Iloczyn wektora przez liczbę w układzie współrzędnych

Iloczyn wektora przez liczbę w układzie współrzędnych

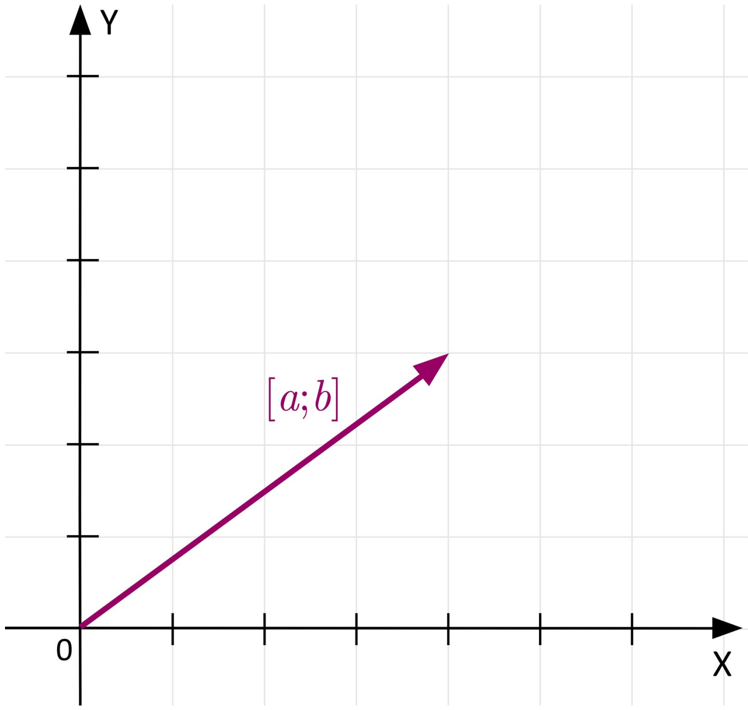
Źródło: Nick Fewings, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji omówimy zależność pomiędzy iloczynem wektora przez liczbę w zależności od współrzędnych tego wektora i tej liczby. Zastosujemy też poznaną zależność do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz współrzędne iloczynu danego wektora przez liczbę w zależności od współrzędnych tego wektora i liczby.
> - Zastosujesz zależność między współrzędnymi wektora a współrzędnymi jego iloczynu przez liczbę do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.
> - Zastosujesz zależność między współrzędnymi wektora a współrzędnymi jego iloczynu przez liczbę do rozwiązywania zadań z parametrem.

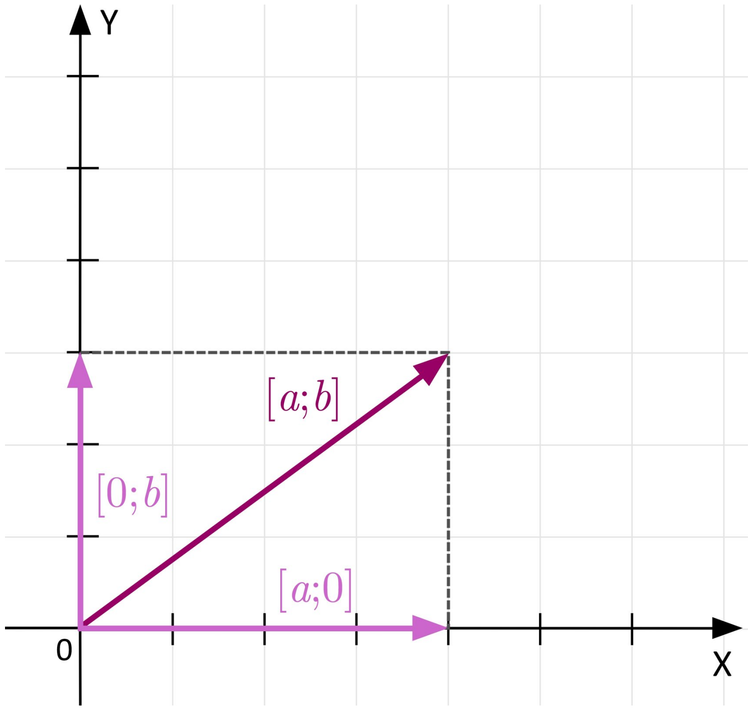
Przeczytaj

Rozważmy wektor o współrzędnych $[a; b]$ i zaczepmy go w początku prostokątnego układu współrzędnych.

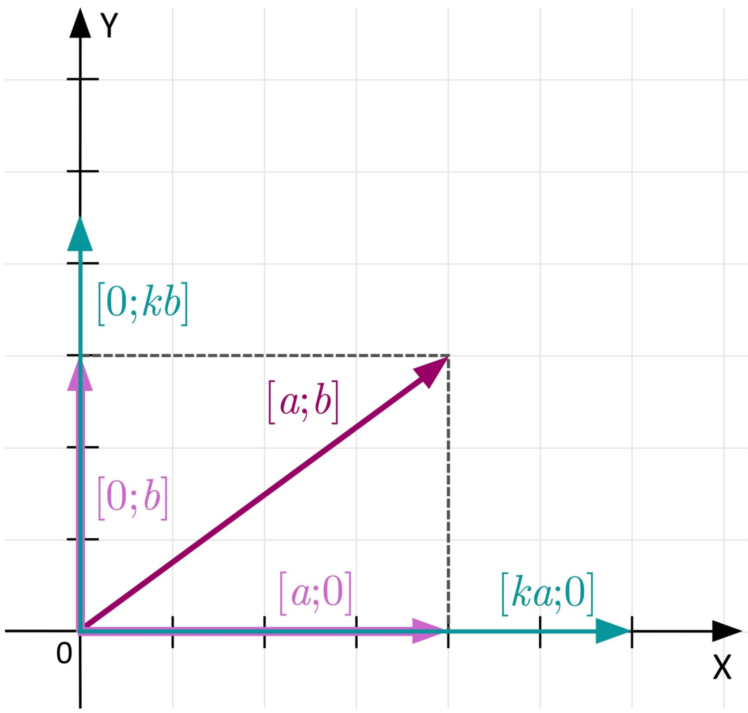


Zrzutujemy teraz wektor na osie układu współrzędnych: jego rzut na oś x ma współrzędne $[a; 0]$, zaś jego rzut na oś y ma współrzędne $[0; b]$.

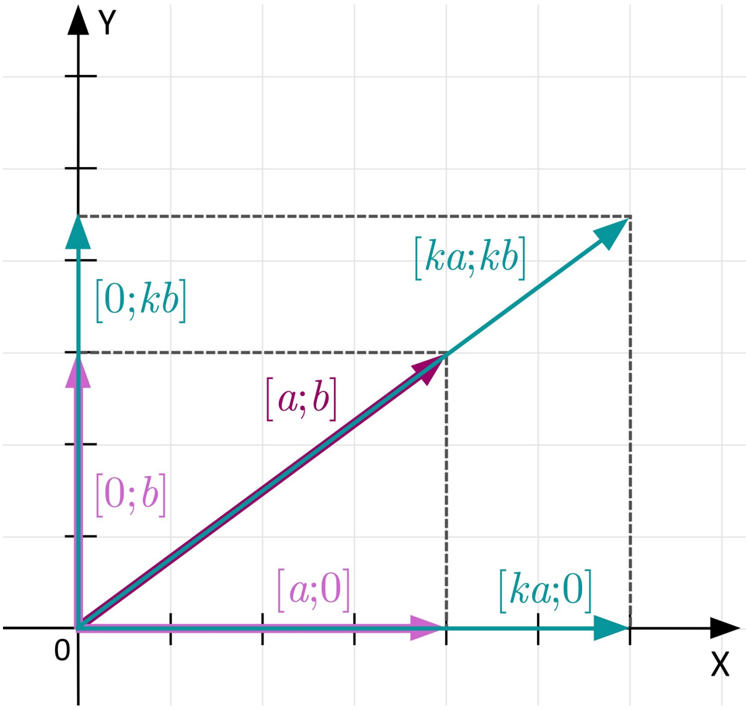
Oczywiście $[a; 0] + [0; b] = [a; b]$.



Wektor będący iloczynem wektora na osi o współrzędnych $[a; 0]$ przez liczbę k ma współrzędne $[ka; 0]$ (zgodnie z definicją), zaś wektor będący iloczynem wektora na osi o współrzędnych $[0; b]$ przez liczbę k ma współrzędne $[0; kb]$.



Zauważmy teraz, że $[ka; 0] + [0; kb] = [ka; kb]$



Powyższe rozumowanie stanowi argument za następującym faktem:

Współrzędne iloczynu wektora $\overrightarrow{u} = [a;b]$ przez liczbę rzeczywistą k są równe $k\overrightarrow{u} = k[a;b] = [ka;kb]$.

Przykład 1

Iloczyn wektora $\overrightarrow{u} = [2;-3]$ przez liczbę $k = 2$ jest wektorem o współrzędnych $2\overrightarrow{u} = 2 \cdot [2;-3] = [2 \cdot 2; 2 \cdot (-3)] = [4;-6]$.

Przypomnijmy przy tej okazji zależność między długością wektora $k\overrightarrow{u}$ a długością wektora $\overrightarrow{u}$. Zgodnie ze wzorem na długość wektora w układzie współrzędnych mamy

$$\left|k\overrightarrow{u}\right| = |[ka;kb]| = \sqrt{(k \cdot ga)^2 + (k \cdot b)^2} = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} =$$
$$= \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} = |k|\sqrt{a^2 + b^2} = |k| \cdot |[a;b]| = |k| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right|$$

co jest algebraicznym potwierdzeniem definicji przyjętej w lekcji o temacie “Iloczyn wektora przez liczbę”.

Przykład 2

Wyznaczymy punkty, które dzielą odcinek o końcach $A = (1;2)$ i $B = (5;4)$ na trzy odcinki o równych długościach.

Szukane punkty nazwijmy X i Y. Wektor $\overrightarrow{AB}$

ma współrzędne $\overrightarrow{AB} = [5-1;4-2] = [4;2]$.

Zauważmy, że wektor

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}[4; 2] = \left[\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

ma długość równą $\frac{2}{3}$ długości wektora AB, zaś wektor

$$\overrightarrow{AY} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}[4; 2] = \left[\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right]$$

ma długość równą $\frac{2}{3}$ długości wektora AB.

Aby otrzymać współrzędne punktu X, wystarczy do współrzędnych punktu $A = (1; 2)$ dodać współrzędne wektora

$$\overrightarrow{AX} = \left[\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right],$$

zatem $X = \left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Aby otrzymać współrzędne punktu Y, wystarczy do współrzędnych punktu $A = (1; 2)$ dodać współrzędne wektora

$$\overrightarrow{AY} = \left[\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right],$$

zatem $Y = \left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Słownik

współrzędne iloczynu wektora przez liczbę

współrzędne iloczynu wektora o współrzędnych $[a; b]$ przez liczbę k są równe $[ka; kb]$

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj poniższą infografikę, a następnie rozwiąż zadanie.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Udowodnij, że punkt S, który dzieli odcinek o końcach $A=(x_A;y_A)$ i $B=(x_B;y_B)$ w taki sposób, że długość odcinka BS jest dwa razy dłuższa niż długość odcinka AS o współrzędnych $\left(\frac{x_B+2x_A}{3},\frac{x_B+2y_A}{3}\right)$.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Udowodnij, że środek S wektora o początku $A=(x_A;y_A)$ i końcu $B=(x_B;y_B)$ ma współrzędne $X_S=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Ćwiczenie 9

Na odcinku o końcach $A=(1;2)$ i $B=(5;-3)$ wyznacz taki punkt X, aby długość wektora $\overrightarrow{XB}$ była cztery razy większa niż długość wektora $\overrightarrow{AX}$.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Iloczyn wektora przez liczbę w układzie współrzędnych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

- Obliczysz współrzędne iloczynu danego wektora przez liczbę w zależności od współrzędnych tego wektora i liczby.
- Zastosujesz zależność między współrzędnymi wektora a współrzędnymi jego iloczynu przez liczbę do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.
- Zastosujesz zależność między współrzędnymi wektora a współrzędnymi jego iloczynu przez liczbę do rozwiązywania zadań z parametrem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Iloczyn wektora przez liczbę w układzie współrzędnych”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Infografika”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Przeanalizuj poniższą infografikę, a następnie rozwiąż zadanie.”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne przygotowując uzasadnienia poprawnych odpowiedzi.

Materiały pomocnicze:

- Współrzędna wektora na osi liczbowej

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Iloczyn wektora przez liczbę w układzie współrzędnych”.