



Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Obliczanie „delty” – czyli wyróżnika trójmianu kwadratowego to bardzo ważne i powszechnie używane narzędzie pracy matematyków. Znak delty mówi o liczbie rozwiązań równania kwadratowego. Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych również obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki równania (jeżeli istnieją). Następnie, na podstawie rysunku odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

Twoje cele

- Rozpoznasz nierówności kwadratowe zupełne, których zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, oraz nierówności, które nie posiadają rozwiązania.
- Rozwiążesz nierówności kwadratowe zupełne.
- Wyznaczysz takie współczynniki nierówności, aby rozwiązaniem nierówności był określony zbiór.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność kwadratowa

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Do rozwiązania nierówności kwadratowej cenną umiejętnością jest rozwiązywanie równań kwadratowych. Ponadto niezbędna jest również umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej oraz odczytywania własności funkcji z wykresu.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest najczęściej przedział liczbowy lub suma przedziałów. Zdarza się, że rozwiązaniem nierówności jest zbiór składający się z jednej liczby. Nierówność kwadratowa może również nie posiadać rzeczywistych rozwiązań.

Nierówności, w których wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi zupełnymi**.

Przykład 1

Rozwiążemy **nierówność kwadratową zupełną** $x^2 - x - 2 > 0$.

Skorzystamy z własności odpowiedniej funkcji kwadratowej. W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 - x - 2$ rozwiążemy najpierw równanie $x^2 - x - 2 = 0$.

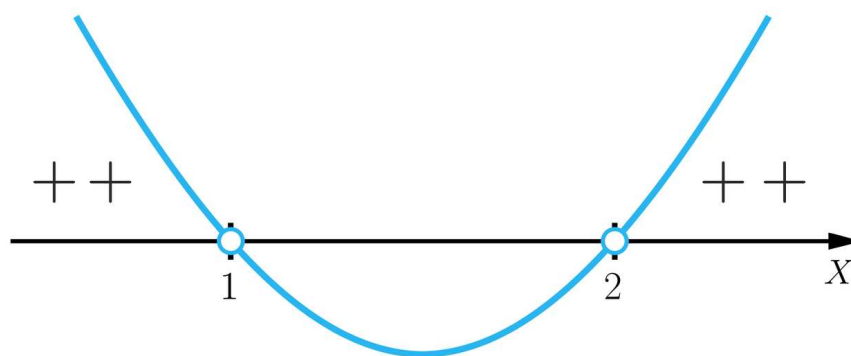
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Następnie na osi liczbowej zaznaczymy miejsca zerowe utworzonej funkcji oraz szkicujemy parabolę, będącą wykresem tej funkcji, przechodzącą przez wyznaczone punkty. Ramiona paraboli skierowane są do góry, bo współczynnik przy x^2 jest dodatni.



Z wykresu odczytujemy, że $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Przykład 2

Rozwiążemy **nierówność kwadratową z niewiadomą x** :

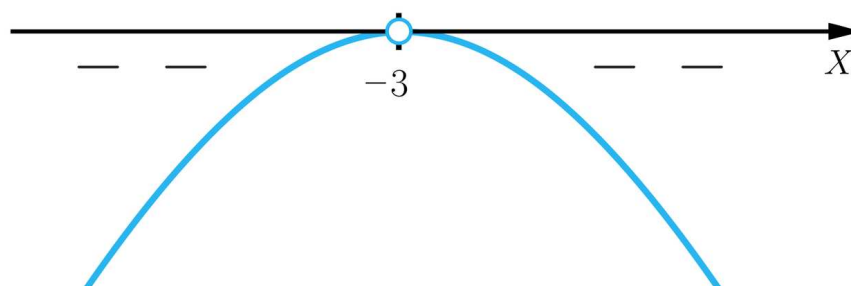
$$-x^2 - 6x - 9 < 0.$$

Obliczamy miejsce zerowe odpowiedniej funkcji $f(x) = -x^2 - 6x - 9$.

$$-(x + 3)^2 = 0$$

$$x = -3$$

Funkcja posiada jedno miejsce zerowe, a ramiona paraboli będącej wykresem funkcji skierowane są do dołu, bo współczynnik przy x^2 jest liczbą ujemną.



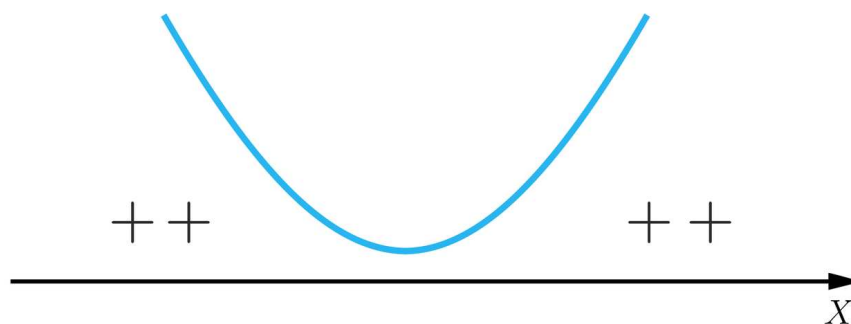
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Przykład 3

Obliczymy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 2x + 5 \leq 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Rozpatrzmy najpierw równanie $x^2 - 2x + 5 = 0$. Równanie nie ma pierwiastków. Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem parabola, będąca interpretacją geometryczną równania, znajduje się nad osią X .



Nierówność jest sprzeczna.

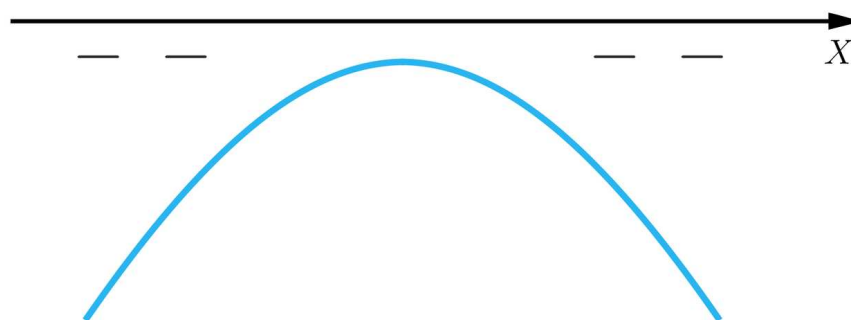
Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $-2x^2 + x - 7 < 0$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 1 - 56 = -55 < 0.$$

Równanie $-2x^2 + x - 7 = 0$ nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Ramiona paraboli, będącej interpretacją geometryczną równania, skierowane są do dołu, zatem parabola znajduje się pod osią X .



Oznacza to, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 5

Dane są zbiory A i B . Wyznaczymy zbiór $A \cap B$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 \leq 0\},$$

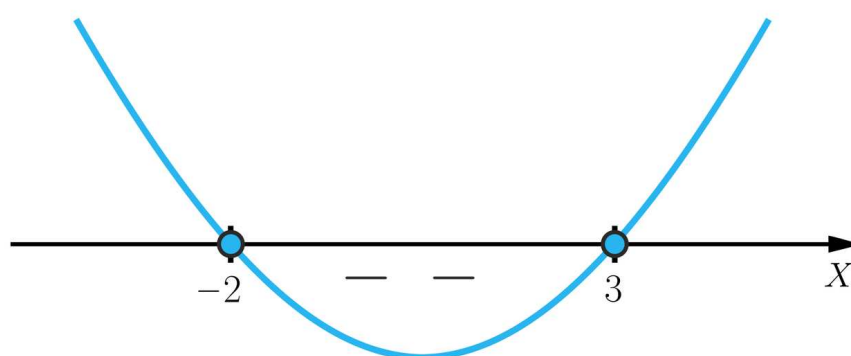
$$B = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x + 4 \geq 0\}.$$

Rozwiążemy najpierw nierówność $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Korzystając z wzorów Viete'a, zapiszemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej.

$$(x - 3)(x + 2) \leq 0$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -2$$

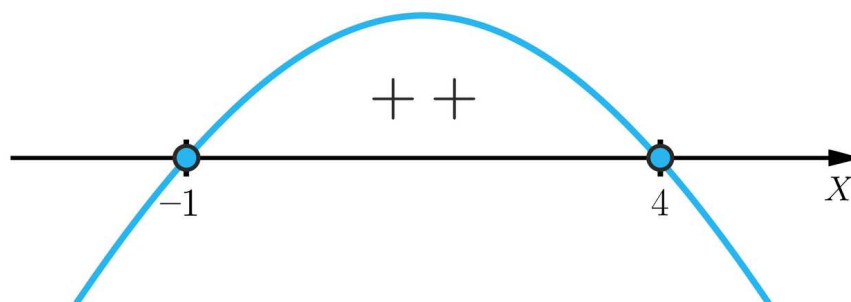


$$x \in \langle -2, 3 \rangle, \text{ czyli } A = \langle -2, 3 \rangle$$

Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$.

$$-(x + 1)(x - 4) \geq 0$$

$$x = -1 \text{ lub } x = 4$$



$$x \in \langle -1, 4 \rangle \text{ czyli } B = \langle -1, 4 \rangle$$

Wyznaczmy teraz część wspólną zbiorów A i B .



Zatem $A \cap B = \langle -1, 3 \rangle$.

Słownik

nierówność kwadratowa z niewiadomą x

jest to każda nierówność postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c < 0 \text{ lub } ax^2 + bx + c \leq 0$$

gdzie:

a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$

nierówność kwadratowa zupełna

nierówność, w której wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą różne sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DrcDrgksh>

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność. Zastosuj sposoby rozwiązania nierówności pokazane w animacji.

1. $2x^2 + 7x - 4 < 0$,

2. $(x + 2)^2 > 9$,

3. $3(x - 1)^2 < x(x - 1)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje nierówności kwadratowe zupełne, których zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, oraz nierówności, które nie posiadają rozwiązania
- rozwiązuje nierówności kwadratowe zupełne
- wyznacza współczynniki nierówności, aby jej rozwiązaniem był określony zbiór
- dobiera model do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadków
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z nierównościami kwadratowymi (aby w dalszej części lekcji określić rodzaje nierówności ze względu na zbiór rozwiązań nierówności).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel wyświetla animację i czyta treść polecenia 1.
3. Uczniowie w parach analizują przykłady pokazujące sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.
4. Po omówieniu przykładów w parach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązania przykładów.
5. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania poleceń umieszczonych pod animacją.
7. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 7-8.

Materiały pomocnicze:

[Nierówność kwadratowa](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązania przykładów nierówności kwadratowych zupełnych.