



Wzajemne położenie prostej i okręgu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



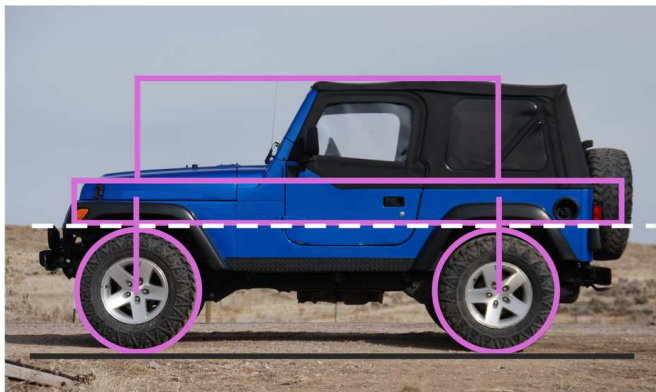
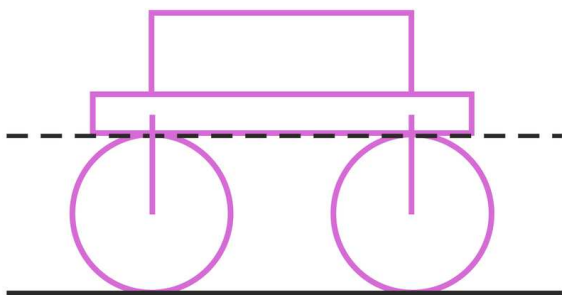
Wzajemne położenie prostej i okręgu

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Skąd się wziął technologiczny sukces koła?

Badanie archeologiczne wskazują, że już w IV tysiącleciu p. n. e. w Mezopotamii wykorzystywano koło, a niedługo później trafiło ono do Europy. Zaskoczeniem dla badaczy cywilizacji prekolumbijskiej obu Ameryk, w okresie późniejszym o blisko pięć tysięcy lat, była nieznajomość koła, w kontekście jego technologicznego wykorzystania, np. w transporcie.

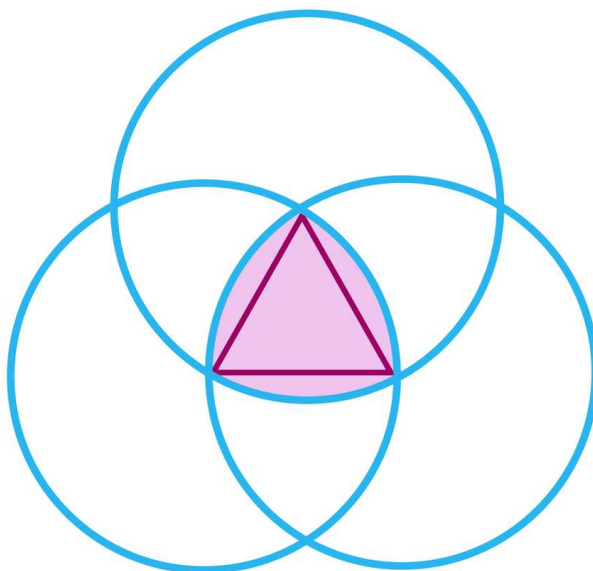
Podstawą funkcjonowania stosowanego w pojazdach koła jest możliwość znacznej redukcji tarcia i tym samym siły, jakiej potrzeba, by wprowadzić pojazd w ruch oraz stabilność, jaką gwarantuje fakt, że przymocowanie pojazdu do osi obrotu kół zapewnia niezmienność jego położenia względem poziomego podłoża, w szczególności stały prześwit (szerokość) między podłożem a podłogą pojazdu. Inaczej mówiąc, istnieją dwie równoległe proste – po jednej z nich można toczyć koło, a druga „leży” na tym kole.



Własność okręgu

Źródło: JeniferJJ, dostępny w internecie: <https://pixabay.com/>, licencja: CC 0 1.0.

Pod koniec XIX wieku pokazano, że istnieją inne figury, które gwarantują tak zdefiniowaną niezmiennność położenia. Rozważmy trójkąt równoboczny i trzy okręgi, których środkami są wierzchołki trójkąta, a które przechodzą odpowiednio przez dwa pozostałe wierzchołki, jak na rysunku.



Konstrukcja trójkąta Reuleaux

Suma powstałych wycinków koła tworzy figurę, pokolorowaną na rysunku, zwaną **trójkątem Reuleaux** (od nazwiska jego twórcy).

Okazuje się, że tak zdefiniowaną figurę można toczyć między dwiema prostymi o stałej odległości.

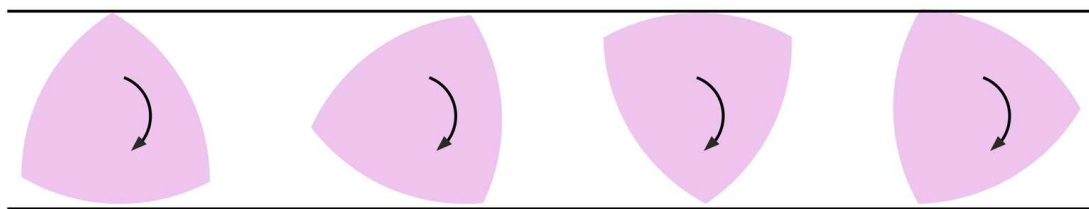


Figura o stałej szerokości

Twoje cele

- Poznasz pojęcie stycznej i siecznej.
- Będziesz badać wzajemne położenie prostej i okręgu i sformułujesz kryteria pozwalające to położenie określić.
- Skonstruujesz styczną do okręgu o zadanych własnościach.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

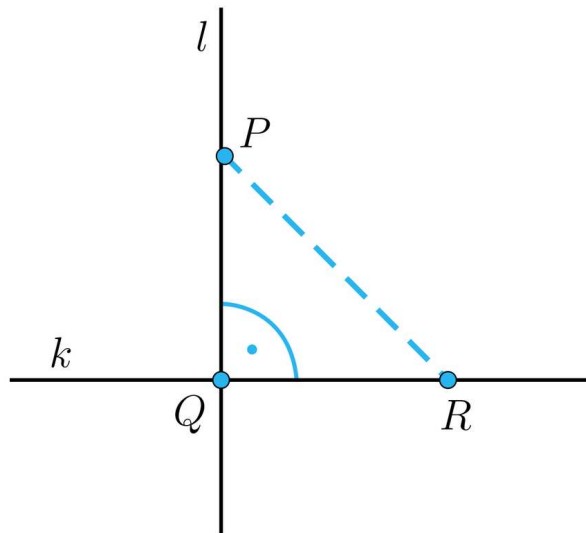
Przeczytaj

Definicja: Odległość punktu od prostej

Odległością punktu P od prostej k nazwiemy długość najkrótszego z odcinków PQ , gdzie $Q \in k$.

Twierdzenie: Odległość punktu od prostej

Niech dana będzie prosta k i punkt P nie leżący na tej prostej. Niech l będzie prostą prostopadłą do k i przechodzącą przez punkt P . Niech Q będzie punktem wspólnym prostych k i l . Długość odcinka PQ jest odległością punktu P od prostej k .

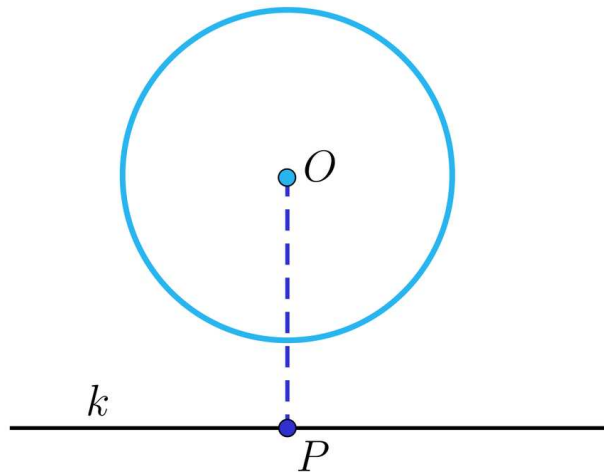


Odległość punktu od prostej

Dowód

Zauważmy, że dowolny punkt $R \in k$, $R \neq Q$ jest końcem przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym PQR , więc jego długość jest większa od długości odcinka PQ . Co kończy dowód.

Rozważmy okrąg o środku w punkcie O i prostą k , która leży całkowicie na zewnątrz okręgu (nie ma z nim punktów wspólnych) i zaznaczmy odcinek, który wyznacza odległość prostej k i punktu O .



Odległość punktu od prostej

Oczywiste jest wówczas twierdzenie.

Twierdzenie: Prosta rozłączna z okręgiem

Jeżeli prosta leży poza okręgiem, to jej odległość od środka okręgu jest większa od promienia.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

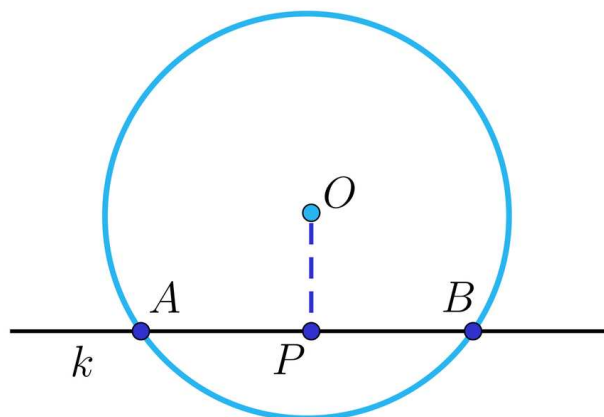
Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne – prosta rozłączna z okręgiem

Jeżeli odległość prostej od środka okręgu jest większa od promienia, to prosta ta leży poza okręgiem.

Definicja: Sieczna

Prostą, która przecina okrąg w dwóch różnych punktach nazywamy sieczną tego okręgu.

Rozważmy okrąg o środku w punkcie O i prostą k , która jest jego sieczną i przecina okrąg w punktach A i B . Zaznaczmy na prostej punkt P , który wyznacza odległość prostej k i punktu O .



Sieczna okręgu

Oczywiste jest wówczas twierdzenie.

Twierdzenie: Sieczna

Jeżeli prosta jest sieczną okręgu, to jej odległość od środka okręgu jest mniejsza od promienia.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne – sieczna

Jeżeli odległość prostej od środka okręgu jest mniejsza od promienia, to prosta ta jest jego sieczną.

Definicja: Styczna

Prostą, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny nazywamy styczną do okręgu. Punkt wspólny stycznej i okręgu nazywamy punktem styczności.

Prawdziwe są wówczas następujące twierdzenia.

Twierdzenie: Styczna

Jeżeli prosta jest styczną do danego okręgu, to jej odległość od środka okręgu jest równa promieniowi.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne – styczna

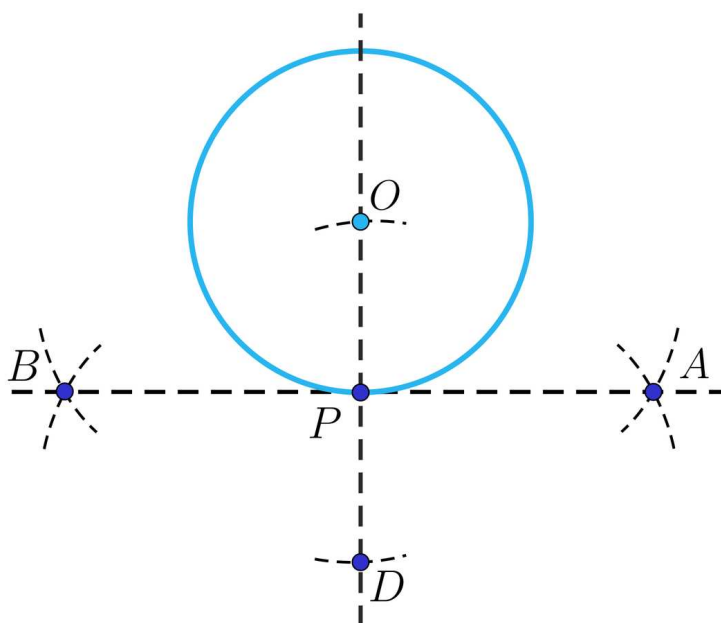
Jeżeli odległość prostej od środka okręgu jest równa promieniowi, to prosta ta jest styczną do danego okręgu.

Wniosek: Zauważmy, że z definicji odległości wynika, że promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej.

Przykład 1

Dany jest okrąg o środku O i punkt P leżący na tym okręgu. Przeprowadzimy konstrukcję stycznej do danego okręgu, która będzie przechodziła przez punkt P .

1. Prowadzimy prostą przechodzącą przez środek okręgu i punkt styczności.
2. Rozwartością cyrkla równą promieniowi zaznaczamy na prostej punkt D tak, aby punkt P był środkiem odcinka OD .
3. Kreślimy symetralną odcinka OD – zakreślając z punktów O i D łuki okręgów o tym samym promieniu, aż do przecięcia się.
4. Przez punkty A i B – przecięcia się łuków – kreślimy prostą. Jest to szukana styczna.

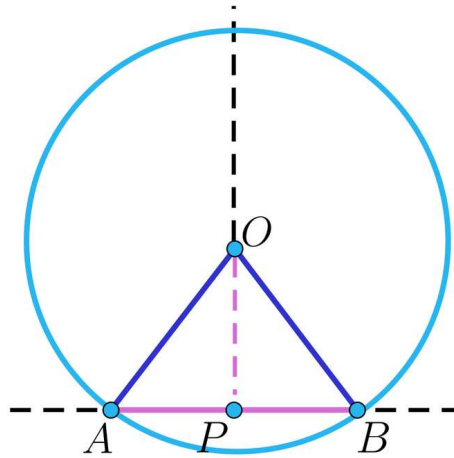


Konstrukcja stycznej przez punkt na okręgu

Przykład 2

Odległość siecznej od środka okręgu jest równa 2. Długość odcinka, o końcach w punktach wspólnych tej siecznej i okręgu, jest równa promieniowi R tego okręgu. Obliczmy R .

Rozwiązanie:



Zauważmy, że przy przyjętych na rysunku oznaczeniach mamy: $|AB| = R$.

Ale trójkąt ABO jest trójkątem równobocznym, w którym $|OP|$ jest długością wysokości.

Zatem $|OP| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Mamy więc $\frac{R\sqrt{3}}{2} = 2$, a stąd $R = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

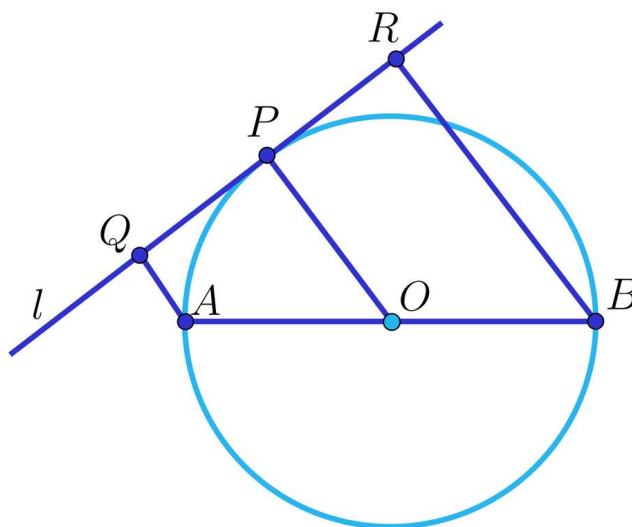
Na koniec udowodnimy oczywiste, a przy tym interesujące twierdzenie.

Twierdzenie: Średnica okręgu

Średnica okręgu jest równa sumie długości odcinków opuszczonych z końców tej średnicy na dowolną styczną.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy, że promień OP jest **linią środkową w trapezie $BRQA$** .

Zatem $|OP| = \frac{|QA|+|RB|}{2}$.

Ale $|AB| = 2 \cdot |OP|$. Stąd teza.

Słownik

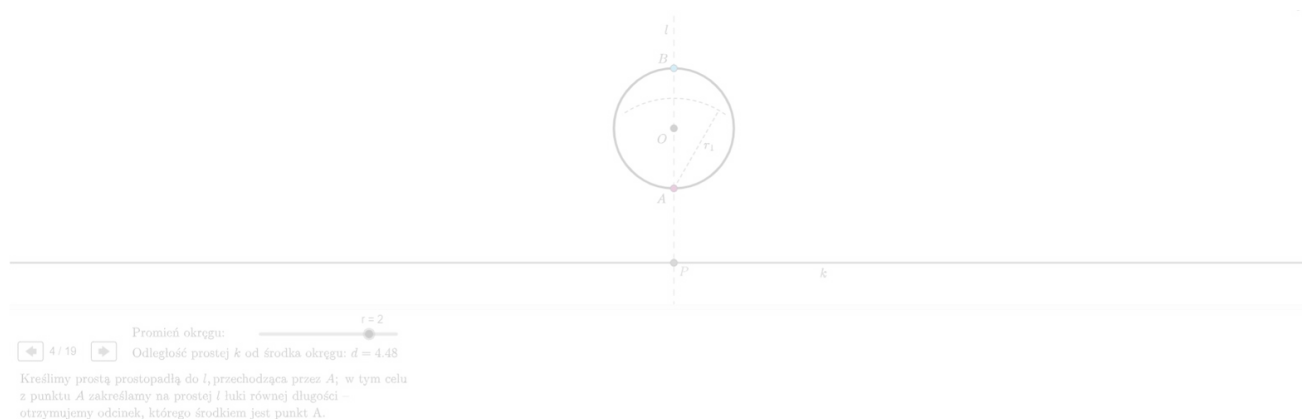
linia środkowa w trapezie

linią środkową w trapezie nazywamy odcinek łączący środki ramion trapezu; linia środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw trapezu, a jej długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet i przeanalizuj konstrukcję **STYCZNEJ DO DANEGO OKRĘGU I RÓWNOLEGŁEJ DO DANEJ PROSTEJ**. Zwróć szczególną uwagę na odległości między prostą i otrzymanymi stycznymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzD4d1FH1>

Polecenie 2

Odległości danej prostej od dwóch stycznych do pewnego okręgu są równe x , y i są liczbami całkowitymi. Suma $x + y$ jest równa iloczynowi $x \cdot y$. Oblicz promień okręgu.

Polecenie 3

Poprowadzono styczne do pewnego okręgu, równoległe do prostej k . Iloczyn odległości tych stycznych od prostej k jest równy 70, a suma tych odległości jest równa 17. Oblicz promień okręgu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Punkt P jest punktem przecięcia się prostopadłych stycznych do danego okręgu o środku O . Odcinek OP ma długość 4. Promień okręgu jest równy:

☐ 4

☐ 8

☐ $4\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{2}$

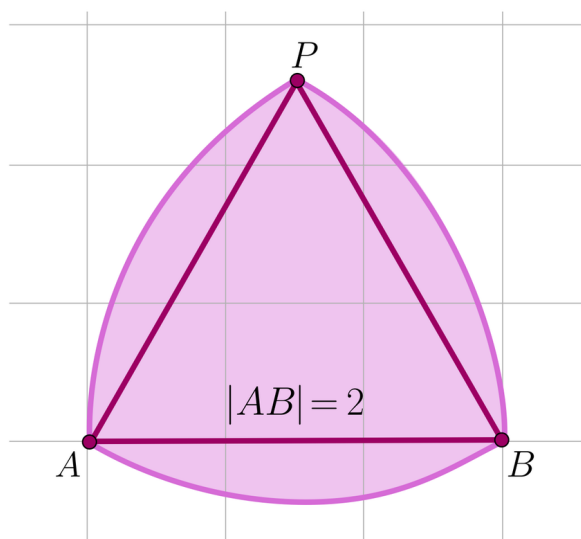
Ćwiczenie 2



Sieczna przecina okrąg o promieniu r w punktach A i B . Promień r jest średnią arytmetyczną odległości $|AB|$ i odległości siecznej od środka okręgu i jest o 1 dłuższy od odległości siecznej od środka okręgu. Oblicz promień r okręgu.

Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono trójkąt Reuleaux.



Ile wynosi pole tego trójkąta? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\pi - \sqrt{3}$

☐ $\pi + 2\sqrt{3}$

☐ $2\pi - \sqrt{3}$

☐ $2\pi - 2\sqrt{3}$

Ćwiczenie 4



Przeprowadź następującą konstrukcję: z punktu P leżącego na danym okręgu o środku w punkcie O zakreślamy okrąg o promieniu równym promieniowi wyjściowego okręgu. W przecięciu z danym okręgiem otrzymujemy dwa punkty – jeden z nich oznaczamy jako Q . Prowadzimy prostą OQ i na niej odkładamy odcinek QR , o długości równej długości OP w taki sposób, by $O \neq R$. Przez punkty R, P prowadzimy prostą. Uzasadnij, że otrzymana prosta RP jest styczną do danego okręgu, przechodzącą przez punkt P .

Ćwiczenie 5



Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg o środku w punkcie O i poprowadzono styczne do tego okręgu w wierzchołkach trójkąta. Styczne te przecięły się parami odpowiednio w punktach P, Q, R . Oblicz promień okręgu, jeżeli $|OP| = 6$.

Ćwiczenie 6



Dwie wzajemnie prostopadłe proste są odpowiednio sieczną i styczną do pewnego okręgu. Różnica odległości tych prostych od środka okręgu jest równa 7, a odległość środka okręgu od punktu wspólnego jest równa 17. Oblicz promień okręgu. Ułóż w kolejności odpowiednie etapy rozwiązania.

Ćwiczenie 7



Zbadaj wzajemne położenie prostej i okręgu mając dane odległość d prostej od środka i promień r okręgu. Dopasuj je, łącząc w pary.

Prosta jest styczna do okręgu.

$$r = \sqrt{6} - \sqrt{2} + 3, d = \frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

Prosta jest sieczną okręgu.

$$r = |3 - 2\sqrt{2}| + |2\sqrt{2} - 3|, d = 2$$

Prosta leży poza okręgiem (prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem).

$$r = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}, d = 2$$

Ćwiczenie 8



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Dane są trzy proste równoległe k , l , m . Proste te są odpowiednio sieczną, styczną oraz prostą leżącą poza okręgiem. Suma ich odległości od środka okręgu jest równa 36. Gdyby promień okręgu zmniejszyć o 3, to okrąg byłby styczny do prostej k , a gdyby promień okręgu zwiększyć o 3, to okrąg byłby styczny do prostej m . Promień okręgu jest równy:

☐ 12

☐ 18

☐ 9

☐ 15

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzajemne położenie prostej i okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzajemne położenie prostej i okręgu
- stosuje twierdzenia ustalające kryterium wzajemnego położenia prostej i okręgu
- przeprowadza podstawowe konstrukcje geometryczne
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym – wówczas w grze uczestniczy cała klasa

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytania nawiązujące do historii wynalezienia koła i jego zastosowań w technice.
2. Nauczyciel prosi o wskazanie cech, które decydują o zastosowaniu koła w transporcie. Tak kieruje rozmową, by nawiązać do cechy, którą można nazwać „niezmienniczością szerokości”.
3. Nauczyciel pyta o inne figury o takiej własności (możliwe, że pojawi się informacja o silniku Wankla).
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o podanie przykładów sposobów ustalania odległości między zadany punktem a obiektem. Tak prowadzi rozmowę, by pojawiła się kwestia najkrótszego odcinka. Następnie podaje definicję odległości i twierdzenie z tym związane.
2. Nauczyciel prosi uczniów o omówienie wzajemnego położenia prostej i okręgu w kontekście liczby punktów wspólnych. Następnie odnosi to do odległości między prostą i środkiem okręgu.
3. Uczniowie uruchamiają aplet GeoGebry i wykonują zawarte w nim polecenia.
4. Nauczyciel prosi uczniów o sformułowanie odpowiednich twierdzeń wzajemnego położenia prostej i okręgu i twierdzeń odwrotnych.
5. Nauczyciel formułuje kolejno przykłady i prosi uczniów o rozwiązanie postawionych tam problemów.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

[Wzajemne położenie prostej i okręgu](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem.