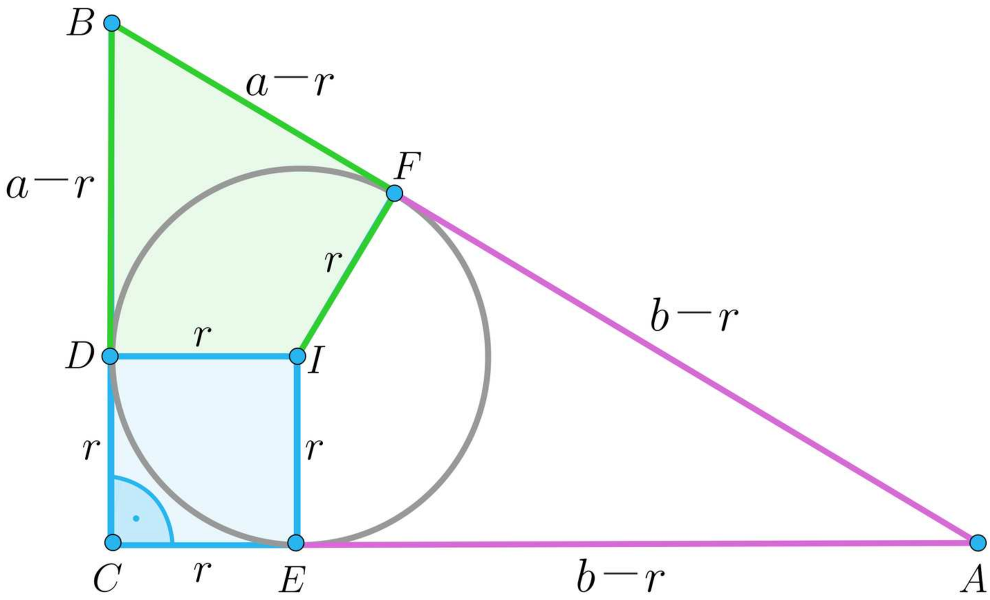
Sposób 1:

Wiemy, z twierdzenia Pitagorasa, że $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Możemy więc obliczyć pole i obwód trójkąta, czyli korzystając ze wzoru $P = p \cdot r$, otrzymujemy:

$r = \frac{P}{p} = \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ab}{a+b+c}$.

Sposób 2:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z twierdzenia o odcinkach stycznych $|CE| = |CD|$, ponadto kąt przy wierzchołku C jest prosty oraz proste IE i ID są prostopadłe do przyprostokątnych. Zatem czworokąt $CEID$ jest kwadratem o boku długości r. Podobnie, z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy $|BF| = |BD| = a - r$ oraz $|AF| = |AE| = b - r$. Wiemy, że $|AF| + |FB| = c$, zatem:

$a - r + b - r = c$

$2r = a + b - c$

$r = \frac{a+b-c}{2}$.

Sprawdzimy teraz, że wzory z pierwszego i drugiego sposobu wyznaczają tę samą wartość. W tym celu przekształcimy równoważnie równość:

$\frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+c}$

$(a + b - c)(a + b + c) = 2ab$

$(a + b)^2 - c^2 = 2ab$

$a^2 + b^2 + 2ab^2 - c^2 = 2ab$

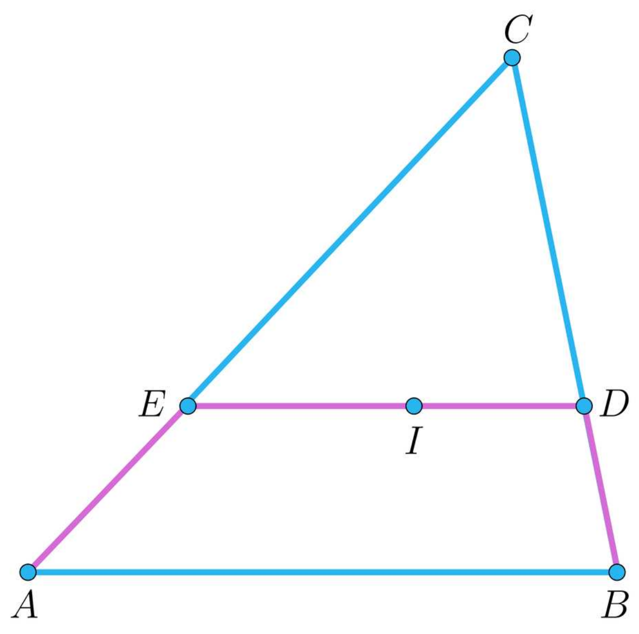
$a^2 + b^2 = c^2.$

Ostatnia równość jest oczywiście prawdziwa w przypadku trójkąta prostokątnego, więc tym samym wykazaliśmy, że wzory z pierwszego i drugiego sposobu wyznaczają tę samą wartość.

Na koniec dwa ciekawe przykłady związane z zagadnieniem okręgu wpisanego w trójkąt.

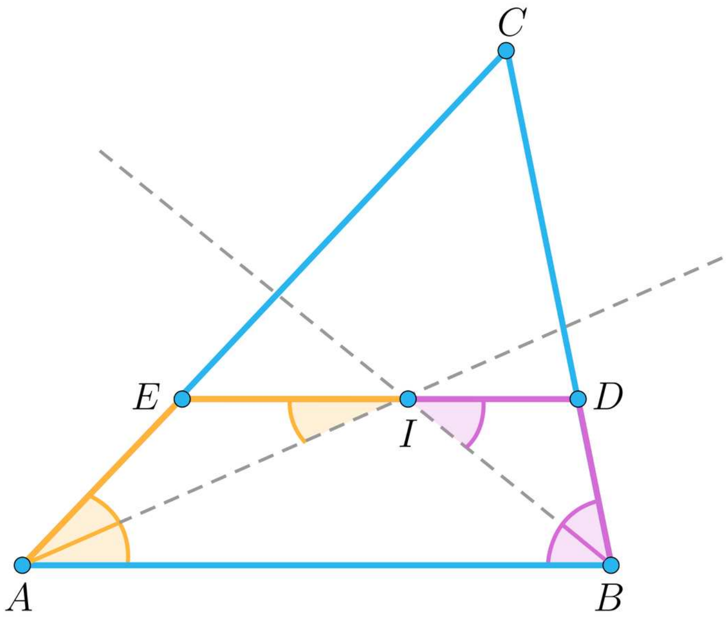
Przykład 4

Przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB, która przecina boki CA i CB odpowiednio w punktach E i D. Wykażemy, że: $|ED| = |EA| + |DB|$.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

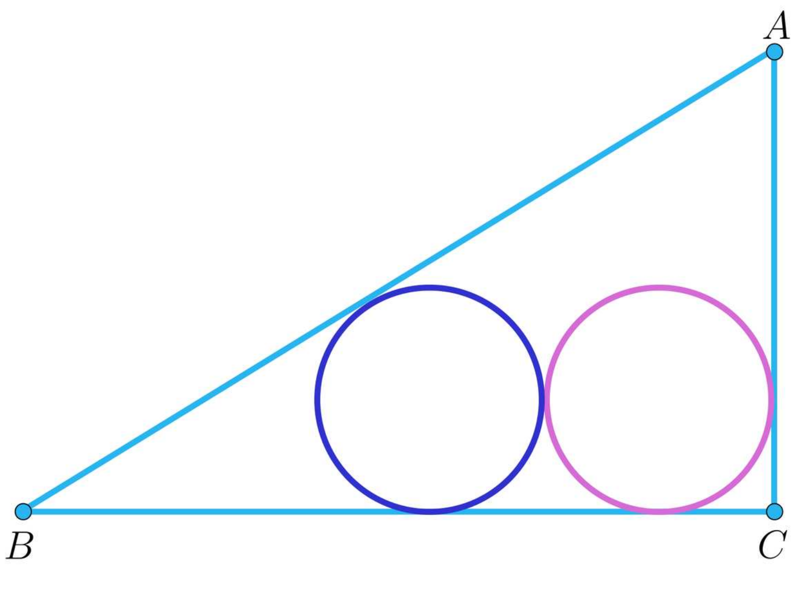


Środek okręgu wpisanego I leży w punkcie przecięcia dwusiecznych, stąd wnioskujemy równość miar kątów: $|\sphericalangle EAI| = |\sphericalangle IAB|$ oraz $|\sphericalangle DBI| = |\sphericalangle IBA|$. Wiemy, z założeń zadania, że proste ED i AB są równoległe, więc mamy też równość kątów naprzemianległych: $|\sphericalangle IAB| = |\sphericalangle AIE|$ oraz $|\sphericalangle IBA| = |\sphericalangle BID|$. Z poprzednich równości otrzymujemy równość kątów $|\sphericalangle EAI| = |\sphericalangle EIA|$ oraz$|\sphericalangle DBI| = |\sphericalangle DIB|$. Trójkąty AEI i BDI są zatem równoramienne.

$|ED| = |EI| + |ID| = |AE| + |DB|$.

Przykład 5

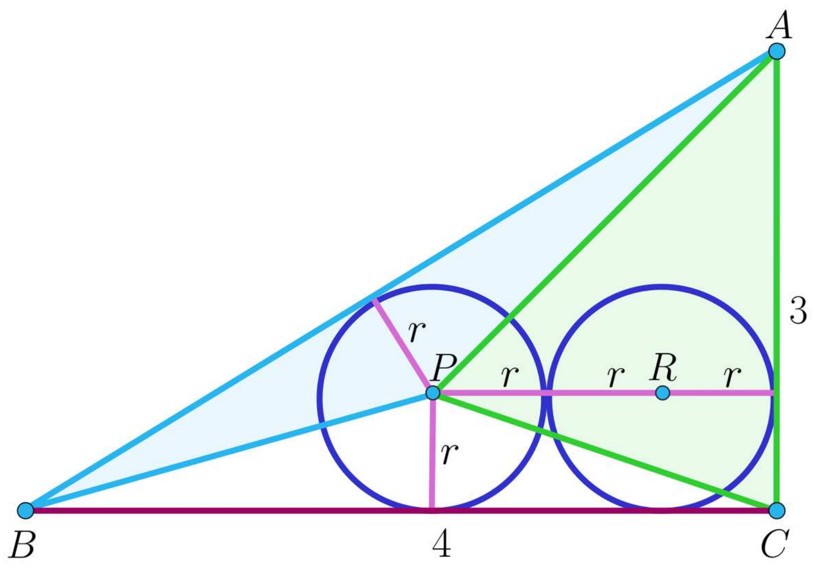
W trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych długości $|AC| = 3$ i $|BC| = 4$ wpisano dwa przystające okręgi w ten sposób, że są one wzajemnie styczne oraz jeden z nich jest styczny do boków AB i BC, a drugi do boków AC i BC.



Obliczymy długość promienia tych okręgów.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Połączmy środek P jednego z okręgów z wierzchołkami. Otrzymujemy trzy trójkąty. Suma pól tych trójkątów to pole trójkąta ABC:

$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABP} + P_{\Delta BCP} + P_{\Delta CAP}$

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3r$

$6 = \frac{5}{2}r + 2r + \frac{9}{2}r$

$6 = 9r$

$r = \frac{2}{3}$.

Słownik

trójkąt równoboczny

trójkąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość. Jest to szczególny przypadek trójkąta równoramiennego. Jest przykładem wielokąta foremnego

trójkąt równoramienny

trójkąt o (co najmniej) dwóch bokach równej długości. Te dwa boki nazywane są ramionami trójkąta, trzeci bok podstawą. Kąty przy podstawie są przystające a ich miara jest mniejsza od miary kąta prostego

trójkąt prostokątny

trójkąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest prosty. Dwa boki trójkąta wyznaczające ramiona kąta prostego nazywane są przyprostokątnymi, trzeci bok przeciwprostokątną

dwusieczna kąta

zbiór punktów płaszczyzny leżących w równej odległości od ramion kąta płaskiego

dwusieczna kąta w trójkącie

odcinek będący częścią wspólną dwusiecznej kąta trójkąta i trójkąta

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną. Przedstawiono w niej okrąg wpisany w trójkąt prostokątny. Za pomocą suwaków możesz zmieniać długości przyprostokątnych trójkąta.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D111vZGlF

Polecenie 2

Ustaw długości przyprostokątnych tak, aby były liczbami naturalnymi. Dla przyjętych wartości oblicz długość promienia okręgu wpisanego. Sprawdź swoje obliczenia za pomocą przycisku „Pokaż długość promienia r”.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

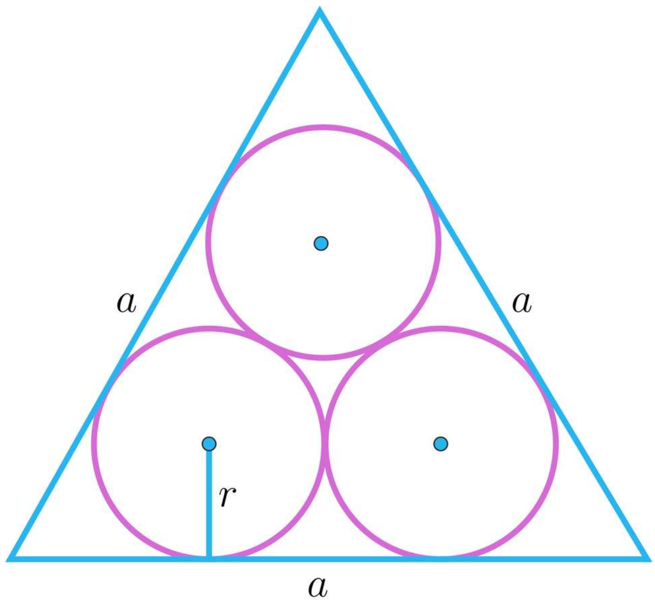
Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości obu przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

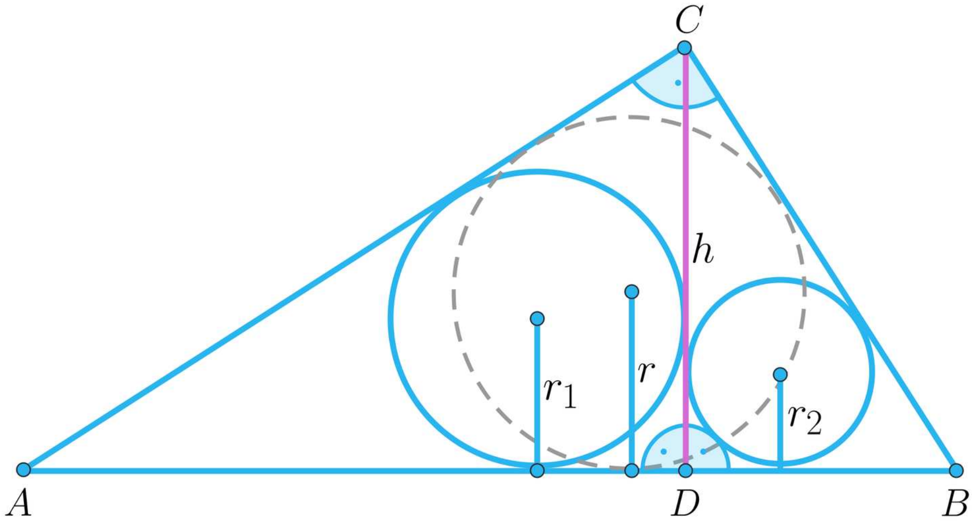
Ćwiczenie 3

W trójkąt równoboczny o boku a wpisano trzy przystające okręgi styczne zewnętrznie oraz styczne do boków trójkąta (rysunek). Wyznacz długość promienia tych okręgów.



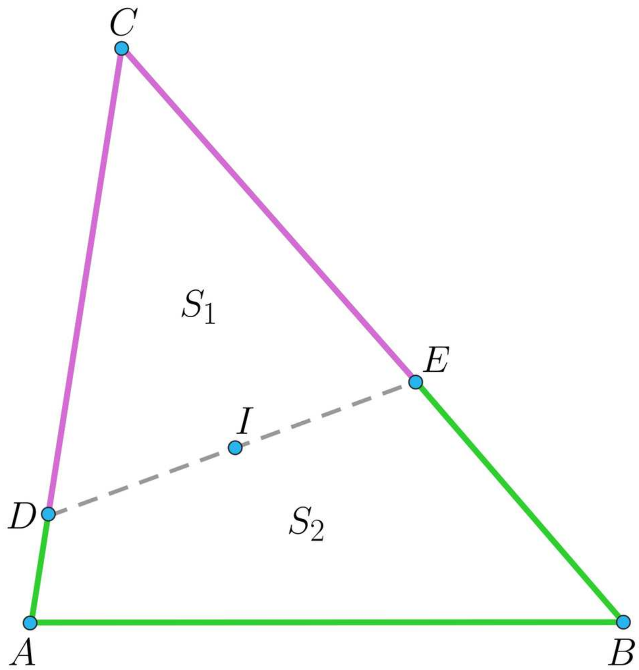
Ćwiczenie 4

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. W trójkącie tym poprowadzono wysokość CD. Wykaż że $|CD| = r + r_1 + r_2$, gdzie r, r_1, r_2 są odpowiednio długościami promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC, ADC i DBC.



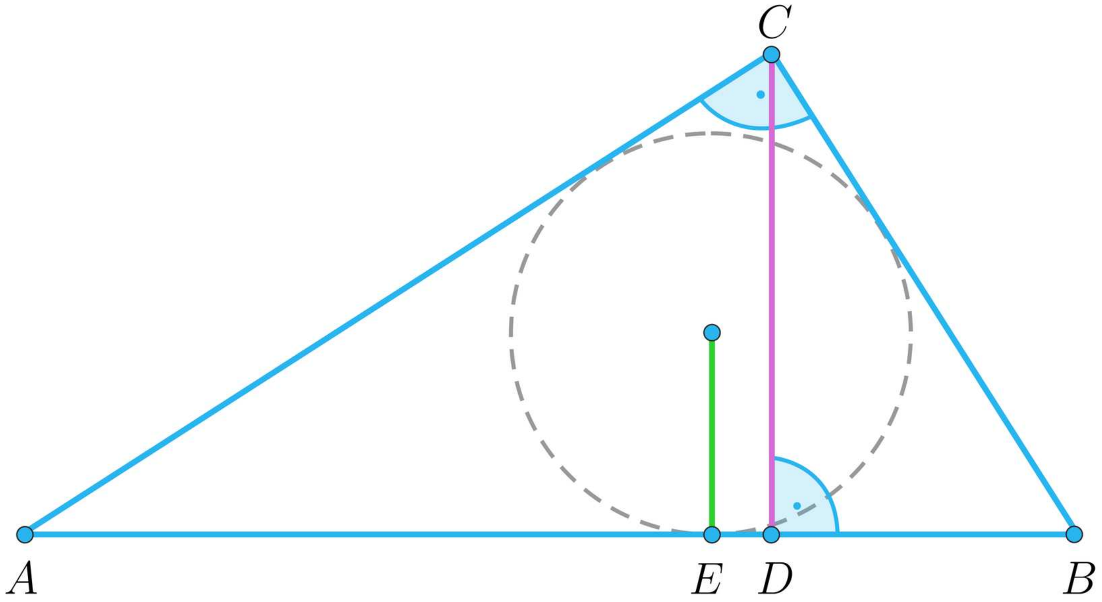
Ćwiczenie 5

Prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC przecięła boki AC i BC w punktach odpowiednio D i E. Prosta ta podzieliła obwód tego trójkąta na połowy. Przyjmijmy, że pole trójkąta DEC jest równe S_1, natomiast pole czworokąta $ABED$ jest równe S_2.



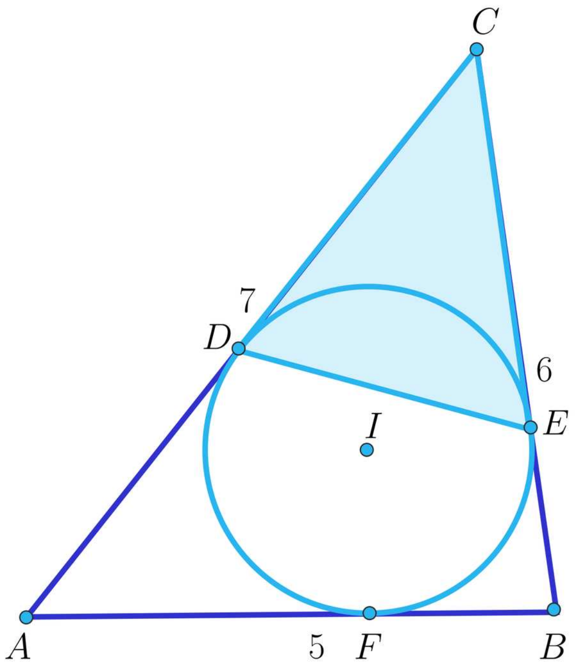
Ćwiczenie 6

W trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i wysokości CD wpisano okrąg o promieniu r (rysunek). Okrąg ten jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie E. Niech P oznacza pole trójkąta ABC.



Ćwiczenie 7

Okrąg wpisany w trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 5$, $|AC| = 7$, $|BC| = 6$, jest styczny do boków AC i BC w punktach D i E . Oblicz pole trójkąta DEC.



Ćwiczenie 8

Promień okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 5 i 8 jest równy $\sqrt{3}$, a obwód tego trójkąta jest liczbą całkowitą. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg wpisany w trójkąt

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

10. wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje własności okręgu wpisanego w trójkąt,
- wyznacza środek okręgu wpisanego w dowolny trójkąt,
- wyznacza wzory na długości promieni okręgów wpisanych w trójkąty szczególne,
- wykorzystuje własności okręgu wpisanego w trójkąt w zadaniach geometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie kiedy można wpisać w trójkąt wpisać okrąg. Prosi również o przypomnienie wzorów umożliwiających obliczenie pola trójkąta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przedstawia definicję okręgu wpisanego w trójkąt, następnie prezentując wcześniej przygotowaną grafikę tłumaczy dlaczego w każdy trójkąt można wpisać okrąg.
2. Następnie przedstawia wzór na pole trójkąta opisanego na okręgu o promieniu r.
3. Uczniowie w parach analizują przykłady w sekcji „Przeczytaj” rozważając przypadki trójkąta równobocznego, równoramiennego oraz prostokątnego.
4. Uczniowie zapoznają się z symulacją interaktywną. W zeszycie rozwiązują dwa wybrane przez siebie przypadki
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 1-3 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 4-8.

Materiały pomocnicze:

Okrąg wpisany w trójkąt

Wskazówki metodyczne:

Symulację można wykorzystać podczas lekcji do ćwiczeń pozwalających na obliczenia promienia okręgu wpisanego w trójkąt.