Cechy przystawania trójkątów prostokątnych

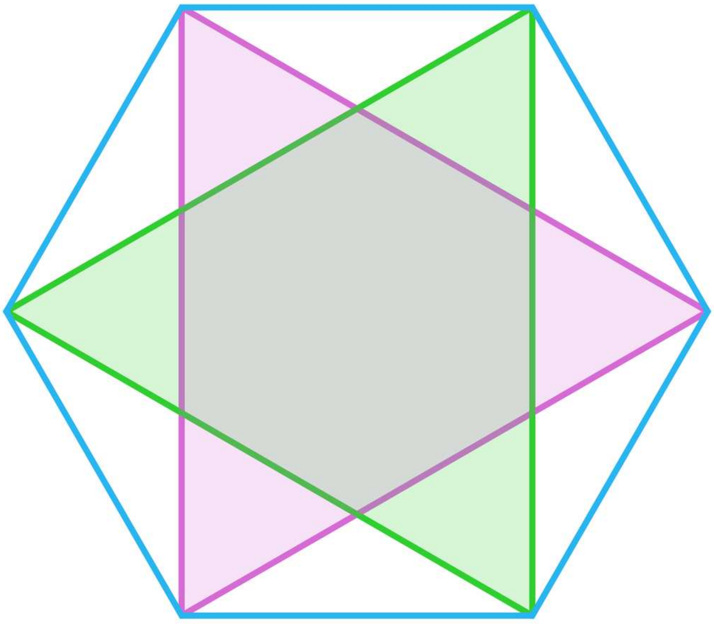
Cechy przystawania trójkątów prostokątnych

Źródło: Michell Luo, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

O podziale na trójkąty sześciokąta gwiaździstego foremnego

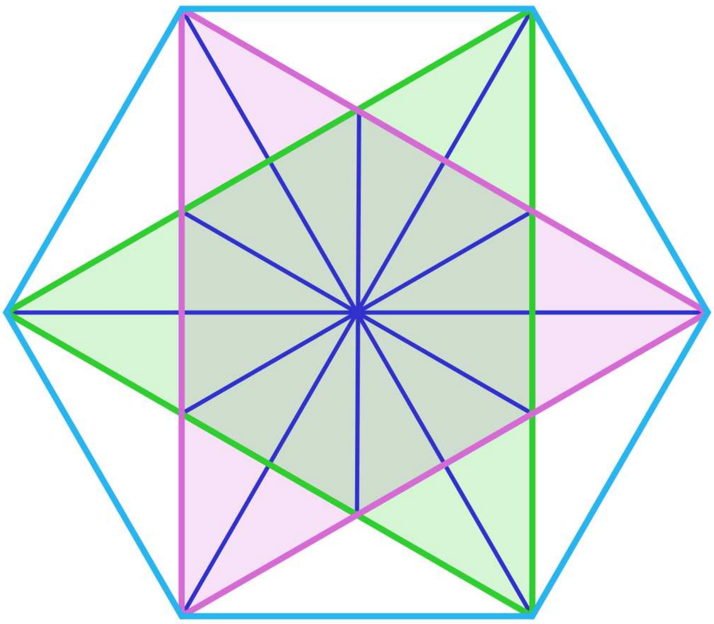
Dla danego n–kąta foremnego możemy rozważyć łamaną zamkniętą o n wierzchołkach, utworzoną z tych przekątnych tego wielokąta, które mają równą długość – otrzymujemy wówczas wielokąt foremny gwiaździsty.

Tak zdefiniowane pojęcie można uogólnić i dopuścić możliwość nakładanie się wielokątów zbudowanych z przekątnych równej długości. Wówczas sześciokątem gwiaździstym foremnym nazwiemy figurę, która powstanie w wyniku nałożenia na siebie dwóch trójkątów równobocznych, jak na rysunku.



Sześciokąt foremny gwiaździsty

Poprowadzimy teraz przekątne wyjściowego sześciokąta oraz przekątne sześciokąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia trójkątów wyznaczających sześciokąt gwiaździsty.



Triangulacja sześciokąta gwiaździstego

Odcinki te podzieliły figurę na przystające trójkąty prostokątne – ich przystawanie pozwala łatwo wyznaczać związki miarowe między bokami wyjściowego sześciokąta foremnego i sześciokątem gwiaździstym. Przystawanie trójkątów prostokątnych jest tematem tego materiału.

Twoje cele

- Zastosujesz cechy przystawania trójkątów do badania przystawania trójkątów prostokątnych.
- Zastosujesz cechy przystawania trójkątów prostokątnych.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Trójkąty przystające

Wiemy, że trójkąty są przystające, gdy ich odpowiednie boki mają równe długości i odpowiednie kąty mają równe miary. Oznacza to, że przystawanie trójkątów jest zdefiniowane poprzez równości trzech par boków oraz trzech par odpowiednich kątów – tym samym definicja wymaga jednoczesnego spełnienia sześciu warunków. Znamy jednak podstawowe twierdzenia ustalające warunki równoważne przystawaniu trójkątów, w których wystarczy zbadać trzy spośród sześciu warunków – są to cechy przystawania trójkątów.
Pierwsza z cech orzeka, że trójkąty są przystające, jeśli boki jednego trójkąta są równe odpowiednim bokom w drugim trójkącie (cecha bok – bok – bok, krótko *bbb*).
Druga cecha stwierdza, że trójkąty są przystające, jeśli dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiednim dwóm bokom drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi parami boków w obu trójkątach są równe (cecha bok – kąt – bok, krótko *bkb*).
Wreszcie trzecia cecha (kąt – bok – kąt, krótko *kbk*) stwierdza, że trójkąty są przystające, jeśli jeden bok pierwszego trójkąta i kąty przyległe do tego boku są równe odpowiednio bokowi i kątom przyległym do tego boku w drugim trójkącie.

Przystawanie trójkątów prostokątnych

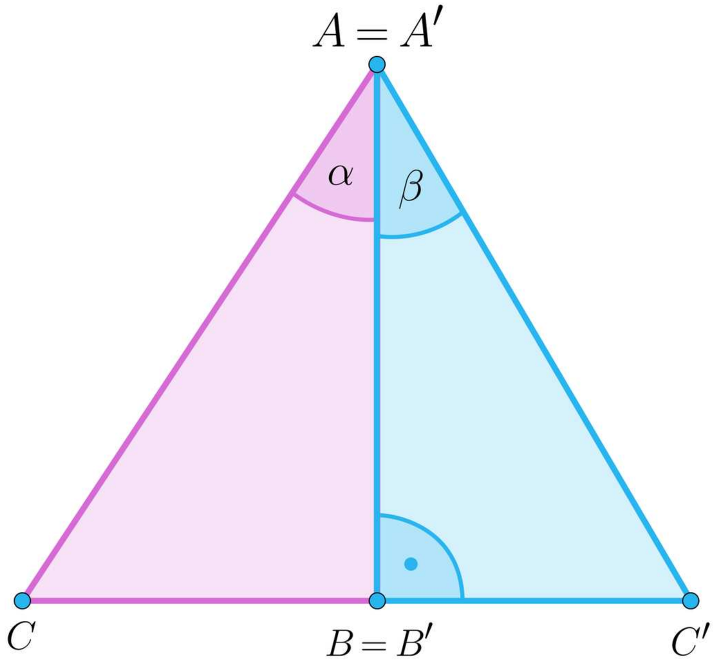
Pokażemy, że w trójkącie prostokątnym te cechy można sformułować jeszcze inaczej. Udowodnimy na wstępie poniższe twierdzenie

Twierdzenie: Pierwsza cecha przystawania trójkątów prostokątnych

Jeżeli przeciwprostokątna i jedna z przyprostokątnych jednego trójkąta są odpowiednio równe przeciwprostokątnej i jednej z przyprostokątnych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Dowód

Rozważmy trójkąty prostokątne ABC oraz $A'B'C'$, o kątach prostych przy wierzchołkach odpowiednio B i B', takie, że $|AC| = |A'C'|$ oraz $|AB| = |A'B'|$.
Rozważmy takie położenie tych trójkątów, w którym wierzchołki A i A', oraz B i B', się pokrywają, jak na rysunku.



Pierwsza cecha przystawania trójkątów prostokątnych

Zauważmy, że wówczas $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ$, co oznacza, że punkty C, B, C' są współliniowe, a punkty C, A, C' są wierzchołkami trójkąta równoramiennego o wysokości AB. Ponieważ w trójkącie równoramiennym CAC' wysokość AB jest jednocześnie dwusieczną kąta $\sphericalangle CAC$', więc $\alpha = \beta$. Zatem $\triangle ABC \equiv \triangle A$'$B$'$C$' na mocy cechy *bkb* przystawania trójkątów (dowolnych).

Twierdzenie: Druga cecha przystawania trójkątów prostokątnych

Jeżeli dwie przyprostokątne jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm przyprostokątnym drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Dowód

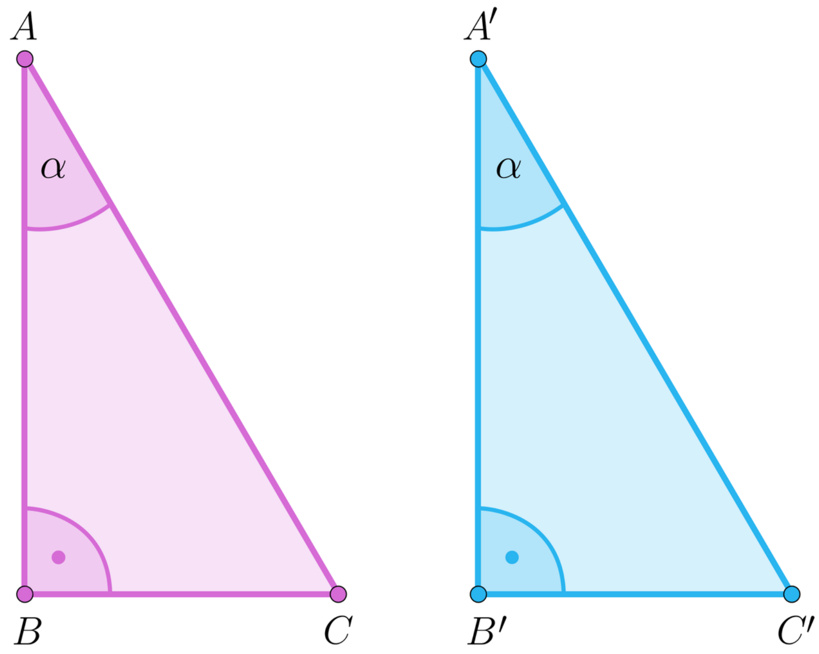
Rozważmy trójkąty prostokątne ABC oraz A'B'C', o kątach prostych przy wierzchołkach odpowiednio B i B', takie, że $|BC| = |B$'C'$|$ oraz $|AB| = |A$'B'$|$. Zauważmy, że ponieważ kąty między parami przyprostokątnych (kąty proste) są odpowiednio równe w obu trójkątach, to na mocy cechy *bkb* przystawania trójkątów (dowolnych) mamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle A$'$B$'$C$'.

Twierdzenie: Trzecia cecha przystawania trójkątów prostokątnych

Jeżeli przyprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego trójkąta są odpowiednio równe przyprostokątnej i jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Dowód

Rozważmy trójkąty prostokątne ABC oraz $A'B'C'$, o kątach prostych przy wierzchołkach odpowiednio B i B', takie, że $|AB| = |A'B'|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle B'A'C'|$, jak na rysunku.



Trzecia cecha przystawania trójkątów prostokątnych

Zauważmy, że wówczas przy równych bokach AB oraz $A'B'$ pary kątów przyległych są odpowiednio równe. Zatem na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów (dowolnych) mamy, że $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Twierdzenie: Czwarta cecha przystawania trójkątów prostokątnych

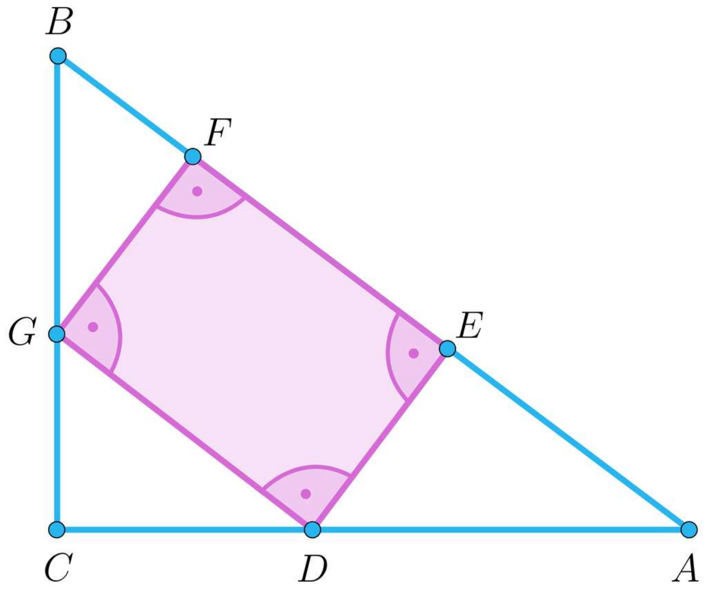
Jeżeli przeciwprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego trójkąta są odpowiednio równe przeciwprostokątnej i jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Dowód

Zauważmy, że teza wynika natychmiast z cechy *kbk* przystawania trójkątów (dowolnych), jak w poprzednim dowodzie.

Przykład 1

Rozważmy trójkąt ABC, w którym $|BC| = 3$ oraz $|AC| = 4$. Na boku AB leżą wierzchołki E, F prostokąta, którego dwa pozostałe wierzchołki leżą odpowiednio na pozostałych bokach danego trójkąta, jak na rysunku.



Wyznaczymy pole prostokąta $DEFG$, jeśli $\triangle GFB \equiv \triangle DCG$.

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że trójkąt DCG jest trójkątem prostokątnym, ponieważ trójkątem prostokątnym jest trójkąt GFB. Zatem jeden z jego kątów jest prosty i musi to być kąt przy wierzchołku C. Ale to oznacza oczywiście, że trójkąt ABC także jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 5. Zauważmy, że trójkąt ABC oraz trójkąty ADE, DGC oraz GBF są podobne.

Przyjmijmy $|BG| = x = |DG| = |EF|$, wtedy: $|CG| = 3 - x = |BF|$ oraz $|GF| = \frac{4}{5}x = |DE|$.

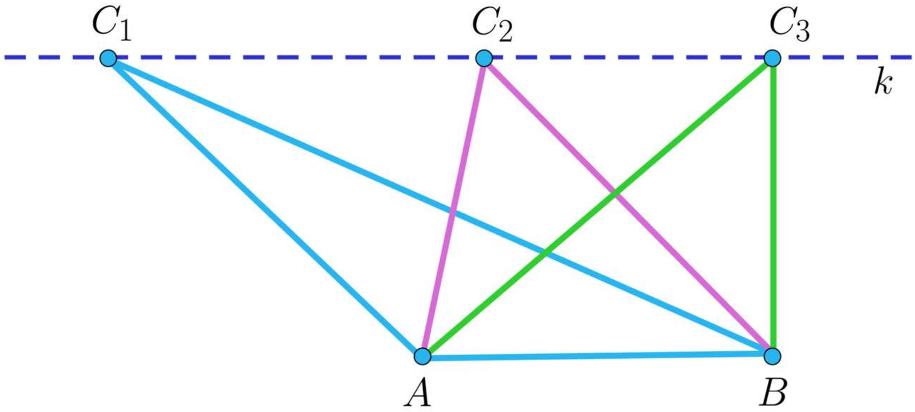
Z podobieństw odpowiednich trójkątów wynika także, że $\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{3}{4}$, stąd $|AE| = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}x\right) = \frac{16}{15}x$.

Ponieważ $|AE| + |EF| + |BF| = |AB| = 5$, więc $\frac{16}{15}x + x + (3 - x) = 5$.

Stąd $x = \frac{15}{8}$, a pole prostokąta jest równe $\frac{15}{8} \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{8}\right) = \frac{45}{16}$.

Pole a przystawanie trójkątów

Przypuśćmy, że dane są dwa trójkąty o równych polach, w których jeden z boków jednego trójkąta jest równy bokowi w drugim trójkącie. Oczywiście tak zadane warunki nie są warunkiem wystarczającym, by trójkąty te były przystające, co łatwo zauważyć analizując poniższy rysunek.



Pole a przystawanie trójkątów

Jeśli prosta k jest równoległa do podstawy AB każdego z narysowanych trójkątów, a różne wierzchołki C_1, C_2, C_3 leżą na tej prostej, to pola trójkątów AC_1B, AC_2B oraz AC_3B są równe. Jednocześnie widać, że te trójkąty nie mogą być przystające (byłoby to możliwe dla dwóch spośród takiej trójki trójkątów, które byłyby symetryczne względem symetralnej podstawy AB).

Jednak w przypadku trójkątów prostokątnych jest inaczej. Oczywiście, jeśli dwa trójkąty mają po jednej przyprostokątnej równej długości i oba te trójkąty mają równe pola, to stąd wynika natychmiast równość także drugich przyprostokątnych, co na mocy drugiej cechy przystawania trójkątów prostokątnych pozwala stwierdzić, że takie trójkąty są przystające. Zajmiemy się więc poniżej przypadkiem nieco trudniejszym.

Przykład 2

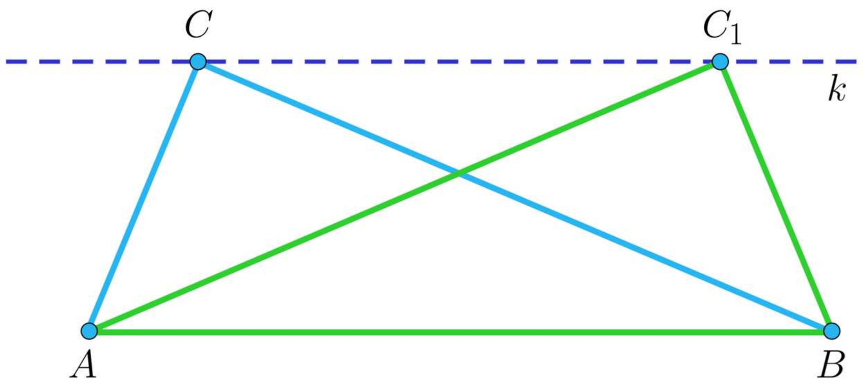
Pokażemy, że jeśli dwa trójkąty prostokątne o równych przeciwprostokątnych mają równe pola, to są przystające.

Rozwiązanie:

Rozważmy trójkąty prostokątne ABC i $A_1B_1C_1$, o kątach prostych odpowiednio przy wierzchołkach C oraz C_1 i takie, że przeciwprostokątne mają równe długości, czyli $|AB| = |A_1B_1|$.

Rozważmy takie położenie tych trójkątów, by $A = A_1$ oraz $B = B_1$, a wierzchołki C oraz C_1 leżały po jednej stronie prostej AB.

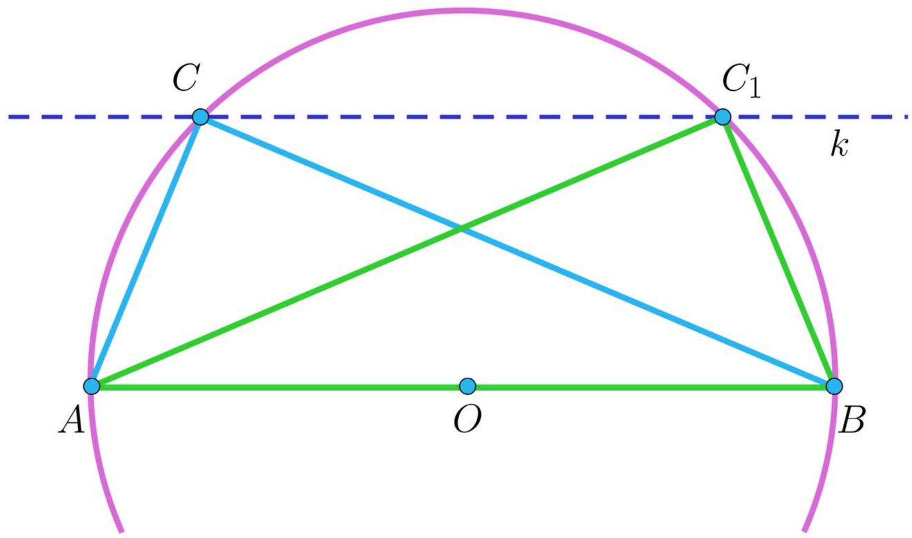
Równość pól obu oznacza, że wierzchołki C oraz C_1 leżą w tej samej odległości od prostej AB, czyli na pewnej prostej k równoległej do AB, jak na rysunku.



Pole a przystawanie trójkątów prostokątnych

Jeśli $C = C_1$ to przystawanie odpowiednich trójkątów jest oczywiste.

Przypuśćmy więc, że punkty C, C_1 są różne. Wiemy, że każdy trójkąt prostokątny można wpisać w okrąg, którego średnicą jest przeciwprostokątna. Zatem wierzchołki kąta prostego muszą leżeć zarówno na prostej k, jak i na okręgu, którego średnicą jest bok AB. Tym samym istnieją co najwyżej dwa takie punkty (wspólne prostej i okręgu). Dołączmy zatem do rysunku okrąg o średnicy AB i środku O.



Pole a przystawanie trójkątów prostokątnych – dowód

Pozostaje teraz przywołać twierdzenie dotyczące geometrii w okręgu:

- w każdym okręgu kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary;
- równe miary mają kąty wpisane oparte na dwóch łukach równej długości;
- jeżeli łuki tego samego okręgu są równej długości, to odpowiadające im cięciwy są także równej długości.

Proste AB i CC_1 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $|\sphericalangle BAC_1| = |\sphericalangle AC_1C|$, ale to oznacza (patrz powyższe stwierdzenia), że w szczególności $|AC| = |BC_1|$. Zatem na mocy pierwszej cechy przystawania trójkątów prostokątnych (równość przeciwprostokątnych i jednej pary przyprostokątnych) mamy $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Słownik

cechy przystawania trójkątów

zestaw twierdzeń określających warunki równoważne występowania relacji przystawania między dwoma trójkątami

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet. Zmieniaj położenie wyróżnionego punktu D leżącego na przyprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC w taki sposób, aby dwa spośród trójkątów CBD, EBD oraz EAD, na które podzielony jest trójkąt ABC były przystające.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DZFn52w2W

Polecenie 2

Wyznacz wszystkie wartości miary kąta DBE, dla których dwa spośród trójkątów CBD, EBD oraz EAD są przystające.

Polecenie 3

Rozważmy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej AB. Punkty D oraz E leżą odpowiednio na przyprostokątnej AC oraz przeciwprostokątnej AB w taki sposób, że odcinek DE jest prostopadły do boku AB. Wyznacz kąty tego trójkąta, jeśli $\triangle EAD \equiv \triangle EBD \equiv \triangle CBD$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta prostokątnego ABC, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli ten trójkąt na dwa trojkąty o równych polach, to trójkąt ABC jest równoramienny.

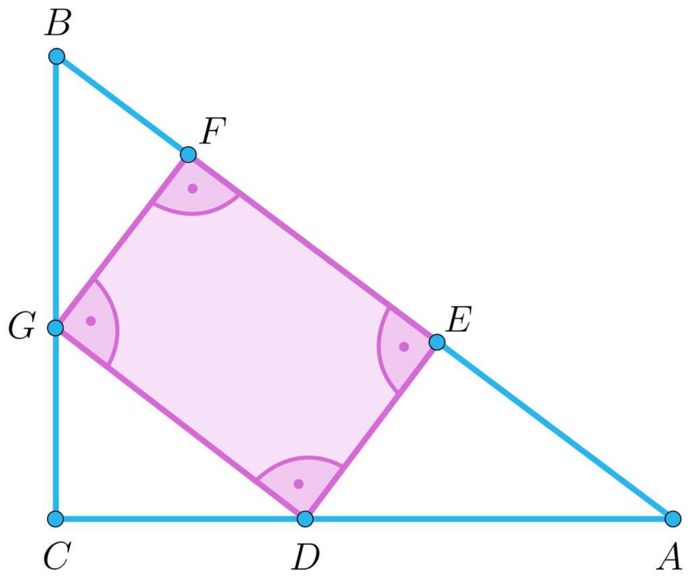
Ćwiczenie 2

Wykaż, że dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równo odległych od jego ramion.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC, o przeciwprostokątnej AB długości 12. Na boku AB leżą wierzchołki E, F kwadratu o polu równym 16, którego dwa pozostałe wierzchołki leżą odpowiednio na pozostałych bokach danego trójkąta, jak na rysunku.



Kwadrat wyznaczył trzy trójkąty prostokątne, z których dwa są przystające. Wyznacz pole trójkąta ABC.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Cechy przystawania trójkątów prostokątnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków;

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie figur przystających;
- wykorzystuje pojęcie trójkątów przystających;
- stosuje cechy przystawania trójkątów;
- wykorzystuje cechy przystawania trójkątów prostokątnych;

- przeprowadza dowody geometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- stoliki zadaniowe.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia wielokątów foremnych i wielokątów gwiaździstych. Prosi o rozstrzygnięcie problemu istnienia sześciokąta gwiaździstego oraz proponuje rozszerzenie klasycznej definicji wielokątów gwiaździstych na figury będące sumą mnogościową wielokątów złożonych z jednakowych przekątnych danego wielokąta, a następnie proponuje dokonać podziału tak otrzymanej figury na przystające trójkąty prostokątne.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia przystawania trójkątów i cech przystawania trójkątów.
2. Następnie nauczyciel formułuje pierwszą cechę przystawania trójkątów prostokątnych i prosi uczniów, by w parach zastanowili się nad dowodem tego twierdzenia, przy wykorzystaniu cech przystawania trójkątów (dowolnych). Wybrany uczeń przeprowadza dowód przy tablicy.
3. Następnie nauczyciel prosi o podanie innych warunków równoważnych przystawaniu trójkątów prostokątnych. Uczniowie formułują odpowiednie warunki – nauczyciel doprecyzowuje stwierdzenia uczniów, które są zapisywane w notatnikach, jako kolejne

trzy cechy przystawania trójkątów prostokątnych. Nauczyciel dzieli klasę na trzy grupy, z których każda ma przeprowadzić dowód jednej z podanych cech przystawania. Wybrany reprezentant grupy prezentuje dowód.
4. Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 1 i prosi o jego rozwiązanie. Uczniowie pracują w parach. Wybrany uczeń omawia rozwiązanie.
5. Nauczyciel formułuje zagadnienie zależności między polem a przystawaniem trójkątów. Na przygotowanym wcześniej rysunku omawia zagadnienie równości pól trójkątów o takiej samej podstawie, które nie są przystające i prosi uczniów o rozstrzygnięcie analogicznego zagadnienia dla trójkątów prostokątnych. Prosi o uzasadnienie odpowiedniej hipotezy w przypadku równości pól i równości przyprostokątnych. Następnie prezentuje problem opisany w Przykładzie 2. Uczniowie rozwiązują postawiony problem samodzielnie. Następnie wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie.
6. Na koniec nauczyciel prosi o uruchomienie Apletu i wykonanie dołączonych poleceń.
7. Uczniowie pracują metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa ćwiczenia interaktywne spośród: 2, 3, 5, 6, i 8) , wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne: 1 i 4, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

Cechy przystawania trójkątów

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach realizacji tematu o własnościach dwusiecznej.