Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym

Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym

Źródło: Brett Jordan, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji przekonasz się, że umiejętność rozwiązywania zadań optymalizacyjnych może przydać się w wielu zagadnieniach życia codziennego. Przyjrzymy się zadaniom z kontekstem realistycznym. Będziemy maksymalizować zyski, minimalizować koszty budowy i rozwiązywać inne ciekawe zadania.

Będziemy wykorzystywać funkcje opisujące rzeczywistość a następnie badać ich pochodne i szukać miejsc zerowych oraz ekstremów lokalnych.

Twoje cele

- Wyznaczysz funkcję do sytuacji z zadania.
- Wyznaczysz pochodną funkcji.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji.
- Wyznaczysz ekstremum lokalne funkcji.
- Na podstawie wyznaczonego ekstremum lokalnego funkcji wskażesz maksimum/minimum.

Przeczytaj

Zadania optymalizacyjne z jednej strony wymagają za każdym razem indywidualnego podejścia, z drugiej mają pewien powtarzający się schemat postępowania.

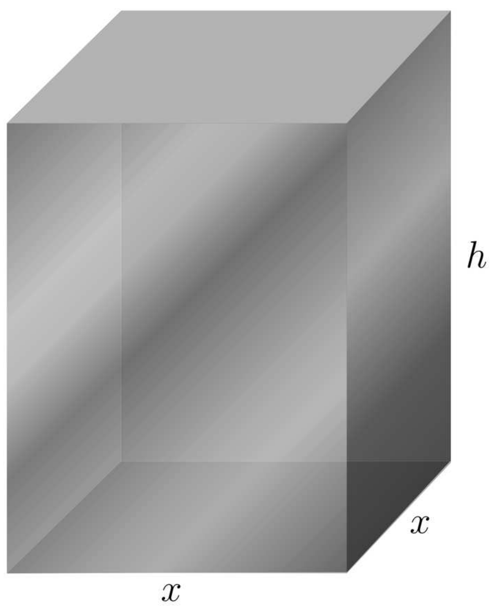
1. Uzależnienie wszystkich potrzebnych wymiarów od jednej zmiennej
2. Wyznaczenie funkcji opisującej badaną wielkość
3. Wyznaczenie dziedziny otrzymanej funkcji
4. Obliczenie pochodnej otrzymanej funkcji
5. Wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej
6. Uzasadnienie maksimum/minimum funkcji
7. Obliczenie największej/najmniejszej wartości funkcji

Przykład 1

Z blachy należy zrobić zbiornik w kształcie prostopadłościanu o objętości $90\ \mathrm{m}^3$. Spód tego zbiornika jest kwadratem. Koszt $1\ \mathrm{m}^2$ blachy na wykonanie podłogi i pokrywy wynosi 30 zł, natomiast koszt $1\ \mathrm{m}^2$ materiału na ściany boczne wynosi 40 zł. Wyznaczymy wymiary zbiornika aby koszt budowy był jak najmniejszy.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:



Objętość możemy zapisać $V = x^2 h$. Podstawiając dane oraz wyznaczając wysokość otrzymujemy

$h = \frac{90}{x^2}$

Pole powierzchni całkowitej wynosi $P_c = 2P_p + P_b$. Następnie utworzymy funkcję kosztu, z danych $K = 30 \cdot 2P_p + 40P_b$. Mamy zatem

$K = 60x^2 + 160xh$

Stąd otrzymujemy funkcję zmiennej x opisującą koszt wykonania zbiornika w zależności od długości krawędzi podstawy.

$K(x) = 60x^2 + \frac{14400}{x}$

Wyznaczymy dziedzinę, boki muszą być dodatnie

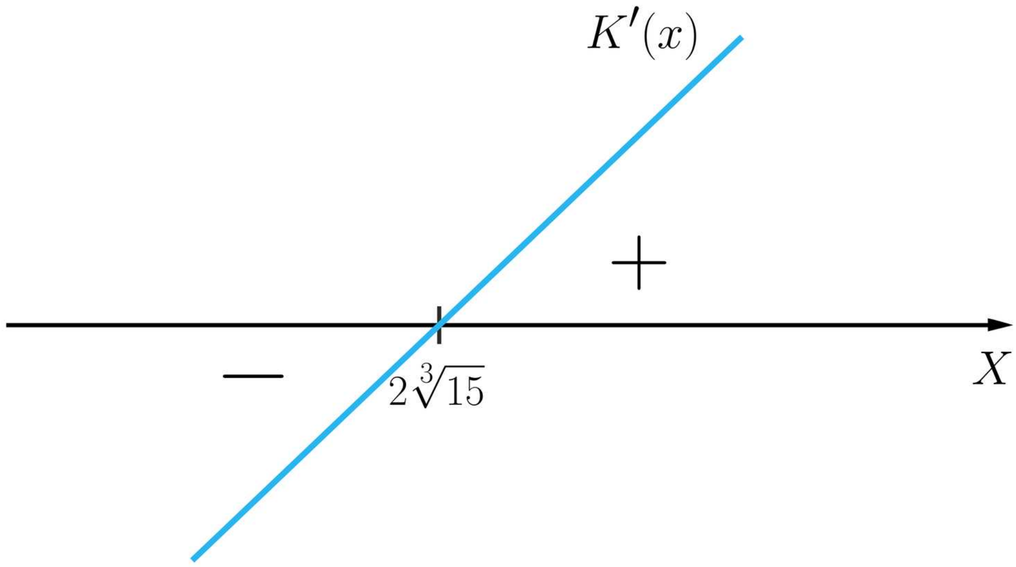
$D: x \in (0, \infty)$

Wyznaczymy pochodną

$K'(x) = 120x - \frac{14400}{x^2}$

Miejscem zerowej pochodnej jest $x = 2\sqrt[3]{15}$. Możemy zaobserwować, że należy do dziedziny

Naszkicujemy wykres pochodnej w otoczeniu miejsca zerowego



Wyznaczymy tabelę

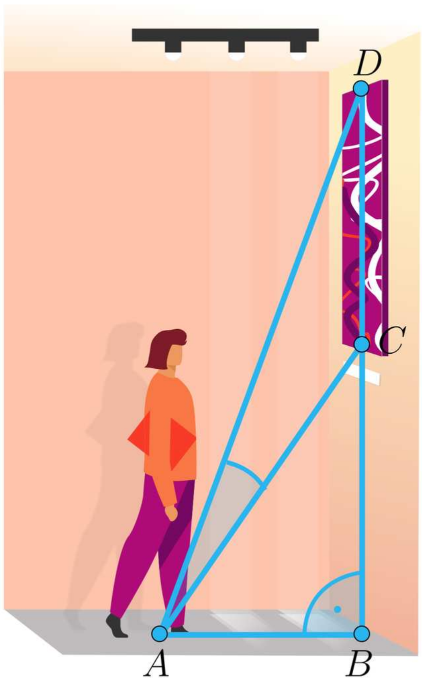
x	$\left(0, 2\sqrt[3]{15}\right)$	$2\sqrt[3]{15}$	$\left(2\sqrt[3]{15}, \infty\right)$
$K'(x)$	$-$	0	$+$
$K(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

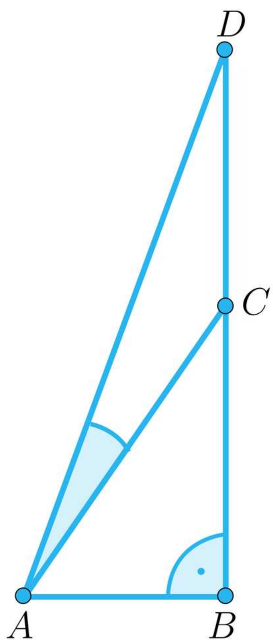
Funkcja osiąga minimum dla $x = 2\sqrt[3]{15}$. Zatem koszt wykonania zbiornika będzie najmniejszy, gdy $x = 2\sqrt[3]{15}$. Wówczas wysokość zbiornika wynosi $h = \frac{90}{4\sqrt[3]{225}} = \frac{3\sqrt[3]{15}}{2}$ m.

Wymiary zbiornika to $2\sqrt[3]{15}$ m $\times$ $2\sqrt[3]{15}$ m $\times$ $\frac{3\sqrt[3]{15}}{2}$ m.

Przykład 2

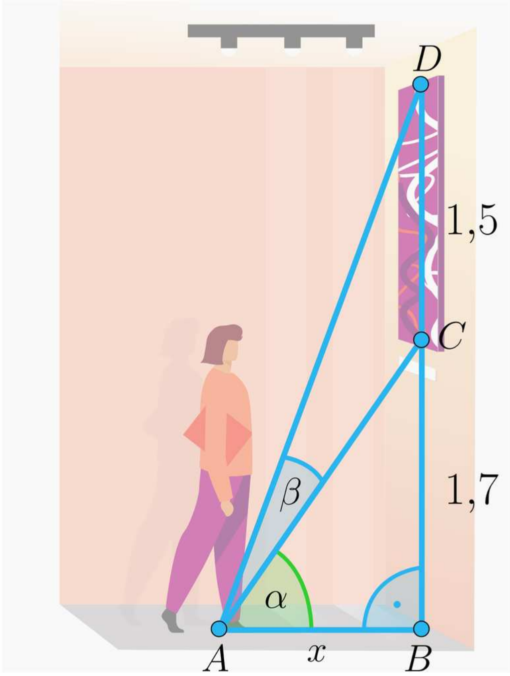
W galerii sztuki zawieszony jest obraz o wysokości $1,5$ m, tak, że jego dolny brzeg znajduje się na wysokości oczu oglądającego tj. $1,7$ m od podłogi (zobacz rysunek). Wyznaczymy w jakiej odległości oglądający powinien postawić aparat na podłodze, aby kąt widzenia obrazu był największy (pomiń wysokość aparatu).

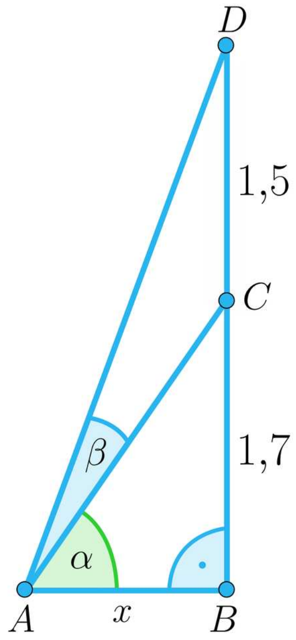




Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.





Zauważmy, że $\text{tg}\alpha = \frac{1{,}7}{x}$ oraz $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{3{,}2}{x}$.

Rozpisując wzór na tangens sumy kątów $\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$ mamy, że

$\frac{3{,}2}{x} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$, tj. $\frac{3{,}2}{x} = \frac{\frac{1{,}7}{x} + \text{tg}\beta}{1 - \frac{1{,}7}{x}\text{tg}\beta}$.

Stąd

$$\frac{3{,}2}{x} - \frac{5{,}44}{x^2}\text{tg}\,\beta = \frac{1{,}7}{x} + \text{tg}\,\beta$$

Wyznaczymy $\text{tg}\beta$

$$\text{tg}\beta = \frac{\frac{1{,}5}{x}}{1 + \frac{5{,}44}{x^2}}$$

Zauważmy, że dla kąta z przedziału $(0^\circ, 90^\circ)$ funkcja tangens jest rosnąca. Dlatego szukając maksimum lokalnego funkcji $\text{tg}\beta = \frac{\frac{1{,}5}{x}}{1 + \frac{5{,}44}{x^2}}$ możemy szukać maksimum lokalnego funkcji $f(x) = \frac{\frac{1{,}5}{x}}{1 + \frac{5{,}44}{x^2}}$

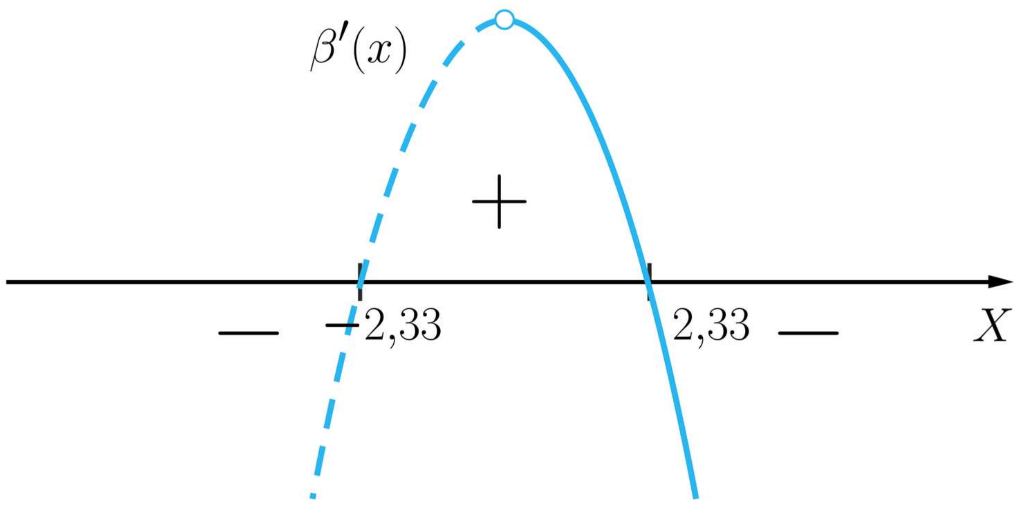
Dziedziną jest zbiór

$$D : x \in (0, \infty)$$

Wyznaczymy pochodną korzystając ze wzoru na iloraz pochodnych

$$f'(x) = \frac{1{,}5(x^2+5{,}44) - 1{,}5x(2x)}{(x^2+5{,}44)^2} = \frac{-1{,}5x^2+8{,}16}{(x^2+5{,}44)^2}$$

Aby wyznaczyć miejsce zerowej pochodnej wystarczy licznik przyrównać do zera. Miejsca zerowe zaokrąglimy do dwóch miejsc po przecinku $x_1 = -2,33$ oraz $x_2 = 2,33$. Pierwsze miejsce zerowe nie należy do dziedziny. Naszkicujemy wykres pochodnej.



Stworzymy tabelę.

x	$(0; 2,33)$	$2,33$	$(2,33; \infty)$
β'(x)	$+$	0	$-$
$\beta(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Funkcja osiąga maksimum w $x = 2,33$ m. Oglądający powinien postawić aparat w odległości $2,33$ m od ściany.

Przykład 3

W zbiorniku znajdowało się 300 litrów wody. Po odkręceniu zaworów, w ciągu pierwszej minuty do zbiornika napłynęło 15 litrów wody, a w każdej następnej minucie o 3 litry wody więcej niż w poprzedniej. Jednocześnie przez zawór odpływowy w ciągu każdej minuty wydostawało się 30 litrów wody. Wyznaczymy w jakiej minucie było w zbiorniku najmniej wody.

Rozwiązanie:

Napływanie wody do zbiornika jest ciągiem arytmetycznym oznaczmy jako a_n o pierwszym wyrazie 15 i różnicy 3. Natomiast wypływanie wody ze zbiornika jest ciągiem arytmetycznym oznaczmy go jako b_n o pierwszym wyrazie 30 i różnicy 0.

Utworzymy nowy ciąg c_n, taki, że $c_n = a_n - b_n$. Ciąg c_n jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie (-15) i różnicy 3.

Wyznaczymy sumę n początkowych wyrazów ciągu c_n. Skorzystamy ze wzoru

$S_n = \frac{2c_1+(n-1)r}{2} \cdot n$

$S_n = \frac{-30+(n-1)3}{2} n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{33}{2}n$

W zbiorniku było wcześniej 300 litrów wody. Otrzymaliśmy w ten sposób funkcję zmiennej n opisującą liczbę litrów wody w zbiorniku w czasie

$V(n) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{33}{2}n + 300$

Oczywiście badając ciągi myślimy o liczbach naturalnych. Jednak rozszerzmy dziedzinę rozważanej funkcji do wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich, tj.

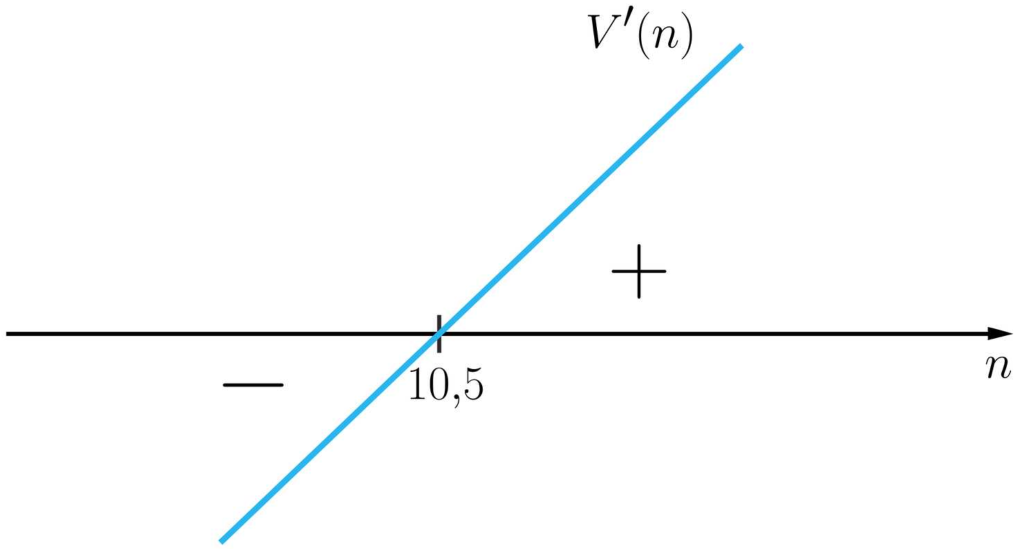
$D : n \in (0, \infty)$

Wyznaczymy pochodną

$V'(n) = 3n - \frac{33}{2}$

Miejscem zerowym pochodnej jest $n = 10,5$, oczywiście należy do dziedziny.

Naszkicujemy wykres pochodnej w otoczeniu miejsca zerowego



Wyznaczymy tabelę

n	$(0; 10,5)$	$10,5$	$(10,5; \infty)$
$V'(n)$	$-$	0	$+$
$V(n)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Funkcja osiąga minimum dla $n = 10,5$. Oznacza to, że najwięcej wody w zbiorniku mieliśmy w jedenastej minucie.

Przykład 4

Sprzedawca kupuje w hurtowni telefony komórkowe płacąc 600 zł za sztukę. Sprzedaje 40 telefonów w cenie 700 zł za sztukę. Pewnego razu zaobserwował, że obniżka ceny o każde kolejne 5 zł zwiększa o 5 liczbę sprzedanych telefonów. Wyznaczymy jaką cenę powinien ustalić sprzedawca, aby jego zysk był największy.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$5n$ – obniżka ceny o pięć złotych, n razy,

$40+5n$ – liczba sprzedanych telefonów po obniżce,

$700-5n-600=100-5n$ – zysk po obniżce.

Tworzymy funkcję zmiennej n opisującą zysk uzyskany po n-tej obniżce

$f(n)=(100-5n)(40+5n)$

Wyznaczymy dziedzinę funkcji f pamiętając, że liczba sprzedanych telefonów to liczba naturalna oraz że sprzedawca nie sprzeda telefonu za mniej niż 600zł.

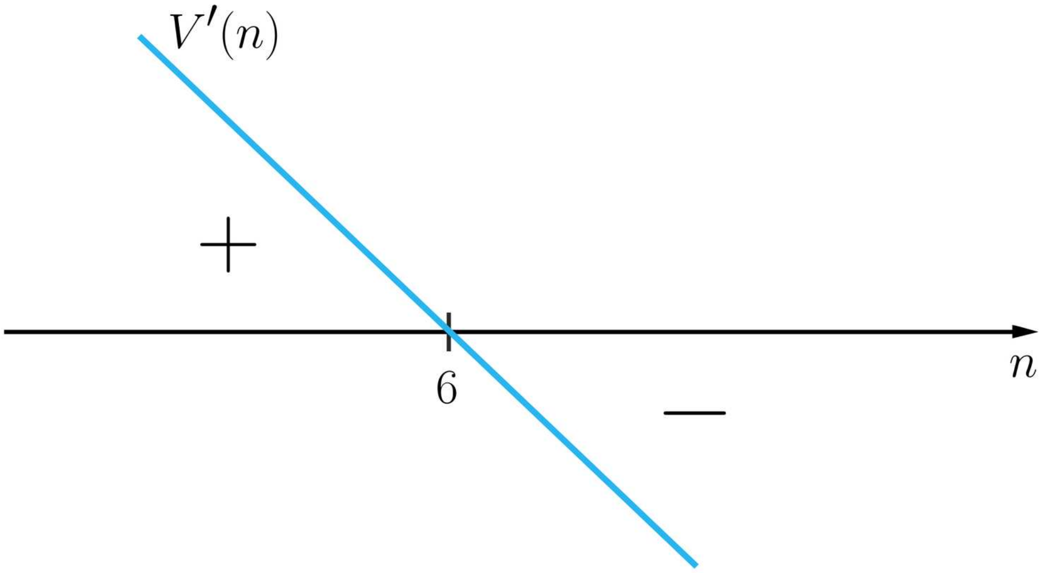
$D=\{1,2,\ldots,20\}$

Wyznaczymy pochodną korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu
$f'(n)=-5(40+5n)+5(100-5n)$

Upraszczając

$f'(n)=5(60-10n)$

Miejscem zerowym pochodnej jest $n=6$. Możemy zaobserwować, że należy do dziedziny. Naszkicujemy wykres funkcji pochodnej



Słownik

tangens sumy kątów

wyraża się wzorem

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

dla wszystkich α, β oprócz tych dla których $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$ lub $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ jest nieokreślony

pochodna iloczynu

możemy ją wyliczyć ze wzoru

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

możemy wyznaczyć ze wzoru

$$S_n=\frac{c_1+c_n}{2}n$$

lub

$$S_n=\frac{2c_1+(n-1)r}{2}n$$

Film samouczek

Polecenie 1

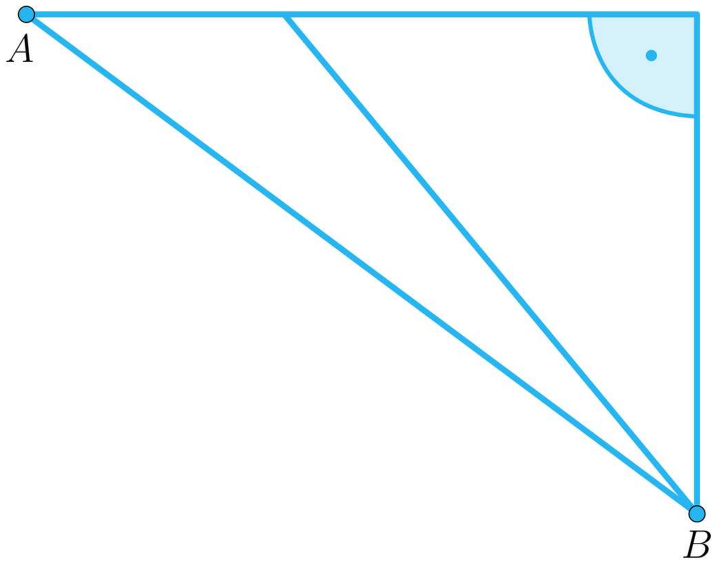
Zapoznaj się uważnie z poniższym filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DTYutiKX7

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zadań optymalizacyjnych z kontekstem realistycznym.

Polecenie 2

Mamy autostradę, w której w każdym momencie można zjechać i pojechać w dowolną stronę, jednak z prędkością trzykrotnie mniejszą niż na autostradzie. Odległość między punktami A i B wynosi $10\ \text{km}$, a odległość punktu B od autostrady wynosi $6\ \text{km}$.



Po ilu kilometrach należy zjechać z autostrady aby przejechać z punktu A do B w najkrótszym czasie? Wskaż poprawną odpowiedź.

- $2,121\ \text{km}$
- $4,5\ \text{km}$
- $10,121\ \text{km}$
- $5,879\ \text{km}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Przekątna przekroju osiowego puszki farby w kształcie walca ma długość 15 cm. Wiedząc, że objętość jest największa z możliwych wyznacz promień oraz wysokość tej puszki farby.

$r =$ ☐ cm,
$H =$ ☐ cm.

$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ $5\sqrt{6}$ $\frac{5\sqrt{30}}{6}$ $\frac{35\sqrt{6}}{6}$ $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ $5\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Z balkonu podrzucono piłkę, która po 5 sekundach spadła na ziemię. Wysokość (w metrach) na jakiej znajdowała się piłka nad ziemią po upływie t sekund od podrzucenia opisuje funkcja $h(t) = -2t^2 + 2t + 12$, gdzie $t \in \langle 0, 5 \rangle$. Oblicz po jakim czasie od momentu podrzucenia piłka osiągnęła największą wysokość. Zaznacz poprawną odpowiedź.

- ◯ Po trzech sekundach.
- ◯ Po połowie sekundy.
- ◯ Po jednej czwartej sekundy.
- ◯ Po jednej sekundzie.

Ćwiczenie 3

Pan Kowalski zajmuje się wynajmem sprzętu narciarskiego, ma do dyspozycji 150 kompletów. Wszystkie komplety sprzętu są wykorzystane wówczas gdy cena jednego kompletu wynosi 40 zł. Pewnego razu zaobserwował, że podwyżka kosztów wynajmu o każde 5 zł zmniejsza liczbę wynajmowanych kompletów o 15. Jaki koszt wynajmu powinien ustalić Pan Kowalski, aby jego zysk był największy? Wyznacz ten zysk.

Koszt wynajmu $=$ ______ zł.

Zysk $=$ ______ zł.

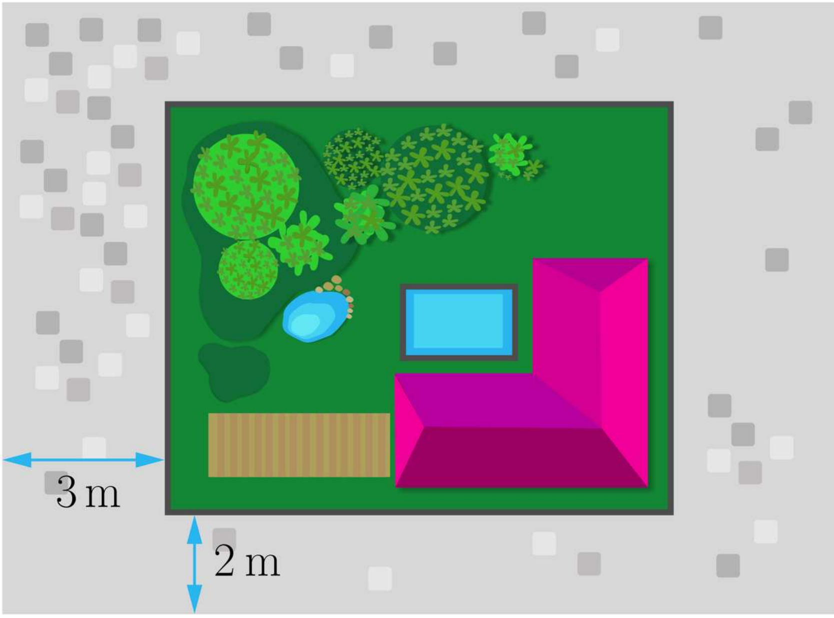
Ćwiczenie 4

Torebki "piramidki" z herbatą mają kształt ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w których krawędź boczna wynosi $4\ \text{cm}$. Wiedząc, że objętość jest maksymalna, zaznacz prawidłowe odpowiedzi. Przyjmij a – długość podstawy.

Pytanie	Odpowiedź 1	Odpowiedź 2
Dziedzina	$a \in \left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ ○	$a \in \left(0, 4\sqrt{3}\right)$ ○
$V(a)$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{16-\frac{3}{4}a^2}$ ○	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{16-\frac{a^2}{3}}$ ○
a_{max}	$4\sqrt{2}$ ○	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ○

Ćwiczenie 5

Działka w kształcie prostokąta o polu $150\ \mathrm{m}^2$ ma być otoczona chodnikiem. Jego szerokości po przeciwległych stronach trawnika są takie same i wynoszą $3\ \mathrm{m}$ i $2\ \mathrm{m}$ (zobacz rysunek).



Wyznacz wymiary działki, aby chodnik zajmował najmniejszą powierzchnię. Wskaż poprawną odpowiedź.

- ◯ $12\ \mathrm{m} \times 12,5\ \mathrm{m}$
- ◯ $6\ \mathrm{m} \times 25\ \mathrm{m}$
- ◯ $10\ \mathrm{m} \times 15\ \mathrm{m}$
- ◯ $7,5\ \mathrm{m} \times 20\ \mathrm{m}$

Ćwiczenie 6

Rolnik hoduje 500 sztuk trzody chlewnej. Ze sprzedaży trzody chlewnej osiąga średni dzienny dochód wynoszący 2500 zł. Oszacowano, że gdy zwiększy się liczbę hodowanych świń, to dochód jaki przynosi średnio dziennie jedna trzoda chlewna, spadnie o 1 promil wraz z każdą dodatkowo zakupioną sztuką. Oblicz ile sztuk trzody chlewnej powinien hodować rolnik, aby osiągnąć możliwie największy dochód.

Ćwiczenie 7

Z drutu o długości 12 m wykonano szkielet akwarium, którego stosunek długości podstawy do szerokości wynosi $4:3$. Wiedząc, że objętość jest największa, uzupełnij tabelę. Przyjmij x – dłuższa krawędź podstawy.

MAX, BRAK, $\searrow$, $\nearrow$, $+$, $-$, $\left(\frac{1}{6}, 4\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \infty\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{8}, 4\right)$, $\left(\frac{8}{7}, \infty\right)$

x	$P'(x)$	$P(x)$

Ćwiczenie 8

Świeczka w kształcie stożka ma objętość 4π. Wyznacz promień i wysokość tej świeczki, wiedząc, że pole powierzchni całkowitej przyjmuje najmniejszą wartość.

Dla nauczyciela

Autor: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczyny, ilorazu o funkcji złożonej;

5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;

6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne za pomocą pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji
- wyznacza dziedzinę otrzymanej funkcji
- wyznacza pochodną funkcji
- wyznacza ekstremum lokalne funkcji

- wskazuje w wyznaczonym ekstremum czy funkcja osiąga wartość największą lub najmniejszą
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- odwrócona lekcja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat lekcji i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uczniowie wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film samouczek", czyta treść polecenia nr 1 – „Zapoznaj się uważnie z poniższą prezentacją, a następnie wykonaj polecenia". Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie w grupach rozwiązują polecenie nr 2 w sekcji „Film samouczek". Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje.

3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania z ćwiczeń interaktywnych.
4. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu tylko wybrane ćwiczenia albo te, których uczniowie nie zdążyli zrobić z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

- Pochodna i monotoniczność funkcji

Wskazówki metodyczne:

„Film samouczek" można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób schemat rozwiązania zadań optymalizacyjnych.