



Własności pola

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności pola

Źródło: dostępny w internecie: [Fritz_the_Cat](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W tym temacie wyprowadzimy pojęcie pola. Ścisła definicja tego pojęcia, mimo, że wprowadzana jest już w szkole podstawowej, odwołuje się do przejść granicznych. My skoncentrujemy się głównie na intuicyjnych własnościach takich, jak fakt, że figury przystające mają równe pola. Często korzystać będziemy również z faktu, że dwa trójkąty o tych samych długościach podstaw i równych (odpowiednich) wysokościach mają równe pola. Warto zwrócić uwagę, że choć podczas rozwiązywania zadań będziemy korzystać z bardzo podstawowych i oczywistych własności, to zadania te nie zawsze będą łatwe.

Ponadto przypomnimy podstawowe wzory ze szkoły podstawowej oraz poznamy bardzo użyteczny wzór Picka.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na pola wielokątów.
- Zastosujesz własności pola do rozwiązywania zadań na dowodzenie.
- Wykorzystasz różne metody wyznaczania równości pól dwóch różnych figur,
- Zastosujesz wzór Picka.

Przeczytaj

Jako jednostkę pola obierzemy kwadrat o boku 1 (kwadrat jednostkowy). Pole danej figury jest równe liczbie kwadratów jednostkowych lub jego części mieszczących się całkowicie w mierzonej figurze.

Takie określenie pola niejawnie używa pojęcia granicy ciągu (jego części), pojęcia nieużywanego we wcześniejszych etapach edukacji. Jest to dolne oszacowanie pola figury i dobrze sprawdza się w typowych przypadkach.

Najczęściej używana definicja pola odwołuje się do konstrukcji, której idea polega na podziale płaszczyzny, na której znajduje się figura, siatką przylegających kwadratów. Następnie wybieramy te kwadraty, które mają choćby jeden punkt wspólny z figurą i sumujemy ich pola. Powtarzając powyższe podziały, zmniejszając długość boku kwadratu, suma pól kwadratów dobrze przybliży pole figury.

Pole wielokąta

Już wiesz

- **Pole kwadratu** o boku a :

$$P = a^2$$

- **Pole równoległoboku (prostokąta)** o boku a i wysokości h opuszczonej na ten bok:

$$P = a \cdot h$$

- **Pole trójkąta** o podstawie a i wysokości h opuszczonej na tę podstawę:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h$$

- **Pole trapezu** o podstawach a i b oraz wysokości h :

$$P = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$

- **Pole czworokąta o prostopadłych przekątnych** długości d_1 i d_2 :

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

Pole wielokąta w układzie współrzędnych

Dla zainteresowanych

Wzór Picka – praktyczny wzór na obliczanie pola [wielokąta prostego](#), którego wierzchołki są [punktami kratowymi](#) na płaszczyźnie.

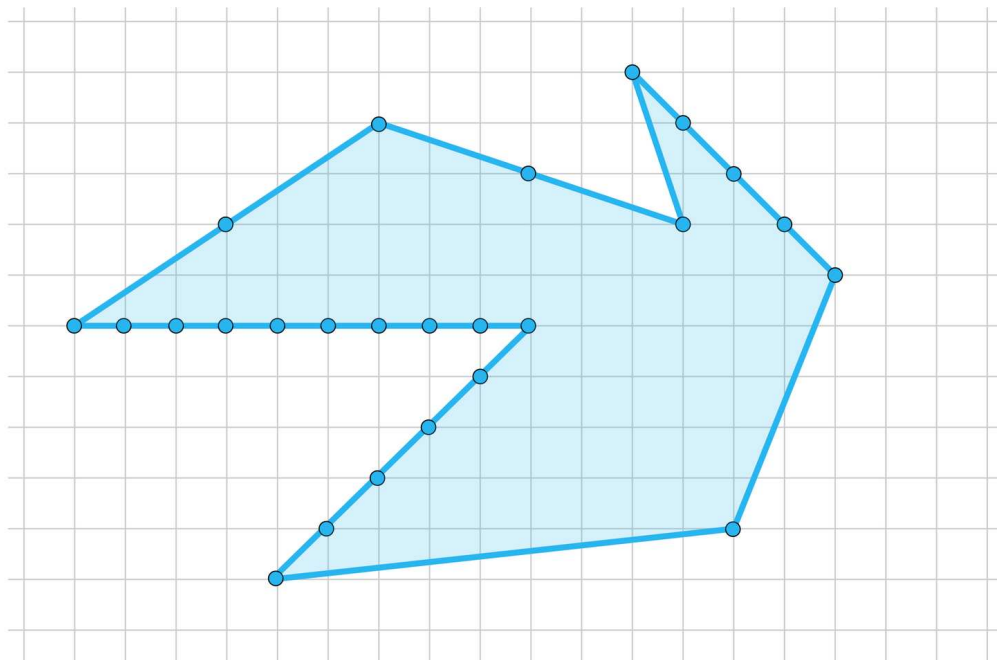
Zgodnie z tym wzorem pole wielokąta jest równe

$$S = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie:

W oznacza liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta,

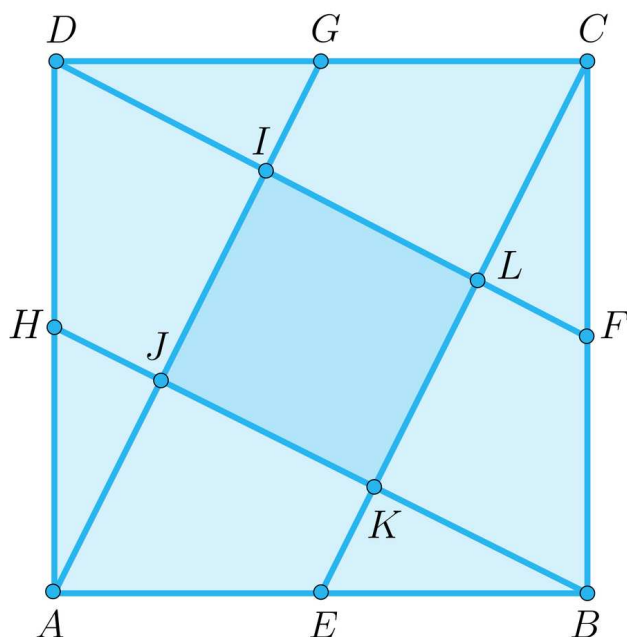
B oznacza liczbę punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta.



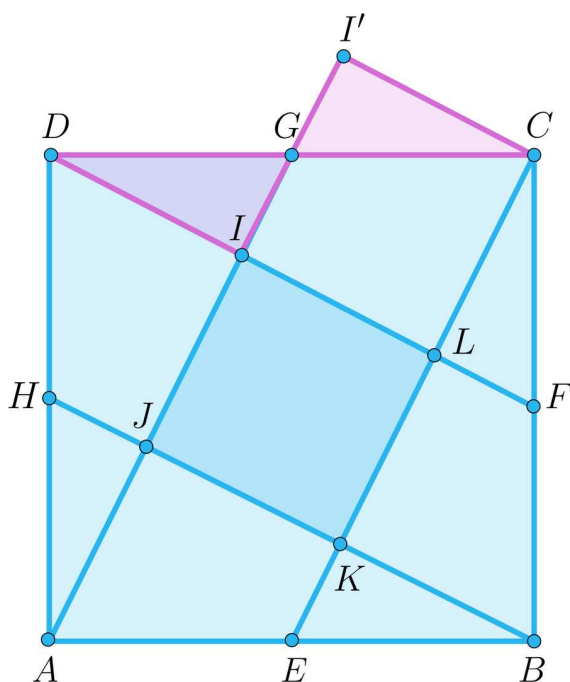
Powyższy wzór jest prawdziwy jedynie dla wielokątów prostych (złożonych z jednego kawałka i bez dziur).

Przykład 1

Kwadrat ma pole 100. Wierzchołki kwadratu połączono ze środkami przeciwległych boków. Wyznaczmy pole zacieniowanego kwadratu.



Rozwiązanie

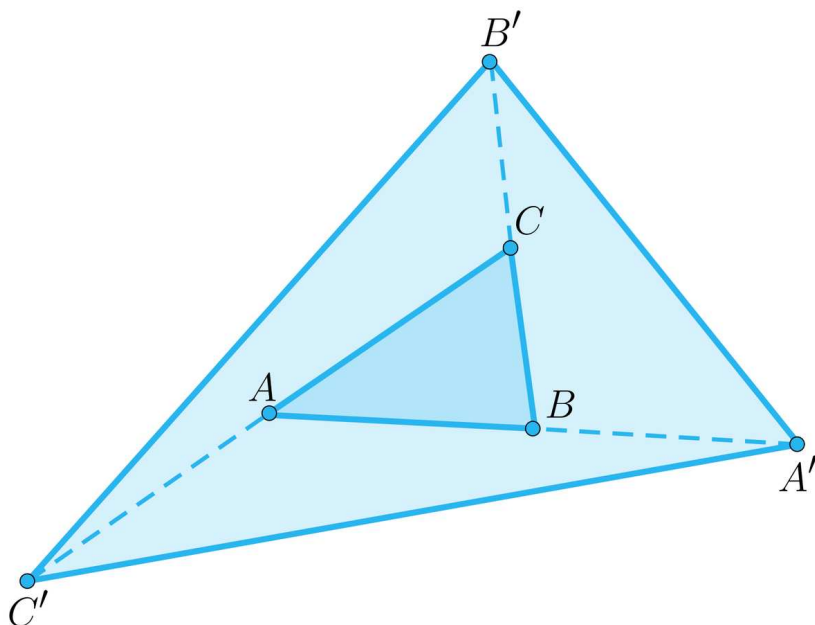


Zauważmy, że różowe trójkąty są przystające, więc kwadrat $ILCI'$ jest przystający do zacięniowanego. Podobnie możemy uzyskać pozostałe trzy inne przystające kwadraty. Duży kwadrat „składa się” z pięciu takich kwadratów. Więc szukane pole zacięniowanego kwadratu jest równe 20.

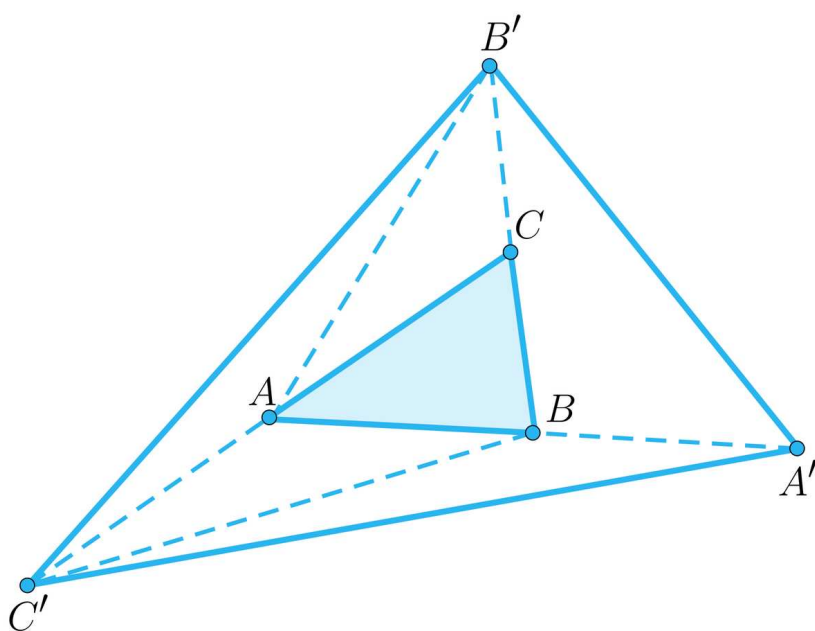
Przykład 2

Trójkąt ABC ma pole równe 1. Punkt A' leży na prostej AB , bliżej punktu B oraz $AB = BA'$. Punkt B' leży na prostej BC , bliżej punktu C oraz $BC = CB'$. Punkt C' leży

na prostej CA , bliżej punktu A oraz $CA = AC'$. Zastanówmy się jak obliczyć pole trójkąta $A'B'C'$.



Rozwiązanie



Wykorzystamy prosty fakt, że środkowa trójkąta dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. Dowód tej własności wynika bezpośrednio z definicji środkowej i wzoru na pole trójkąta. Korzystając z powyższej obserwacji dla trójkątów $AA'C$, $BB'A$, $CC'B$ dostajemy równości pól:

$$P_{ABC} = P_{A'BC}, P_{ABC} = P_{AB'C}, P_{ABC} = P_{ABC'}.$$

Podobnie dla trójkątów $AA'C'$, $BB'A'$, $CC'B'$ otrzymujemy równości:

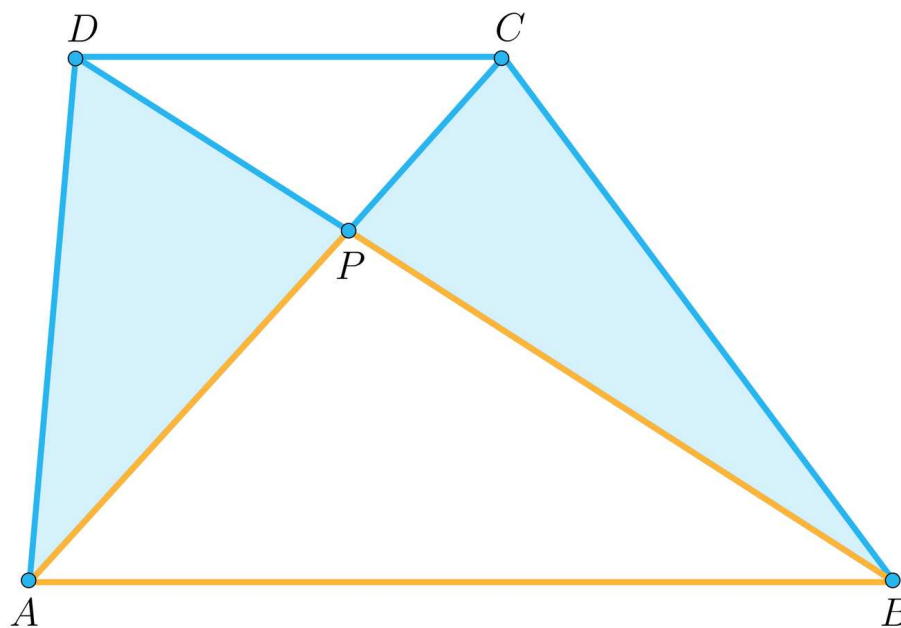
$$P_{CBA'} = P_{CB'A'}, P_{ACB'} = P_{AC'B'}, P_{AC'B} = P_{A'C'B}.$$

Więc pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe 7.

Przykład 3

Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie P . Uzasadnijmy, że pole trójkąta ADP jest równe polu trójkąta BCP .

Rozwiązanie



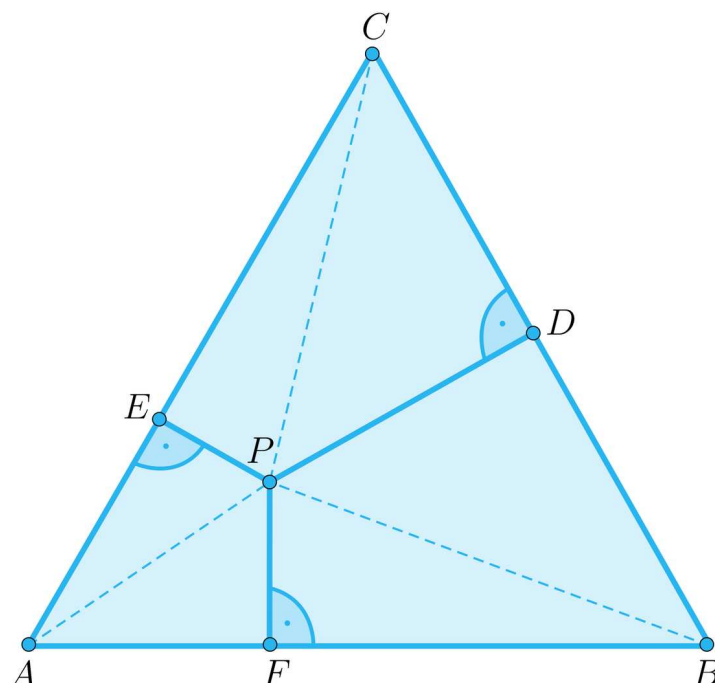
Zauważmy, że punkty D i C leżą na prostej równoodległej od prostej AB , więc trójkąty ABD i ABC mają taką samą podstawę i tę samą długość wysokości. Zatem mają równe pola $P_{ABD} = P_{ABC}$. Pola tych trójkątów są ponadto równe sumie pól trójkątów odpowiednio ADP i ABP oraz BCP i ABP . Odejmując obustronnie od równości $P_{ADP} + P_{ABP} = P_{BCP} + P_{ABP}$ wartość pola trójkąta ABP otrzymujemy tezę.

W następnym przykładzie wykorzystamy własności pola do udowodnienia ciekawej własności.

Przykład 4

Uzasadnimy, że suma odległości dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego od boków tego trójkąta jest stała, tzn. nie zależy od wyboru tego punktu.

Rozwiązanie



Oznaczmy długość boku trójkąta przez a , wysokość przez h oraz końce odcinków wyznaczających odległość punktu P od boków BC , CA , AB odpowiednio D , E , F .

Policzmy pole trójkąta równobocznego ABC na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h$$

oraz

$$P = P_{ABP} + P_{BCP} + P_{CAP} = \frac{1}{2}a \cdot |PF| + \frac{1}{2}a \cdot |PD| + \frac{1}{2}a \cdot |PE|.$$

Zatem otrzymujemy

$$\frac{1}{2}a \cdot (|PF| + |PD| + |PE|) = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

Dzieląc obustronnie powyższą równość przez $\frac{1}{2}a$ otrzymujemy

$$|PF| + |PD| + |PE| = h.$$

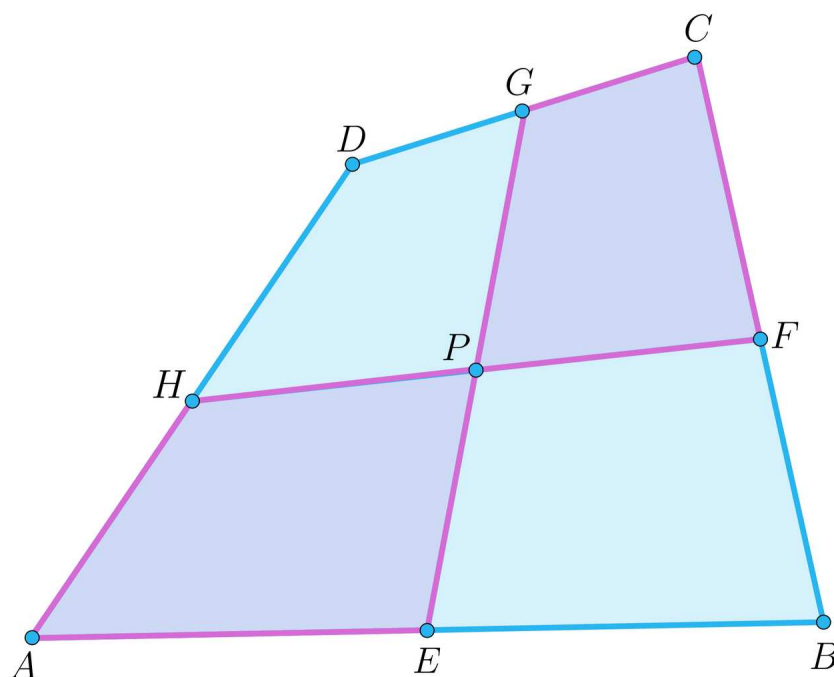
Zatem suma odległości nie zależy od wyboru punktu P i jest równa wysokości wyjściowego trójkąta równobocznego.

Zauważmy, że powyższe rozumowanie możemy zastosować do czworościanu i pokazać, że suma odległości dowolnego punktu P wewnątrz czworościanu foremnego od ścian tego czworościanu jest stała.

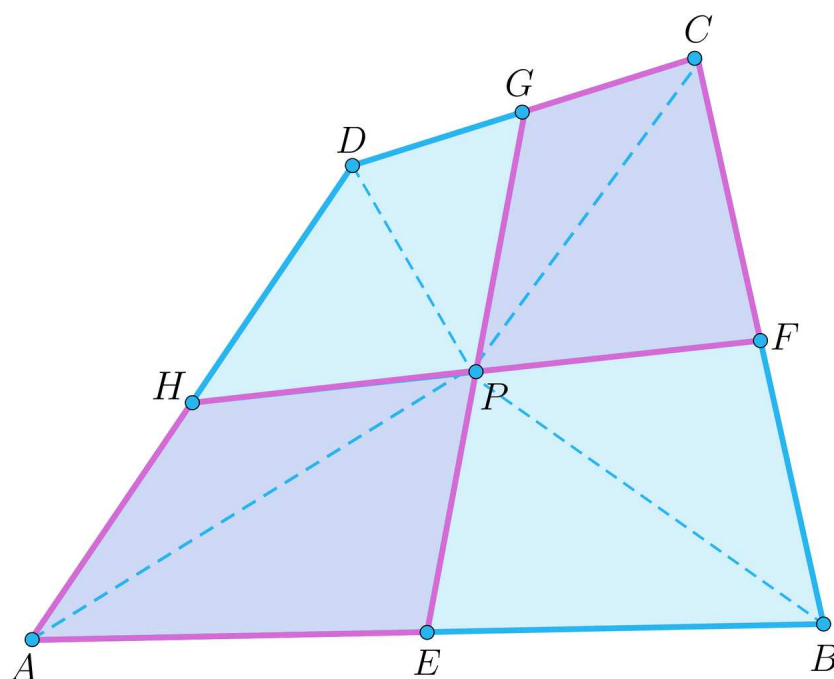
Przykład 5

Punkty E , F , G , H są środkami odcinków odpowiednio AB , BC , CD , DA czworokąta $ABCD$. Niech proste EG i FH przecinają się w punkcie P . Udowodnimy, że suma pól

czworokątów $AEPH$ i $PFCG$ jest równa sumie pól czworokątów $EBFP$ i $HPGP$.



Rozwiązanie



Z warunków zadania otrzymujemy równości następujących pól trójkątów:

AEP i BEP

AHP i DHP

CFP i BFP

CGP i DGP

Aby otrzymać tezę wystarczy dodać stronami odpowiednie pola, wynikające z powyższej równości:

$$\begin{aligned} (P_{AEP} + P_{AHP}) + (P_{CFP} + P_{CGP}) &= \\ &= (P_{BEP} + P_{BFP}) + (P_{DHP} + P_{DGP}). \end{aligned}$$

Zatem $P_{AEPH} + P_{PFCG} = P_{EBFP} + P_{HPGD}$.

Słownik

wielokąt prosty

wielokąt, którego boki tworzą zamkniętą łamaną (z czego wynika, że jest figurą spójną bez dziur), a dwa jego boki mają punkt wspólny tylko, gdy są sąsiadami

punkt kratowy

punkt, którego współrzędne w prostokątnym układzie współrzędnych są liczbami całkowitymi

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w prezentacji multimedialnej, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Polecenie 2

Korzystając z przykładów przedstawionych w prezentacji, oblicz pole dwunastokąta foremnego o boku równym 10.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj wzór na pole do nazwy czworokąta.

trapez

$$\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

dowolny czworokąt

$$\pi r^2$$

deltoid

$$\frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$

trójkąt

$$\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

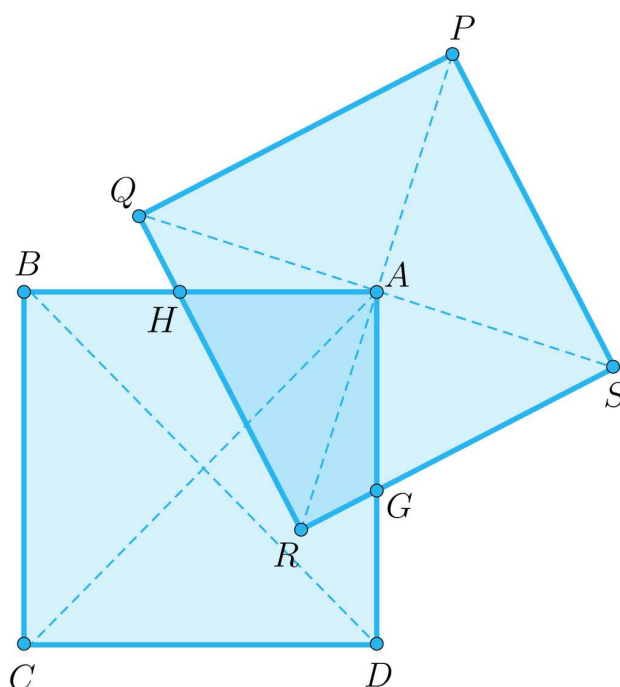
koło

$$\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

Ćwiczenie 2



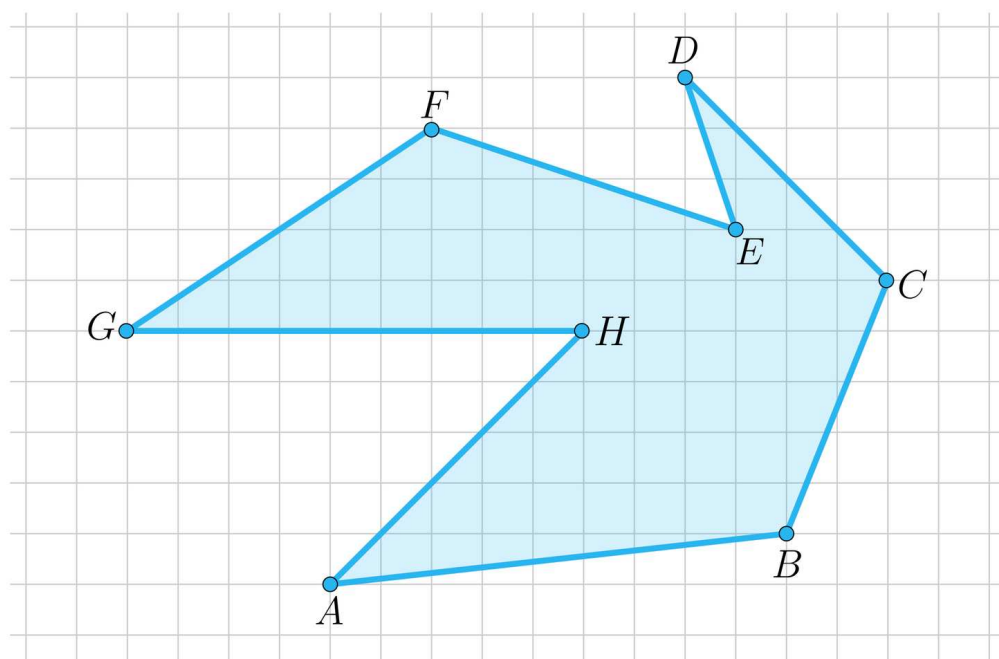
Kwadrat $PQRS$ o boku 10 położono na kwadracie $ABCD$ o boku tej samej długości. Okazało się, że środek kwadratu $PQRS$ pokrywa się z wierzchołkiem A kwadratu $ABCD$. Oblicz pole części wspólnej obu kwadratów.



Ćwiczenie 3



Siatka wypełniona jest kwadratami o boku 1.



Jakie jest pole zaznaczonego wielokąta? Warto skorzystać ze wzoru Picka: $S = W + \frac{1}{2}B - 1$.

☐ 61

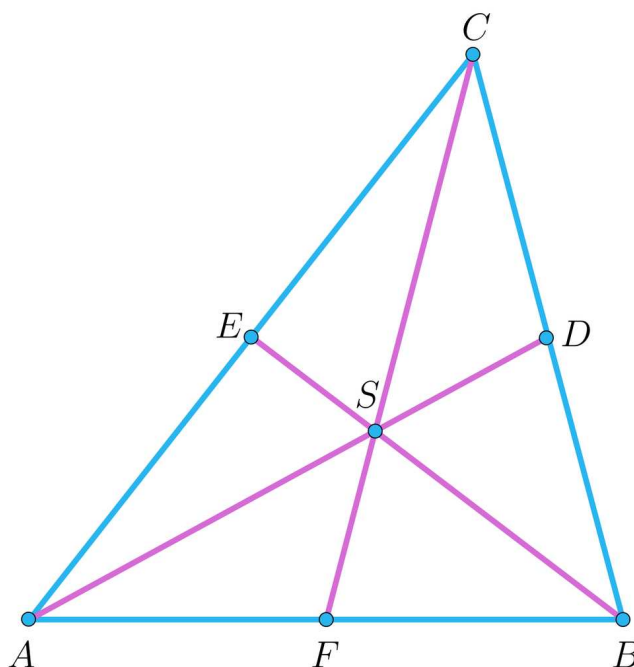
☐ 53

☐ $69\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4



Uzasadnij, że środkowe trójkąta dzielą go na 6 trójkątów o równych polach.



Ćwiczenie 5



Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie O i dzielą go na cztery części, których pola to odpowiednio: $[AOB] = S_1$, $[BOC] = S_2$, $[COD] = S_3$, $[DOA] = S_4$.

Uporządkuj etapy rozumowania prowadzące do równości $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Podobnie dla trójkątów AOD i COB : $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot h_1}{\frac{1}{2}CO \cdot h_1} = \frac{AO}{CO}$.

Przyjmijmy, że odległość punktu B od prostej AC to h_1 , natomiast odległość punktu D od prostej AC to h_2 .

Mnożąc obustronnie ostatnią równość przez $S_2 \cdot S_3$ otrzymujemy tezę zadania.

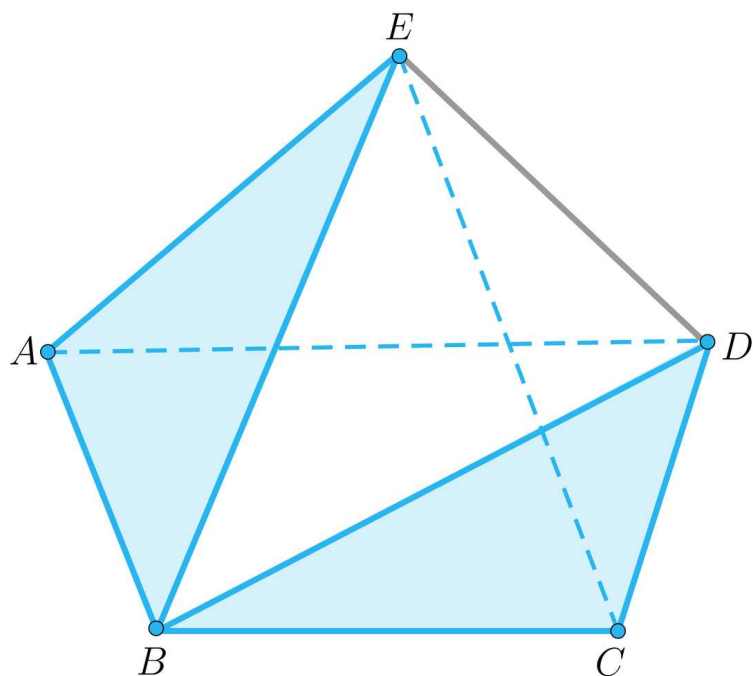
Trójkąty AOB i COB mają taką samą wysokość opuszczoną z wierzchołka B , więc $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot h_1}{\frac{1}{2}CO \cdot h_1} = \frac{AO}{CO}$.

Z poprzednich równości otrzymujemy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$.

Ćwiczenie 6



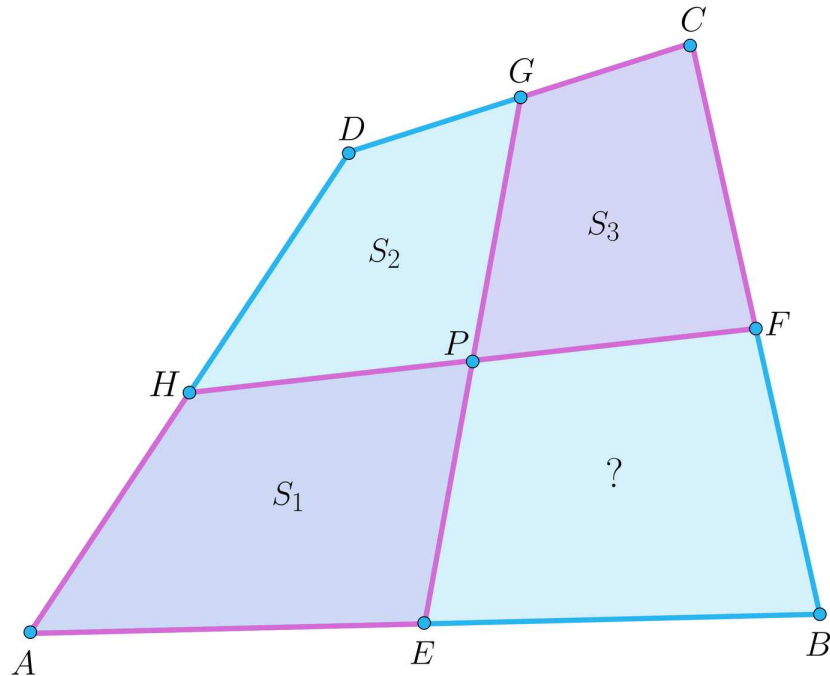
Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym przekątna AD jest równoległa do boku BC , a przekątna CE jest równoległa do boku AB . Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.



Ćwiczenie 7



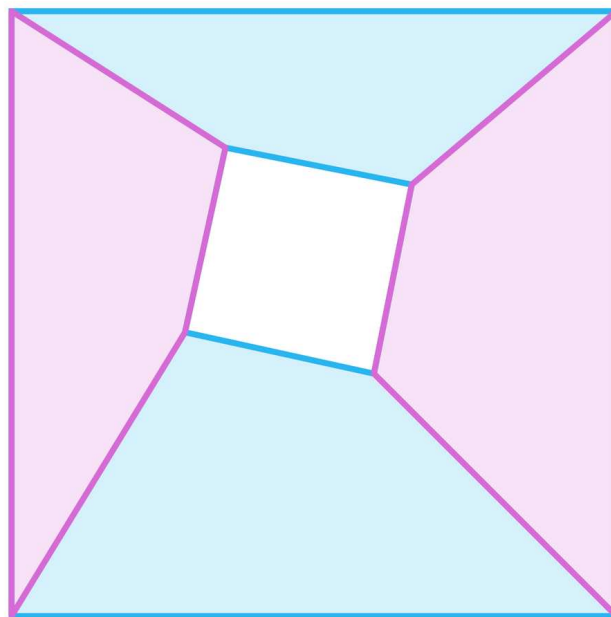
Środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego połączono odcinkami tworząc 4 czworokąty. Trzy z nich mają pola równe S_1 , S_2 i S_3 . Oblicz pole czwartego czworokąta.



Ćwiczenie 8



Udowodnij, równość pól różowych i niebieskich w kwadracie na rysunku.



Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności pola

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje własności pola do rozwiązywania zadań na dowodzenie,
- wyznacza równości pól dwóch różnych figur,
- stosuje wzór Picka do obliczania pola wielokąta prostego, którego wierzchołki są punktami kratowymi na płaszczyźnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja

- mapa myśli

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
- Uczniowie sporządzają mapę myśli przypominającą wzory na pola wielokątów znane ze szkoły podstawowej.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie wraz z nauczycielem analizują i omawiają rozwiązane przykłady z sekcji Przeczytaj.
- Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Prezentacja multimedialna”. Uczniowie analizują uniwersalny wzór na pole wielokąta foremnego. Uczniowie w parach rozwiązują polecenie nr 2. Wybrana para prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje. Dyskusja – gdzie jeszcze można wykorzystać poznany wzór na pole wielokąta foremnego,
- Następnie uczniowie wykonują w parach ćwiczenia interaktywne (1,3,4,6,7,8)

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują w domu ćwiczenie 2 i 5.

Materiały pomocnicze:

- [Pole wielokąta](#)
- [Obliczanie pól wielokątów](#)

Wskazówki metodyczne:

Na podstawie prezentacji multimedialnej uczniowie mogą przygotować infografikę o polach wielokątów foremnych.

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana na zajęciach poświęconych obliczaniu pól wielokątów foremnych.