

Wielokąty foremne

Wielokąty foremne

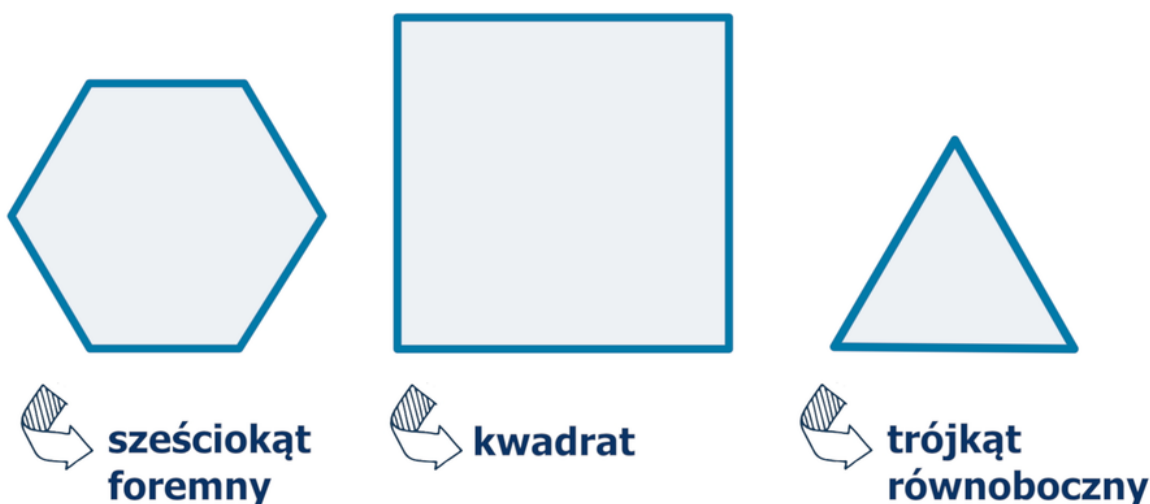
Wielokąty foremne mają wiele ciekawych zastosowań w architekturze i sztuce. Na przestrzeni lat architekci różnych kultur tworzyli budowle, wykorzystujące wielokąty foremne jako podstawę do budowy ich konstrukcji.

Z tego materiału dowiesz się:

- czym jest wielokąt foremny,
- jakie figury są wielokątami foremnymi,
- jak rozpoznać wielokąt foremny.

Zapoznaj się z poniższą animacją, aby poznać najczęściej spotykane wielokąty foremne.

Wystąpił błąd



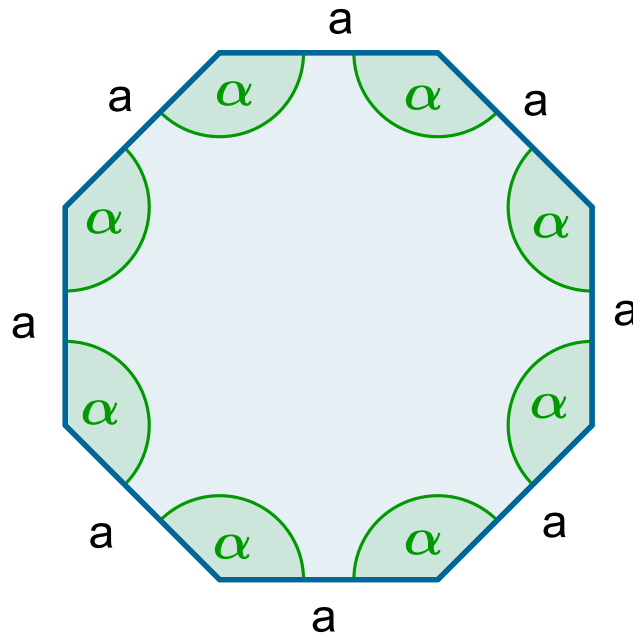
Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1bRDSumWAYrF>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia przykłady wielokątów foremných: sześciokąt foremny, kwadrat oraz trójkąt równoboczny.

Definicja: Wielokąt foremny

Wielokątem foremnym nazywamy wielokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąt foremny

Ważne!

Trójkąt równoboczny jest wielokątem, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.

Jest on przykładem wielokąta foremnego.

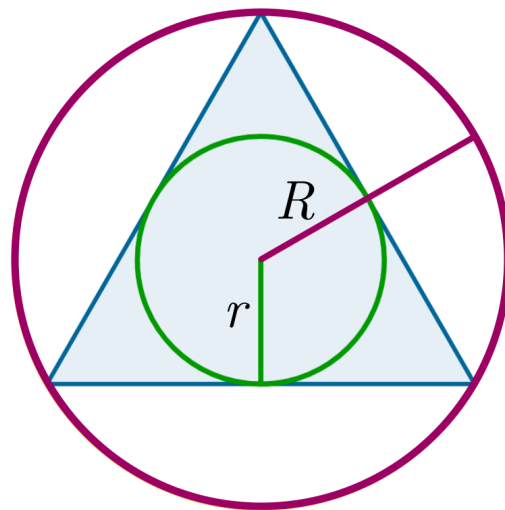
Zapamiętaj!

Zauważmy, że środki okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym pokrywają się. Środek okręgu wpisanego (opisanego) leży w punkcie przecięcia wysokości trójkąta.

Tylko w trójkącie równobocznym punkt przecięcia się symetralnych oraz dwusiecznych leży w punkcie przecięcia wysokości.

Punkt przecięcia dzieli taki odcinek w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta.

Zatem promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.



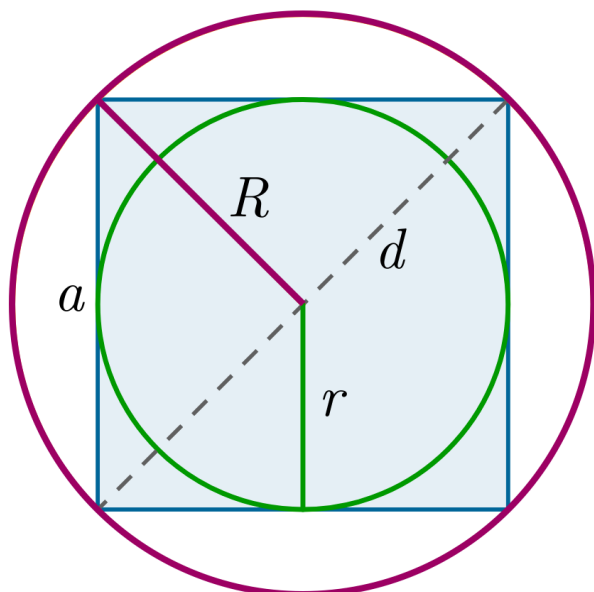
$$R = 2r$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czworokąt foremny

Zapamiętaj!

- Czworokąt, który jest wielokątem foremnym, to kwadrat.
- Na kwadracie można opisać okrąg i w kwadrat można wpisać okrąg.



$$r = 0,5a$$

$$R = 0,5d$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Promień okręgu wpisanego w kwadrat jest równy połowie długości boku kwadratu.
- Promień okręgu opisanego na kwadracie jest równy połowie długości jego przekątnej.

Polecenie 1

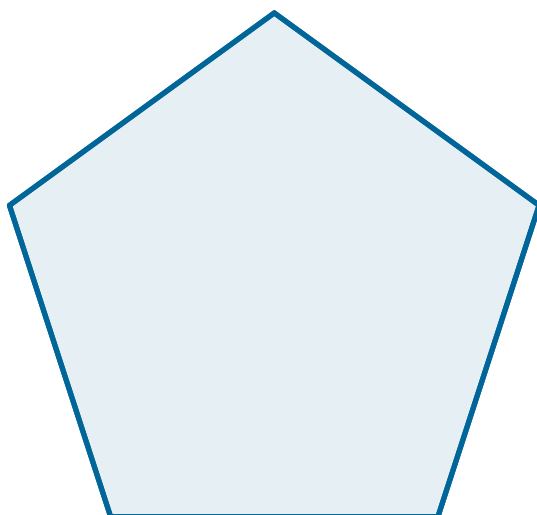
Narysuj na kartce kwadrat i:

- zaznacz jego przekątne,
- wytnij ten kwadrat,
- odrysuj go na kartce,
- połóż wycięty kwadrat tak, aby pokrywał rysunek,
- obróć wycięty kwadrat o 45° wokół punktu przecięcia przekątnych,
- obrysuj figurę, która powstała z kwadratu narysowanego i wyciętego.

Jak myślisz, czy powstały wielokąt jest wielokątem foremnym?

Pięciokąt foremny

Kolejnym wielokątem foremnym jest pięciokąt foremny.

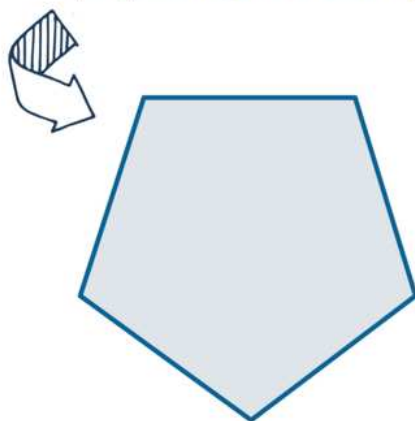


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wielu wybitnych matematyków poszukiwało najprostszych sposobów konstrukcji tego wielokąta przy pomocy cyrkla i linijki. Poniżej przedstawiona jest jedna z najbardziej znanych konstrukcji. Spróbuj wykonać ją w zeszycie.

Wystąpił błąd

pięciokąt foremny



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R207XCDAr0LtC>

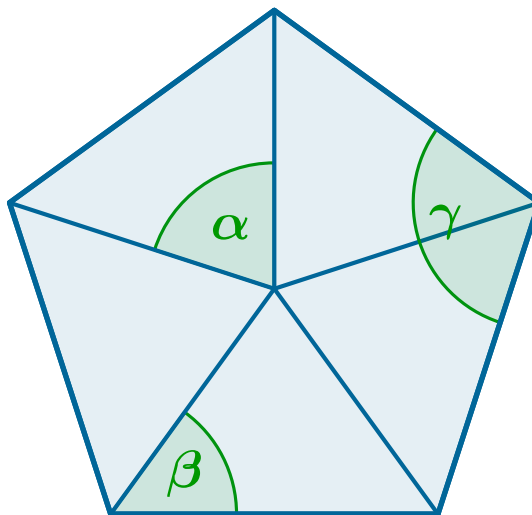
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia kolejne etapy konstrukcji pięciokąta foremnego.

Przykład 1

Obliczymy miary kątów pięciokąta.

W tym celu dzielimy go na trójkąty równoramienne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt między równymi ramionami każdego z tych trójkątów to piąta część kąta 360° .

$$\alpha = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ.$$

Zatem kąt przy podstawie trójkąta:

$$\beta = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ.$$

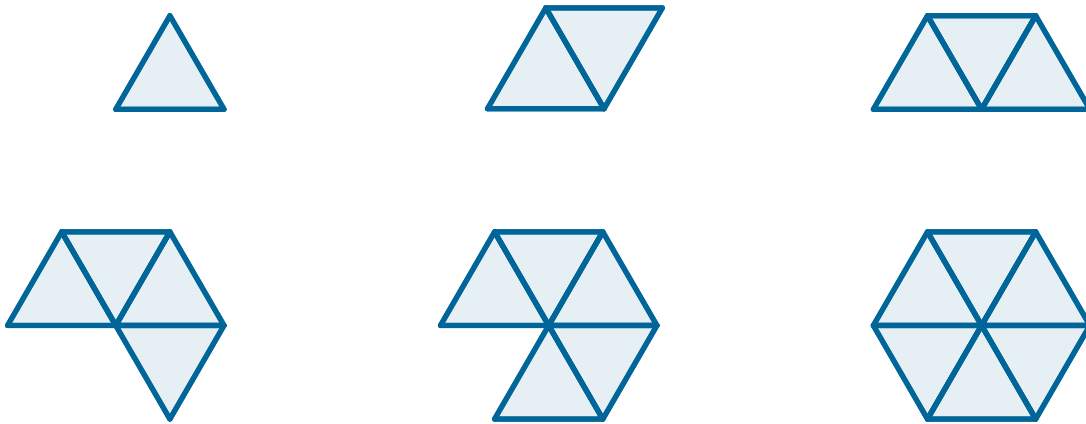
Kąt pięciokąta jest dwukrotnie większy od kąta β

$$\gamma = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ.$$

Każdy kąt pięciokąta foremnego ma więc miarę 108° .

Sześciokąt foremny

Zauważmy, że w trójkącie równobocznym każdy z kątów ma miarę 60° . Możemy więc takie trójkąty ułożyć w ten sposób, aby miały jeden punkt wspólny tak, jak na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Powstanie wtedy sześciokąt o równych bokach. Każdy kąt tego wielokąta ma miarę:

$$2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

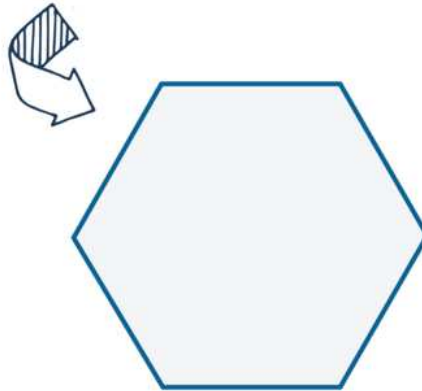
Jest to więc wielokąt foremny. Nazywamy go sześciokątem foremnym.

Zauważmy, że długość boku sześciokąta jest równa połowie dłuższej przekątnej.

Poniżej przedstawiona jest konstrukcja sześciokąta. Spróbuj wykonać ją w zeszycie.

Wystąpił błąd

sześciokąt foremny



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RqUVjbeHQkHko>

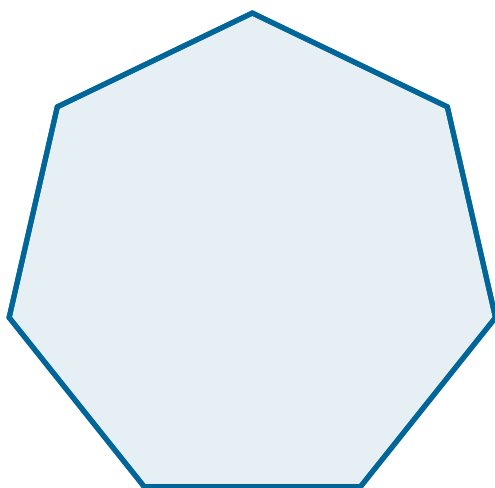
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia konstrukcję sześciokąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki.

Siedmiokąt foremny

Ciekawostka

Siedmiokąt można narysować, wykorzystując konstrukcję neusis [njusis], co oznacza po grecku „dopasowanie”. Jest to konstrukcja geometryczna, w której, w odróżnieniu od konstrukcji klasycznej, oprócz cyrkla używa się linijki z podziałką (z dwoma zaznaczonymi punktami).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciekawostka

Siedmiokąt foremny jest przykładem wielokąta foremnego, którego nie można skonstruować jedynie za pomocą linijki i cyrkla. Udowodnił to wybitny niemiecki matematyk Karol Gauss [Karol Gaus] (1777 – 1855), który tym samym położył kres wielowiekowemu wysiłkom matematyków próbujących znaleźć taką konstrukcję.

Polecenie 2

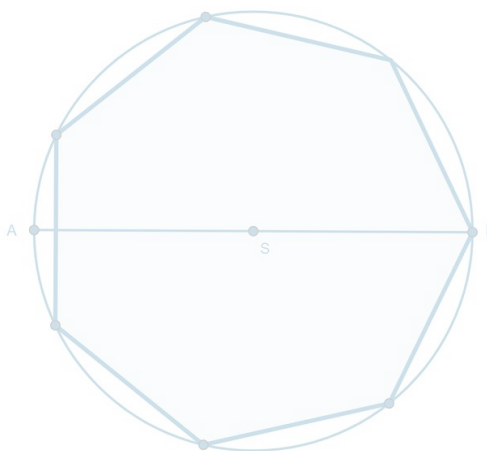
Zapoznaj się z poniższym apletem.

Przybliżona konstrukcja siedmiokąta foremnego

← Etap 1 z 12 →

Oto opis przybliżonej konstrukcji siedmiokąta foremnego wpisanego w koło o środku S.

Wybieramy punkt A i znajdujemy jego obraz B w symetrii względem środka S okręgu.
Kreślimy średnicę AB koła o środku S.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyKt6AbYX>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

Własności wielokąta foremnego:

- wszystkie boki równe,
- wszystkie kąty równe,
- można na nim opisać okrąg,
- można weń wpisać okrąg,
- środki okręgu wpisanego i opisanego pokrywają się,
- przekątne nie muszą być równe.

Wielokąty gwiaździste

Wykorzystując niektóre wielokąty foremne, można budować wielokąty, zwane gwiaździstymi.

Najpopularniejszym z nich jest pięciokąt gwiazdzisty znany od czasów starożytnych pod nazwą pentagramu. Rysunek pentagramu był znakiem rozpoznawczym uczniów Pitagorasa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

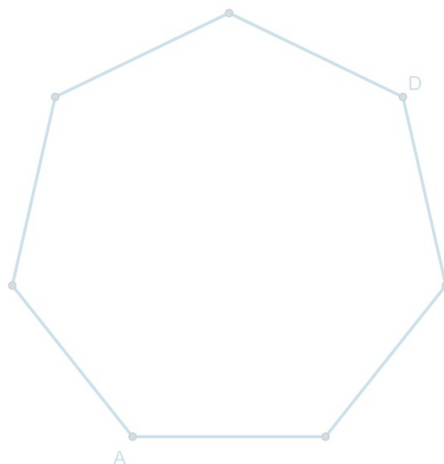
Na bazie siedmiokąta można wykreślić siedmiokąt gwiazdzisty zwany z greckiego heptagramem.

Siedmiokąt gwiazdzisty (heptagram)

etap 1 z 3



Poprowadźmy wszystkie możliwe przekątne siedmiokąta foremnego (heptagonu).
Wykreślmy przekątne, omijając za każdym razem jeden wierzchołek siedmiokąta.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyKt6AbYX>

Przykład 3

Tworząc formy gwiazdziste, kreślimy przekątne wielokąta, omijając za każdym razem tę samą liczbę wierzchołków. Inną gwiazdę otrzymamy, gdy będziemy omijać dwa wierzchołki, inną, gdy trzy.

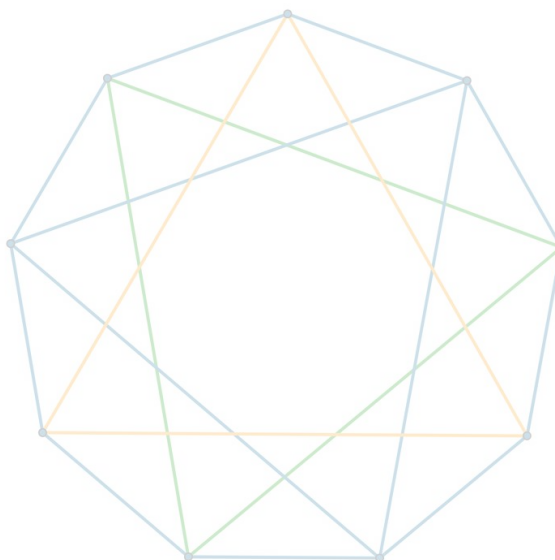


Przekątne dziewięciokąta foremnego

etap 2 z 5



Zauważmy, że przekątne te nie były prowadzone w sposób przypadkowy. Każda z nich łączyła dwa wierzchołki z ominięciem jednego wierzchołka.

Spróbujmy ominąć dwa wierzchołki. Czy można tę gwiazdę dziewięciokątną wykreślić jednym ruchem bez odrywania ołówka?

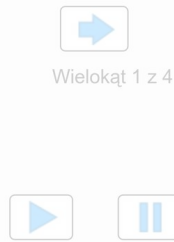


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyKt6AbYX>

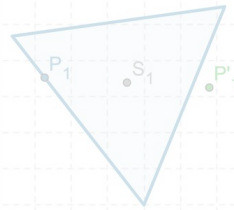
Przykład 4

Zastanówmy się, czy wielokąty foremne są figurami środkowosymetrycznymi. Sprawdźmy to, wykorzystując poniższy aplet.

Przesuwając punkty odpowiednio P_1, P_2, \dots po bokach wielokątów, obserwujemy zmianę położenia punktów P_1', P_2', \dots . Punkty P_1', P_2', \dots są obrazami punktów P_1, P_2, \dots w symetrii środkowej o środkach w punktach S_1, S_2, \dots odpowiednio.



Wielokąt 1 z 4



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DyKt6AbYX>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że środek symetrii mają tylko wielokąty foremne o parzystej liczbie wierzchołków.

Ćwiczenie 1



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciekawostka

Większość ciał stałych ma budowę krystaliczną. Charakteryzuje się ona regularnym ułożeniem atomów, które tworzą tzw. siatkę krystaliczną. Bardzo często atomy w kryształach ułożone są w wierzchołkach wielokątów foremnych, a te z kolei tworzą struktury mające kształt brył nazywanych wielościanami foremnymi.

Ćwiczenie 2



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Skonstruuj kwadrat

1. o boku długości 4 cm,
2. którego obwód jest równy 20 cm,
3. którego przekątna ma długość 4 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Odpowiedz na pytania.

1. Czy wielokąty foremne są osiowosymetryczne?
2. Ile osi symetrii ma trójkąt równoboczny?
3. Ile osi symetrii ma kwadrat? A ile pięciokąt foremny?
4. Ile osi symetrii ma n – kąt foremny?

Ćwiczenie 5



Skonstruuj sześciokąt foremny.

Wykorzystując konstrukcję sześciokąta foremnego, skonstruuj dwunastokąt foremny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Na kwadracie można opisać okrąg. Wyjaśnij, czy to jedyny czworokąt, na którym można opisać okrąg? Jeżeli nie, narysuj inne czworokąty, na których można opisać okrąg.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Narysuj sześciokąt foremny o boku 3 cm i opisz na nim okrąg.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



- Wielokąt, który ma wszystkie boki równe jest wielokątem foremnym.
- Wielokąt, który ma wszystkie kąty równe jest wielokątem foremnym.
- Czworokąt foremny ma środek symetrii.
- Sześciokąt foremny ma środek symetrii.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Narysuj kwadrat. Zaznacz środki jego boków. Połącz zaznaczone punkty tak, aby otrzymać czworokąt. Wyjaśnij, czy otrzymany czworokąt jest wielokątem foremnym? Dlaczego?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Narysuj kwadrat. Podziel każdy z jego boków na trzy równe części. Połącz punkty podziału tak, aby otrzymać ośmiokąt. Wyjaśnij, czy otrzymany ośmiokąt jest wielokątem foremnym? Dlaczego?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Narysuj trójkąt równoboczny. Zaznacz środki jego boków. Połącz zaznaczone punkty tak, aby otrzymać trójkąt. Wyjaśnij, czy otrzymany trójkąt jest wielokątem foremnym? Dlaczego?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Narysuj trójkąt równoboczny. Podziel każdy z jego boków na trzy równe części. Połącz punkty podziału tak, aby otrzymać sześciokąt. Wyjaśnij, czy otrzymany sześciokąt jest wielokątem foremnym? Dlaczego?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

