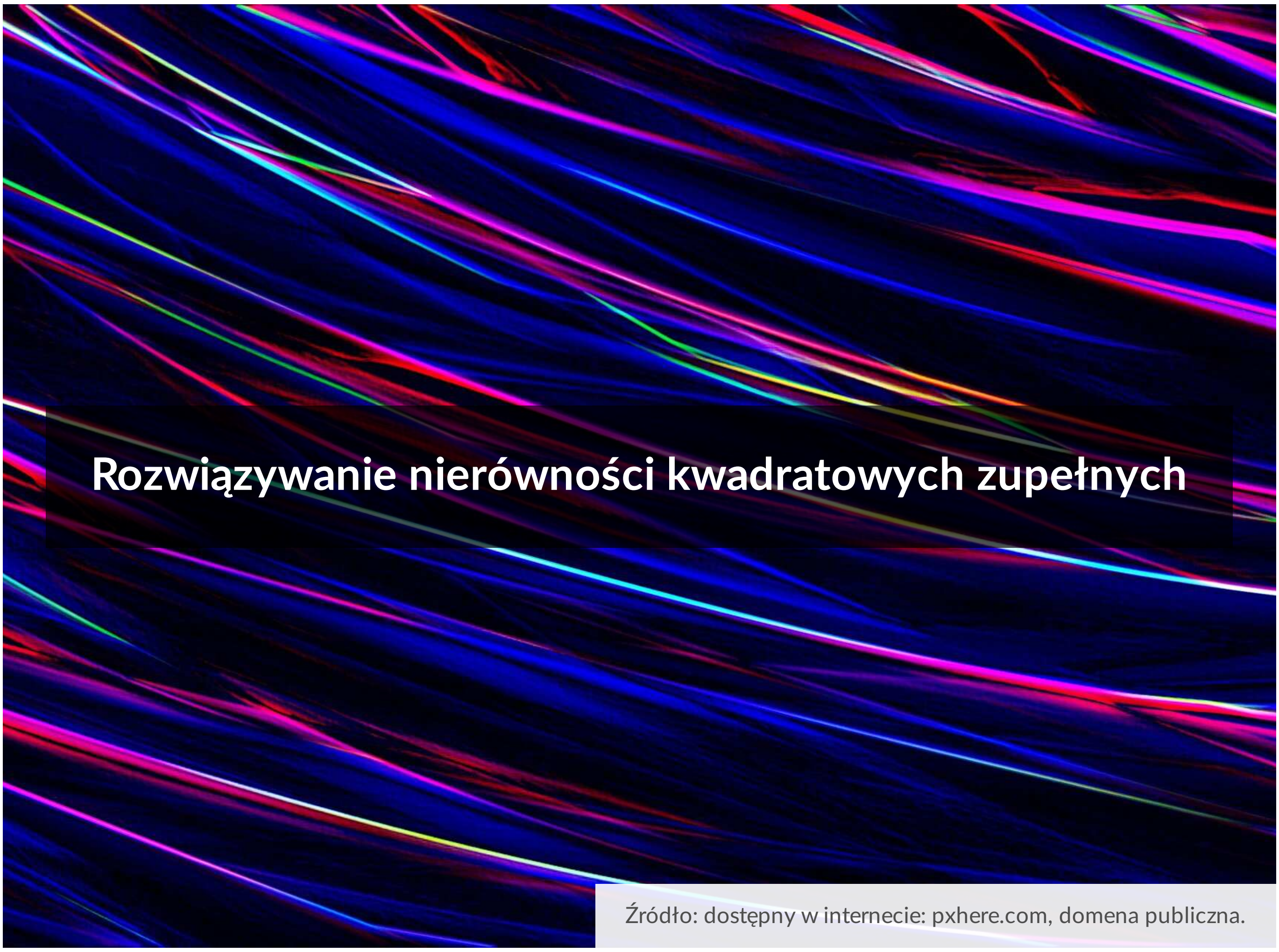
Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych

Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych



Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Obliczanie „delty” – czyli wyróżnika trójmianu kwadratowego to bardzo ważne i powszechnie używane narzędzie pracy matematyków. Znak delty mówi o liczbie rozwiązań równania kwadratowego. Podczas rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych również obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki równania (jeżeli istnieją). Następnie, na podstawie rysunku odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

Twoje cele

- Rozpoznasz nierówności kwadratowe zupełne, których zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, oraz nierówności, które nie posiadają rozwiązania.
- Rozwiążesz nierówności kwadratowe zupełne.
- Wyznaczysz takie współczynniki nierówności, aby rozwiązaniem nierówności był określony zbiór.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność kwadratowa

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci

$ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$

gdzie:
a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Do rozwiązania nierówności kwadratowej cenną umiejętnością jest rozwiązywanie równań kwadratowych. Ponadto niezbędna jest również umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej oraz odczytywania własności funkcji z wykresu.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest najczęściej przedział liczbowy lub suma przedziałów. Zdarza się, że rozwiązaniem nierówności jest zbiór składający się z jednej liczby. Nierówność kwadratowa może również nie posiadać rzeczywistych rozwiązań.

Nierówności, w których wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0, nazywamy **nierównościami kwadratowymi zupełnymi**.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność kwadratową zupełną $x^2 - x - 2 > 0$.

Skorzystamy z własności odpowiedniej funkcji kwadratowej. W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 - x - 2$ rozwiążemy najpierw równanie $x^2 - x - 2 = 0$.

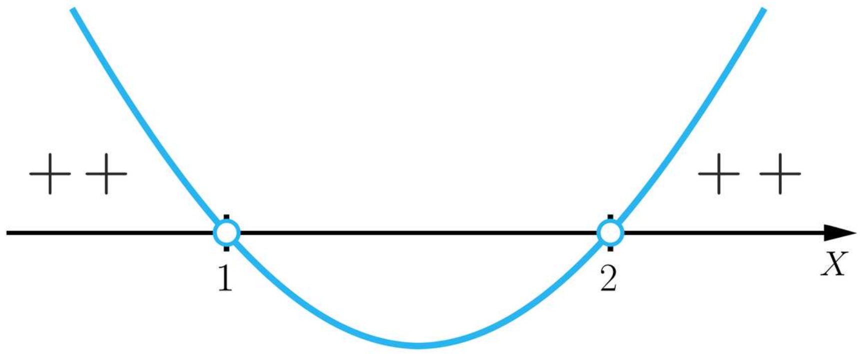
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$

$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

Następnie na osi liczbowej zaznaczymy miejsca zerowe utworzonej funkcji oraz szkicujemy parabolę, będącą wykresem tej funkcji, przechodzącą przez wyznaczone punkty. Ramiona paraboli skierowane są do góry, bo współczynnik przy x^2 jest dodatni.



Z wykresu odczytujemy, że $x \in (-\infty, \ -1) \cup (2, \ \infty)$.

Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby $x \in (-\infty, \ -1) \cup (2, \ \infty)$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność kwadratową z niewiadomą x:

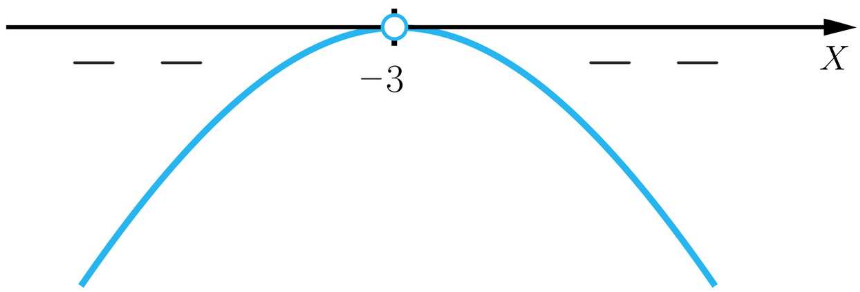
$-x^2 - 6x - 9 < 0.$

Obliczamy miejsce zerowe odpowiedniej funkcji $f(x) = -x^2 - 6x - 9$.

$-(x+3)^2 = 0$

$x = -3$

Funkcja posiada jedno miejsce zerowe, a ramiona paraboli będącej wykresem funkcji skierowane są do dołu, bo współczynnik przy x^2 jest liczbą ujemną.



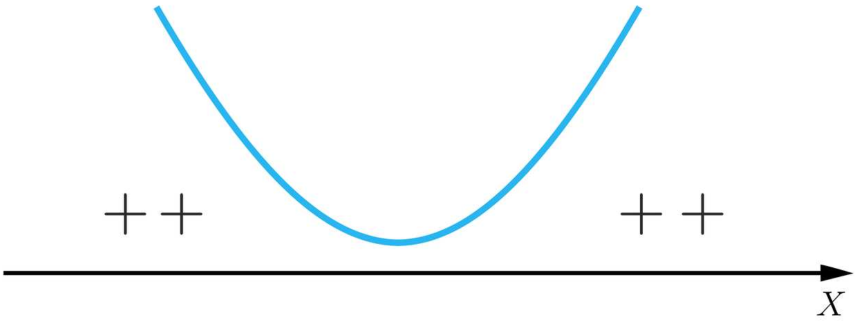
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Przykład 3

Obliczymy zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 2x + 5 \leq 0$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0.$

Rozpatrzymy najpierw równanie $x^2 - 2x + 5 = 0$. Równanie nie ma pierwiastków. Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem parabola, będąca interpretacją geometryczną równania, znajduje się nad osią X.



Nierówność jest sprzeczna.

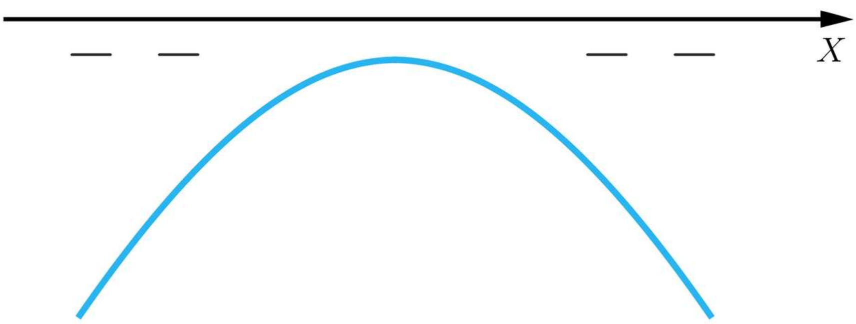
Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $-2x^2 + x - 7 < 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 1 - 56 = -55 < 0.$

Równanie $-2x^2 + x - 7 = 0$ nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Ramiona paraboli, bedącej interpretacją geometryczną równania, skierowane są do dołu, zatem parabola znajduje się pod osią X.



Oznacza to, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 5

Dane są zbiory A i B. Wyznaczymy zbiór $A \cap B$.

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 6 \le 0\}$,

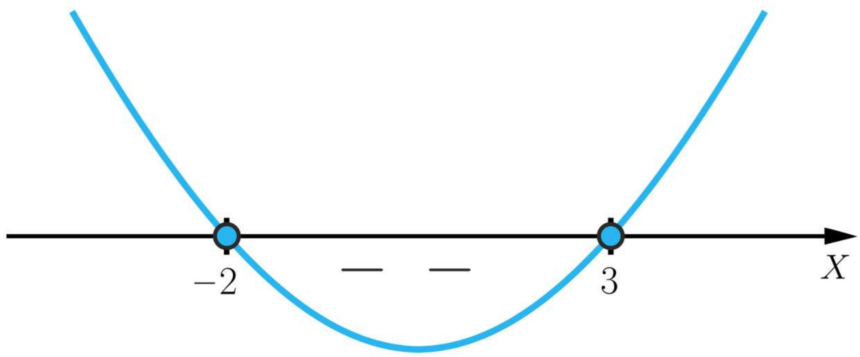
$B = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x + 4 \ge 0\}$.

Rozwiążemy najpierw nierówność $x^2 - x - 6 \le 0$.

Korzystając z wzorów Viete'a, zapiszemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej.

$(x-3)(x+2) \le 0$

$x = 3$ lub $x = -2$

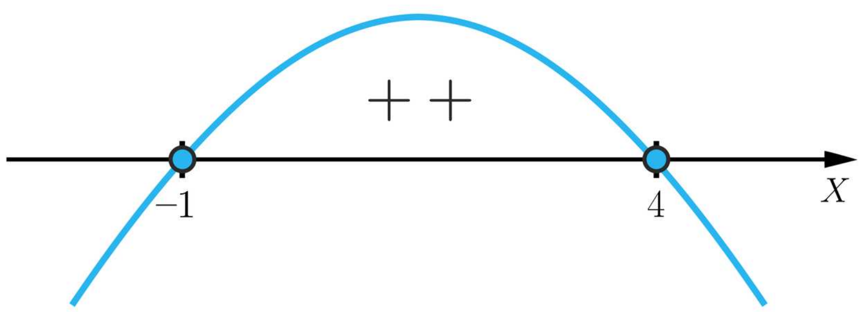


$x \in \langle -2, 3 \rangle$, czyli $A = \langle -2, 3 \rangle$

Rozwiążemy nierówność $-x^2 + 3x + 4 \ge 0$.

$-(x+1)(x-4) \ge 0$

$x = -1$ lub $x = 4$



$x \in \langle -1, 4 \rangle$ czyli $B = \langle -1, 4 \rangle$

Wyznaczymy teraz część wspólną zbiorów A i B.

Zatem $A \cap B = \langle -1,\ 3\rangle$.

Słownik

nierówność kwadratowa z niewiadomą x

jest to każda nierówność postaci:

$ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c < 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$

gdzie:
a, b, c – są ustalonymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$

nierówność kwadratowa zupełna

nierówność, w której wszystkie współczynniki trójmianu kwadratowego są różne od 0

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą różne sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DrcDrgksh

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność. Zastosuj sposoby rozwiązania nierówności pokazane w animacji.

1. $2x^2 + 7x - 4 < 0$,
2. $(x+2)^2 > 9$,
3. $3(x-1)^2 < x(x-1)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 - 13x + 15 \leq 0$ jest:

- $\langle -5,\ \frac{3}{2})$
- $\langle \frac{3}{2},\ 5 \rangle$
- $(-\infty,\ -5\rangle \cup \langle \frac{3}{2},\ \infty)$
- $\langle -5,\ -\frac{3}{2} \rangle$

Ćwiczenie 2

Wybierz wszystkie nierówności, których zbiorem rozwiązań jest $(-\infty,\ -5) \cup (3,\ \infty)$.

- $-\frac{1}{2}x^2 - x + 7\frac{1}{2} < 0$
- $-x^2 - 2x + 15 > 0$
- $-3x^2 - 6x + 45 \leq 0$
- $-2(x-3)(x+5) < 0$
- $(x-3)(x+5) > 0$
- $x^2 + 2x - 15 > 0$

Ćwiczenie 3

Połącz nierówność kwadratową ze zbiorem rozwiązań nierówności.

$x^2-3x-4>0$	$(-4,\ 1)$
$-x^2+3x+4>0$	$(-1,\ 4)$
$-x^2-3x+4>0$	$(-\infty,\ -4)\cup(1,\ \infty)$
$x^2+3x-4>0$	$(-\infty,\ -1)\cup(4,\ \infty)$

Ćwiczenie 4

Przeciągnij w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby zbiór $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ był zbiorem rozwiązań poniższej nierówności.

$4x^2-4\sqrt{3}x+$ ☐ ≤ 0

9 $-\sqrt{3}$ -3 3

Ćwiczenie 5

Wpisz w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby zbiór $(-\infty,\ -2\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},\ \infty\right)$ był rozwiązaniem poniższej nierówności.

$2x^2+$ ☐ $\cdot x-2\geq 0$

Ćwiczenie 6

Wiedząc, że zbiorem rozwiązań nierówności $-x^2+7x+p\geq 0$ jest zbiór $\langle 3,\ 4\rangle$. Oblicz p. Wpisz poprawną liczbę.

$p=$ ☐

Ćwiczenie 7

Przeciągnij w wyznaczone miejsce zbiór, który jest rozwiązaniem obu nierówności.

$x^2 - 2x + 2 < 0 \ \wedge \ -x^2 + 5x - 7 > 0$, zbiorem rozwiązań obu nierówności jest

______.

$3x^2 - x + 2 > 0 \ \wedge \ -2x^2 + 2x - 3 < 0$, zbiorem rozwiązań obu nierówności jest

______.

$3x^2 + 5x - 2 > 0 \ \wedge \ -x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} < 0$, zbiorem rozwiązań obu nierówności jest

______.

$(-\infty, \ -2) \cup \left(\frac{1}{3}, \ \infty\right)$ | $\emptyset$ | $\left(-2, \ \frac{1}{3}\right)$ | $\mathbb{R}$

Ćwiczenie 8

Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Dane są zbiory:
$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 4x - 5 < 0\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x - 12 < 0\}$.

- [ ] $A \cap B = (-4, \ 3)$
- [ ] $A = (-1, \ 5)$
- [ ] $B = (-\infty, \ -4) \cup (3, \ \infty)$
- [ ] $A \cup B = (-4, \ 5)$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności kwadratowych zupełnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje nierówności kwadratowe zupełne, których zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych, oraz nierówności, które nie posiadają rozwiązania
- rozwiązuje nierówności kwadratowe zupełne
- wyznacza współczynniki nierówności, aby jej rozwiązaniem był określony zbiór
- dobiera model do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadków
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z nierównościami kwadratowymi (aby w dalszej części lekcji określić rodzaje nierówności ze względu na zbiór rozwiązań nierówności).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj".
2. Nauczyciel wyświetla animację i czyta treść polecenia 1.
3. Uczniowie w parach analizują przykłady pokazujące sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.
4. Po omówieniu przykładów w parach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązania przykładów.
5. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenie 2.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania poleceń umieszczonych pod animacją.
7. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania nierówności kwadratowych zupełnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 7-8.

Materiały pomocnicze:

Nierówność kwadratowa

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązania przykładów nierówności kwadratowych zupełnych.