Okrąg wpisany i opisany na trójkącie równobocznym

Źródło: Lidya Kohen, dostępny w internecie: https://pexels.com/.

Kiedy trójkąt jest równoboczny?

Oczywiście, jak sama nazwa wskazuje, trójkąt jest równoboczny, gdy wszystkie trzy jego boki mają jednakową długość. Krótkiej refleksji wymaga dostrzeżenie, że warunkiem równoważnym jest postulat, by dwa dowolne boki trójkąta miały tę samą długość i jeden (dowolny) z jego kątów miał miarę 60°. Łatwiej jest z postulatem, by dwa kąty trójkąta miały miary równe 60°. Można również analizować wzajemne relacje między wysokościami i środkowymi poprowadzonymi z wierzchołków trójkąta – oczywiście równość wysokości i środkowej poprowadzonych z jednego z wierzchołków jest niewystarczająca (ta własność charakteryzuje każdy trójkąt równoramienny), ale w przypadku, gdy dotyczy to odpowiednich odcinków poprowadzonych z dwóch wierzchołków, to z pewnością mamy do czynienia z trójkątem równobocznym.

Wiemy, że w trójkącie równobocznym o wysokości h długość promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie, jest równa $R=\frac{2}{3}h$, a promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $r=\frac{1}{3}h$. Tym samym $R:r=2:1$.

Okazuje się, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by trójkąt był równoboczny jest, by wspomniany wyżej stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt był równy 2.

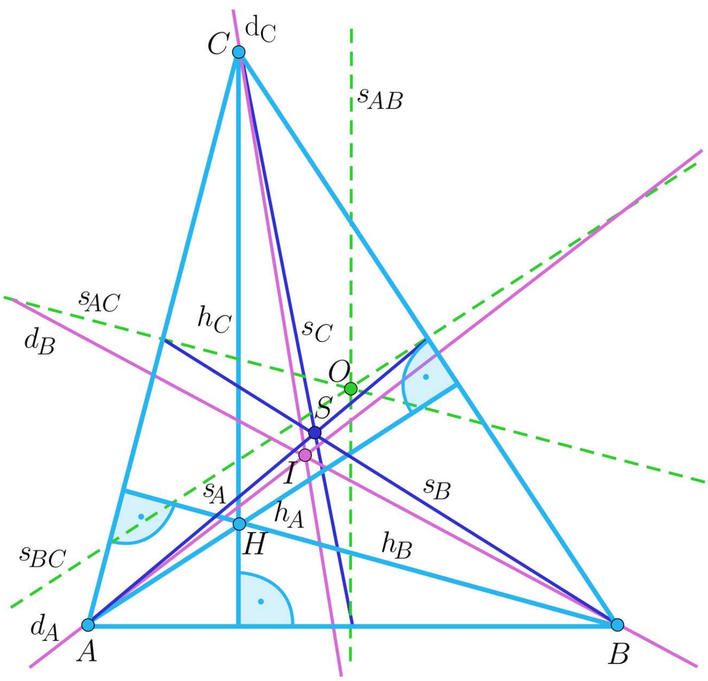
Twoje cele

- Zastosujesz twierdzenie o promieniach okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt równoboczny.
- Zastosujesz twierdzenie Eulera do uzasadnienia nierówności Eulera i zbadania stosunku między promieniami okręgów: opisanego i wpisanego w trójkąt, w tym trójkąt równoboczny.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Punkty szczególne w trójkącie równobocznym

Wiemy, że w każdym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie, zwanym ortocentrum trójkąta. Ten punkt jest jednym z tzw. punktów szczególnych trójkąta. Innym punktem szczególnym jest środek ciężkości – pojęcie znane lepiej adeptom fizyki – w trójkącie jest to punkt przecięcia trzech jego środkowych. Wreszcie wspomnieć należy punkty szczególne, które są przedmiotem dzisiejszej lekcji – to środek okręgu opisanego na trójkącie, czyli punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta oraz środek okręgu wpisanego w trójkąt, czyli punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.

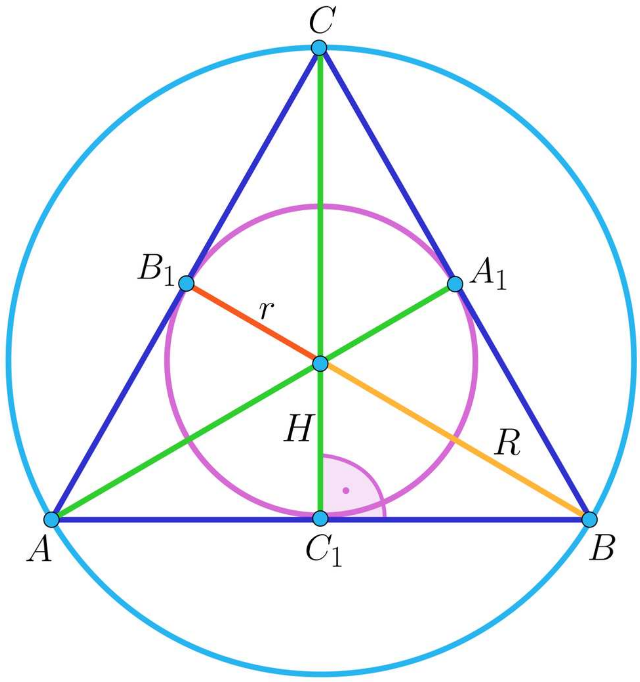


Wybrane punkty szczególne trójkąta

Na powyższym rysunku wysokości h_A, h_B, h_C przecinają się w punkcie H, środkowe s_A, s_B, s_C przecinają się w punkcie S, dwusieczne d_A, d_B, d_C przecinają się w punkcie I a symetralne s_{AB}, s_{BC}, s_{AC} przecinają się w punkcie O. Nie sposób nie zauważyć, że jednoczesne poprowadzenie prostych i odcinków, wyznaczających poszczególne punkty szczególne, utrudnia dostrzeżenie ewentualnych zależności między obiektami.

Oczywiście znacznie łatwiej ewentualne zależności dostrzec w trójkącie równobocznym, ale wtedy przestaje to być przesłanką do zadawania pytań, bo symetralne boków są jednocześnie dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta i zawierają się w nich wysokości i środkowe trójkąta równobocznego, co oznacza, że ortocentrum jest środkiem ciężkości i środkiem okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Oznaczmy przez H jego ortocentrum, a przez A_1, B_1, C_1 odpowiednie spodki wysokości trójkąta równobocznego ABC, jak na rysunku.



Ortocentrum trójkąta równobocznego

Wtedy mamy oczywiście $|HA_1| = |HB_1| = |HC_1| = r$, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz $|HA| = |HB| = |HC| = R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Oczywiście $|HA| = 2|HA_1|$, co jest w szczególności konsekwencją twierdzenia o środkowych w trójkącie (dowolnym), które przecinają się w stosunku $2 : 1$. Naturalnie ten sam wniosek można wyciągnąć, z faktu, że $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|HC_1|}{|HA|} = \frac{|HA_1|}{|HA|}$.

Prawdziwe jest zatem poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o promieniach okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym

Rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku długości a i wysokości h. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, a r promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wtedy $R = \frac{2}{3}h$ oraz $r = \frac{1}{3}h$, gdzie $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Przykład 1

Wyznaczymy pole trójkąta równobocznego, w którym promienie R, r okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt oraz wysokość h są wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 2.

Rozwiązanie:

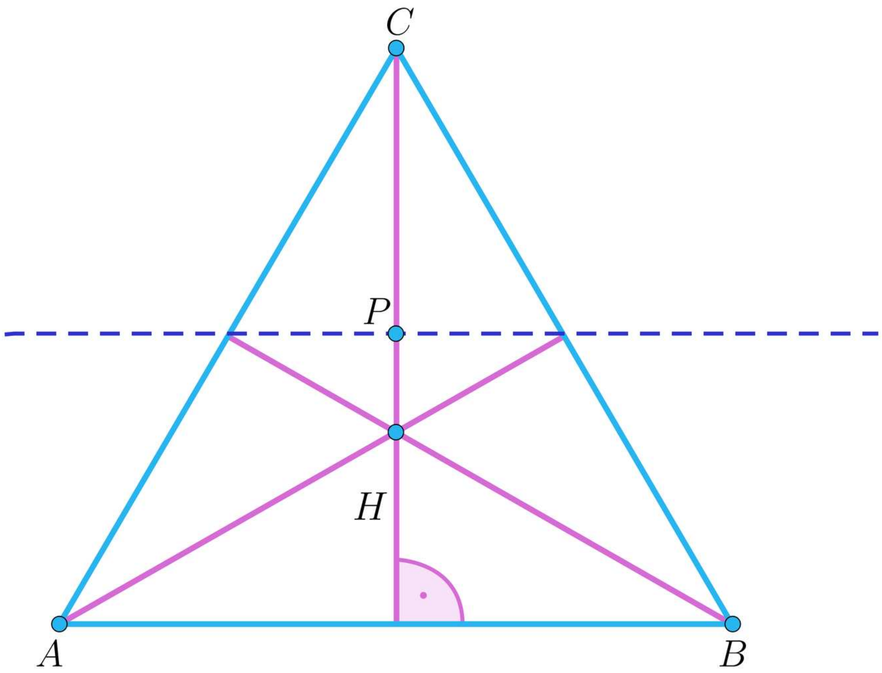
Na wstępie zauważmy, że w trójkącie równobocznym liczby h, R, r zawsze tworzą ciąg arytmetyczny, a różnica tego ciągu jest równa $\frac{1}{3}h$. Wtedy $\frac{1}{3}h = 2$. Stąd $h = 6$ oraz $a = 4\sqrt{3}$. Zatem:

$$P_{\triangle} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

Przykład 2

Odległość prostej przechodzącej przez środki dwóch boków trójkąta równobocznego od jego ortocentrum jest równa $\sqrt{3}$. Wyznaczymy długość a boku tego trójkąta.

Rozwiązanie:



Na wstępie zauważmy, że prosta ta dzieli wysokość trójkąta na połowę. Zatem $\sqrt{3} = |PH| = \frac{1}{2}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h$. Stąd $h = 6\sqrt{3}$. Bok trójkąta jest więc równy:

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 12.$$

Stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w dany trójkąt

Relacja między okręgami w trójkącie równobocznym, w szczególności położenie środków i stosunek długości promieni charakteryzują trójkąt równoboczny. Do takiego wniosku można dojść analizując twierdzenie Eulera i tzw. nierówność Eulera, która jest prostą konsekwencją tego twierdzenia. Przytoczymy tu wspomniane twierdzenie bez dowodu, bowiem dotyczy ono szerszej klasy trójkątów.

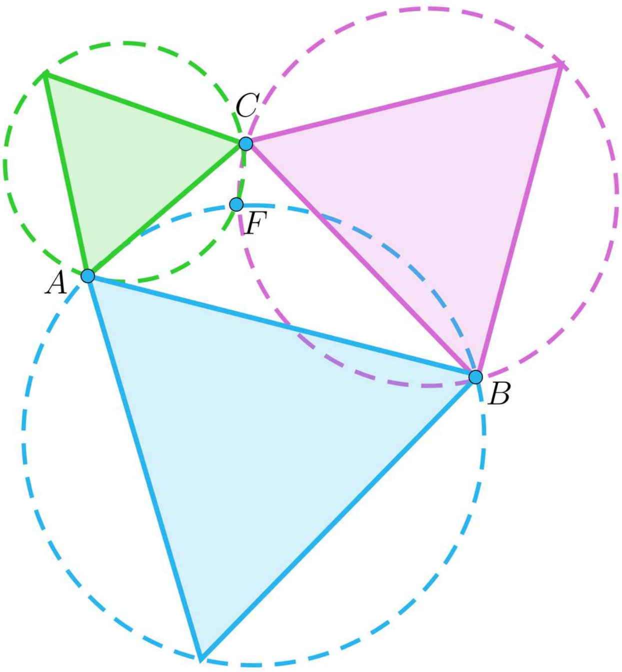
> **Twierdzenie: Twierdzenie Eulera**
>
> Dany jest (dowolny) trójkąt ABC. Niech punkt O będzie środkiem okręgu o promieniu R opisanego na tym trójkącie, a punkt I niech będzie środkiem okręgu o promieniu r wpisanego w ten trójkąt. Niech d będzie długością odcinka OI. Wtedy $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Nierówność Eulera

Oczywiście $d^2 \geq 0$, czyli $R^2 - 2Rr \geq 0$. Prowadzi to do nierówności $R \geq 2r$, gdzie równość zachodzi tylko wtedy, gdy $d = 0$.
Widać więc, że dla trójkąta, w którym środki okręgów wpisanego i opisanego się pokrywają, stosunek długości promieni okręgów wpisanego i opisanego jest równy 2. Tym samym taki stosunek jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, by trójkąt był równoboczny.

Okręgi opisane na trójkątach równobocznych w optymalizacji

Na koniec przywołamy zagadnienie zwane „okręgami Torricellego”, które stanowi rozwiązanie problemu postawionego przez P. Fermata: mając dane na płaszczyźnie trzy punkty, znajdź czwarty, taki, że suma jego odległości od trzech punktów danych osiąga minimum. Evangelista Torricielli wykazał, że jeśli oznaczymy dane punkty jako A, B, C, następnie zbudujemy trójkąty równoboczne o bokach AB, AC, BC leżące na zewnątrz trójkąta ABC, jak na poniższym rysunku, to okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, zwany punktem Fermata lub punktem Torricellego – Fermata, jest rozwiązaniem postawionego zagadnienia.



Okręgi Torricellego

Słownik

ortocentrum trójkąta

punkt przecięcia się wysokości trójkąta nazywamy ortocentrum

wysokość trójkąta

najkrótszy z odcinków łączących wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem)

środkowa w trójkącie

odcinek łączący wierzchołem ze środkiem przeciwległego boku

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Uruchom symulację interaktywną. Ustal położenie wierzchołków trójkąta. Odczytaj długości promieni r, R okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie oraz odległość d środków tych okręgów. Oblicz wartość wyrażenia $R^2 - 2R \cdot r - d^2$. Sformułuj hipotezę dotyczącą wartości tego wyrażenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6Y3hPyqE

Polecenie 2

Odległość środków okręgów opisanego na trójkącie równoramiennym i wpisanego w dany trójkąt jest równa 4. Promień okręgu wpisanego jest równy 3. Wyznacz promień okręgu opisanego budując odpowiedni model w Aplecie oraz korzystając z twierdzenia Eulera.

Polecenie 3

Przeanalizuj położenie wierzchołków A, B, C trójkąta w kontekście wartości ilorazu $\frac{R}{r}$ długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w dany trójkąt. Jakie wartości może przyjmować ten iloraz, w szczególności rozstrzygnij, czy może on być mniejszy niż 2. Zbadaj, kiedy ten iloraz będzie równy 2.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Różnica pól między kołami opisanym na trójkącie równobocznym i wpisanym w ten trójkąt jest równa 1. Oblicz pole trójkąta.

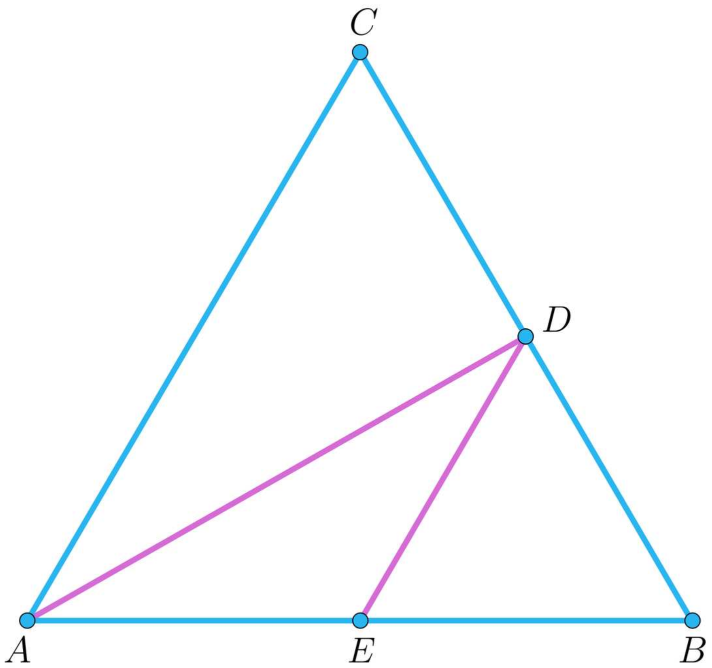
Ćwiczenie 2

Trójkątem spodkowym trójkąta PQR nazywamy trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości trójkąta PQR. Rozważmy trójkąt równoboczny ABC i jego trójkąt spodkowy. Różnica długości promieni okręgów wpisanych w trójkąt ABC i jego trójkąt spodkowy jest równa $\sqrt{3}$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a poprowadzono wysokość AD oraz odcinek DE łączący środki dwóch boków tego trójkąta, jak na rysunku.



Promień okręgu wpisanego w trójkąt EBD jest równy 1 Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt AED.

Ćwiczenie 5

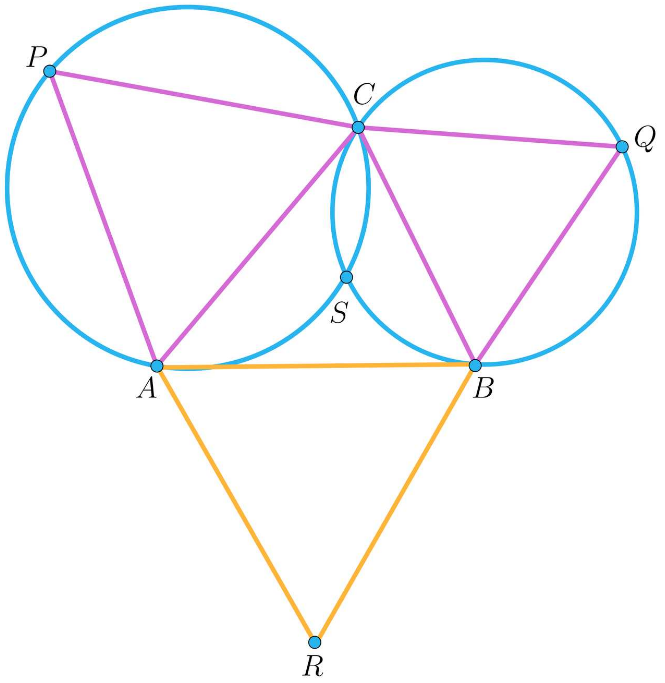
Ćwiczenie 6

Niech R, r oznaczają odpowiednio promień okręgu opisanego i promień okręgu wpisanego w ten sam trójkąt równoboczny. Liczby $R-r$, $R \cdot r$, $R+r$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Wtedy

- $R=1$
- $R=2$
- $R=3$
- $R=4$

Ćwiczenie 7

Rozważmy dowolny trójkąt ABC. Na zewnątrz tego trójkąta, na jego bokach AB, AC i BC zbudowano trójkąty równoboczne ABR, ACP i BCQ. Okręgi opisane na trójkątach ACP i BCQ przecinają się w punktach C, S, jak na rysunku.



Uzasadnij, że okrąg opisany na trójkącie ABR przechodzi przez punkt S.
Ułóż w kolejności etapy dowodu.

- Korzystając ponownie z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu otrzymujemy, że na czworokącie $ARBS$ da się opisać okrąg.
- Zauważmy, że $"|"\sphericalangle ASB"|" = 360^\circ - "|"\sphericalangle ASC"|" - "|"\sphericalangle BSC"|" = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ =$.
- Zbadajmy teraz kąty w czworokącie $ARBS$.
- Zauważmy, że na każdym z czworokątów $ASCP$ oraz $BQCS$ da się opisać okręgi.
- Rozważmy czworokąt $ASCP$. Z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg wynika, że $"|"\sphericalangle ASC"|" = 180^\circ - "|"\sphericalangle APC"|" = 120^\circ$.
- Analogicznie, ponieważ czworokąt $BQCS$ da się wpisać w okrąg, więc $"|"\sphericalangle BSC"|" = 180^\circ - "|"\sphericalangle BQC"|" = 120^\circ$.

- W szczególności otrzymujemy:
  $"|"\sphericalangle ARB"|" + "|"\sphericalangle ASB"|" = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$.
- To kończy dowód.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okrąg wpisany i opisany na trójkącie równobocznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony,

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie trójkąta opisanego na okręgu;
- stosuje pojęcie trójkąta wpisanego w okrąg;
- stosuje twierdzenie Eulera o odległości między środkami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt równoboczny;
- przeprowadza dowody geometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o podanie definicji trójkąta równobocznego i warunków równoważnych (równość boków, kątów, dwóch boków i odpowiednia miara dowolnego z kątów, relacje między wysokościami i środkowymi). Formułuje problem stosunku między promieniami okręgów opisanego i wpisanego w dowolny trójkąt (w tym miejscu warto na chwilę uruchomić dołączoną symulację interaktywną i poprosić o wykonanie Polecenia 3.).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia punktów szczególnych trójkąta i po chwili prezentuje rysunek, na którym zaznaczone są wybrane punkty szczególne: ortocentrum, środek ciężkości oraz punkty przecięcia się symetralnych i dwusiecznych. Następnie formułuje problem wzajemnego położenie tych punktów w trójkącie równobocznym – uczniowie formułują odpowiedź.
2. Następnie nauczyciel prezentuje przygotowany wcześniej rysunek trójkąta równobocznego i prosi o podanie zależności między promieniami okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt równoboczny i wysokościami trójkąta. Prosi o uzasadnienie podanej zależności. Następnie uczniowie rozwiązują w parach problemy opisane w zaproponowanych przykładach. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązania na forum klasy.
3. Następnie nauczyciel prosi o uruchomienie dołączonej symulacji interaktywnej i wykonanie podanych tam poleceń. Nauczyciel przywołuje postać Eulera i formułuje twierdzenie o odległości między środkami okręgów opisanego i wpisanego i prosi uczniów o wyciągnięcie wniosków dotyczących trójkąta równobocznego.
4. Na koniec nauczyciel prezentuje zagadnienie Torricellego, jako przykład zastosowania okręgów opisanych na trójkącie równobocznym.

5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do przeprowadzenia dowodu twierdzenia Eulera.

Materiały pomocnicze:

Okrąg wpisany w trójkąt

Okrąg opisany na trójkącie

Wskazówki metodyczne:

Symulację interaktywną można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można wykorzystać jako uzupełnienie tematu o okręgach opisanych i wpisanych w trójkąt prostokątny.