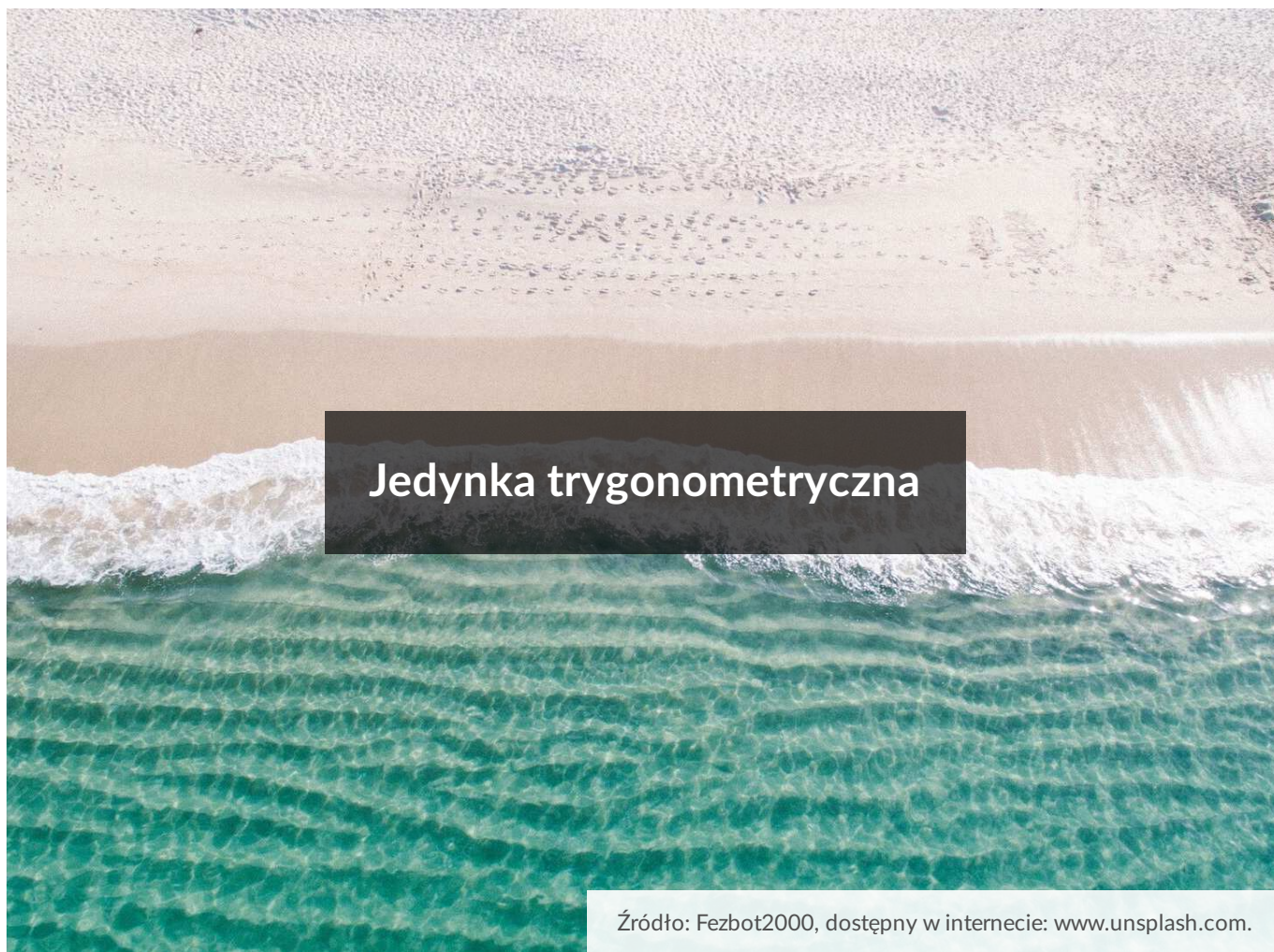




Jedynka trygonometryczna

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jedynka trygonometryczna

Źródło: Fezbot2000, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Dział trygonometrii obejmuje zagadnienia związane z zależnościami między długościami boków w trójkącie, a miarami kątów wewnętrznych. Jedną z zależności, która powstaje między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta jest jedynka trygonometryczna. W trakcie lekcji wprowadzimy i udowodnimy jedynkę trygonometryczną oraz pokażemy jej wykorzystanie w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie dotyczące jedynki trygonometrycznej.
- Wyznaczysz wartość sinusa, gdy dany jest cosinus kąta ostrego i na odwrót.

Przeczytaj

Już wiesz

- **Sinusem** kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej.
- **Cosinusem** kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.

W trakcie lekcji poznamy i wykorzystamy wzór na **jedynkę trygonometryczną**.

Twierdzenie: jedynka trygonometryczna

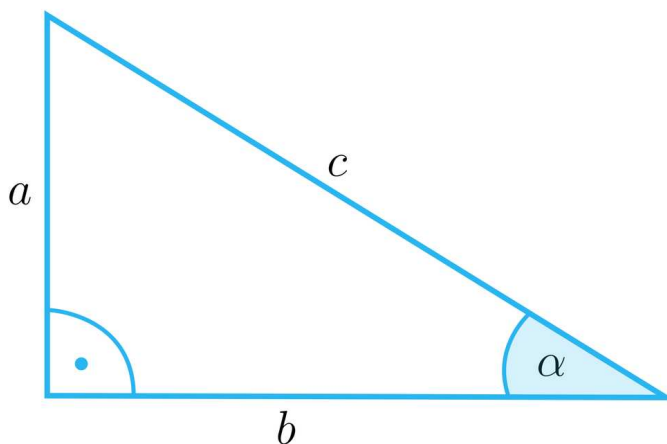
Dla dowolnego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzi równość:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Wzór ten nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Dowód

Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b , przeciwprostokątnej długości c oraz kącie ostrym α , leżącym przy boku b .



Z definicji funkcji trygonometrycznych wiadomo, że:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Ważne!

Stosując równanie jedynki trygonometrycznej możemy wyznaczyć wartość sinusa kąta mając podany cosinus lub odwrotnie. Wzór ten stosujemy również dla kątów większych od 90° .

Przykład 1

Wyznamy wartość $\cos \alpha$, jeżeli dany jest $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ oraz α jest kątem ostrym.

W celu wyznaczenia wartości $\cos \alpha$ wykorzystamy wzór $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Podstawiamy wartość $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1.$$

Stąd $\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$, więc $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ lub $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ponieważ kąt α jest ostrym, zatem $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ważne!

Dla dowolnego kąta $\alpha \in (0, 90^\circ)$ mamy, że $\sin \alpha > 0$ oraz $\cos \alpha > 0$, zaś dla $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ zachodzą warunki: $\sin \alpha > 0$ oraz $\cos \alpha < 0$.

Przykład 2

Wyznamy wartość $\sin \alpha$, jeżeli dany jest $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ oraz α jest kątem ostrym.

W celu wyznaczenia wartości $\sin \alpha$ wykorzystamy wzór $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Podstawiamy wartość $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

Otrzymujemy równanie:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1.$$

Stąd $\sin^2 \alpha = \frac{21}{25}$, więc $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$. Ponieważ kąt α jest ostrym, zatem $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy istnieje taki kąt α , dla którego $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Podane wartości $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$ podstawiamy do jedynki trygonometrycznej.

$$\text{Otrzymujemy: } \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{16} = \frac{32+9}{144} = \frac{41}{144}.$$

Ponieważ $\frac{41}{144} \neq 1$, zatem nie istnieje taki kąt.

Przykład 4

Wyznamy wartość $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$, jeżeli wiadomo że α jest kątem ostrym oraz sinus tego kąta jest dwa razy większy od cosinusa.

Z zadania możemy ułożyć następujący warunek:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha.$$

Podany warunek podstawiamy do jedynki trygonometrycznej. Otrzymujemy równanie:

$$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ zatem } 5 \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Czyli } \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}, \text{ więc } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ lub } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Ponieważ } \alpha \text{ jest kątem ostrym, zatem } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ oraz } \sin \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 5

Wyznamy wartość wyrażenia $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$, jeżeli $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{9}$.

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

Zatem mamy:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \cdot \frac{2}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1\frac{4}{9}.$$

Przykład 6

Wiadomo, że stosunek sinusa pewnego kąta ostrego α do cosinusa tego kąta wynosi $\frac{12}{5}$. Wyznamy wartość wyrażenia $\sin \alpha + \cos \alpha$.

$$\text{Z warunku podanego w zadaniu mamy, że } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{5}, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{12}{5} \cos \alpha.$$

Podstawiamy to wyrażenie do jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy:

$$\left(\frac{12}{5} \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ co po przekształceniu daje } \frac{169}{25} \cos^2 \alpha = 1.$$

Z równania otrzymujemy, że $\cos^2 \alpha = \frac{25}{169}$, więc $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, bo α jest kątem ostrym.

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Szukana suma wynosi } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} = \frac{17}{13}.$$

Słownik

jedynka trygonometryczna

dla dowolnego kąta α zachodzi równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą zastosowania jedynek trygonometrycznej do wyznaczania sinusa lub cosinusa kąta.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DvTKrcnly>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego jedynek trygonometrycznej.




Polecenie 2

Wyznacz wartość $\cos \alpha$, jeżeli:

a) $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$ i α jest kątem ostrym,

b) $\sin \alpha = \frac{1}{6}$ oraz α jest kątem rozwartym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jedyńka trygonometryczna

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania - wymagania ogólne:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przeprowadza dowód twierdzenia dotyczącego jedynki trygonometrycznej;
- wykorzystuje jedynkę trygonometryczną do znajdowania wartości sinus kąta, gdy dany jest cosinus;
- znajduje cosinus kąta ostrego, gdy dany jest sinus.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;

- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Jedynka trygonometryczna” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie w parach rozwiązują Polecenie 2, wyniki omawiają na forum klasy.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.

5. Zadania numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Jedynka trygonometryczna” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Jedynka trygonometryczna”).

Materiały pomocnicze

- [Tożsamości trygonometryczne](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Jedynka trygonometryczna”.