Różne typy nierówności trygonometrycznych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Różne typy nierówności trygonometrycznych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale powtórzymy wszystkie wzory na: sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, funkcje podwojonego kąta, sumy i różnice funkcji trygonometrycznych i będziemy je stosować do rozwiązywania nierówności. Prezentowane nierówności wykraczają poza wymagania z podstawy programowej, ale są ciekawym rozszerzeniem tej tematyki.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie wszystkie zależności trygonometryczne.
- Zastosujesz poznane zależności trygonometryczne do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych różnych typów.

Przeczytaj

W poniższym materiale pokażemy całą kolekcję nierówności trygonometrycznych, do rozwiązania których będziemy wykorzystywać wszystkie poznane dotychczas wzory i metody.

Przypomnijmy najpierw najbardziej typowe strategie rozwiązywania nierówności trygonometrycznych.

1. Zawsze na początku piszemy, co jest dziedziną nierówności, czyli jaki jest zbiór elementów, dla których nierówność ma sens.
2. Każdą nierówność staramy się sprowadzić do postaci: $\sin x > a$, $\cos x > a$ lub $\operatorname{tg} x > a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą.
3. Bardzo wygodną postacią nierówności, która ułatwia rozwiązanie, jest taka postać, w której po jednej stronie nierówności znajduje się iloczyn wyrażeń trygonometrycznych, a po drugiej liczba 0.
4. Częstym motywem dla bardziej złożonych nierówności jest wprowadzenie podstawienia, które sprowadza nierówność trygonometryczną do postaci nierówności kwadratowej, wielomianowej lub wymiernej.
5. W bardziej złożonych zadaniach musimy skorzystać z poznanych wzorów na: funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów, funkcje trygonometryczne podwojonego argumentu, sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Wiadomo, że $\cos 2x \leq -\frac{7}{8}$ i $\cos x \leq -\frac{1}{4}$. Obliczymy $\sin \frac{x}{2}$.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na cosinus podwojonego kąta zapisujemy jedną z naszych nierówności w innej postaci:

$2\cos^2 x - 1 \leq -\frac{7}{8}$.

Robimy podstawienie: $y = \cos x$.

Zapisujemy nierówności z nową zmienną:

$2y^2 - 1 \leq -\frac{7}{8}$ oraz $y \leq -\frac{1}{4}$.

Nierówność $2y^2 - 1 \leq -\frac{7}{8}$ zapisujemy jako: $2y^2 \leq \frac{1}{8}$.

Stąd dostajemy $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$.

Zatem mamy koniunkcję dwóch nierówności:

$y \geq -\frac{1}{4}$ i $y \leq -\frac{1}{4}$, co oznacza, że:

$y = -\frac{1}{4}$.

Korzystamy ponownie ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i otrzymujemy:

$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1-y}{2} = \frac{10}{16}$.

Zatem dostajemy odpowiedź:

$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ lub $\sin \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Przykład 2

Wyznaczymy wartości liczbowe, które może przyjmować $\mathrm{tg}\, x$, jeżeli zachodzi nierówność: $\mathrm{tg}\, x > \frac{9-3\cos 2x}{3\sin 2x-2}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że: $3\sin 2x - 2 \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Zapiszemy wzory na cosinus i sinus podwojonego kąta za pomocą funkcji tangens:

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$,

$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x} = \frac{2\mathrm{tg} x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$.

Podstawiamy: $t = \mathrm{tg}\ x$.

Wówczas nierówność z zadania przyjmuje postać:

$t > \frac{9-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3\frac{2t}{1+t^2}-2}$.

Przekształcamy kolejno do postaci nierówności wielomianowej:

$t > \frac{6t^2+3}{-t^2+3t-1}$,

$t + \frac{6t^2+3}{t^2-3t+1} > 0$,

$\frac{(t+3)(t^2+1)}{t^2-3t+1} > 0$,

$(t+3)(t^2+1)(t^2-3t+1) > 0$,

$(t+3)\left(t - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) > 0$.

Wówczas nierówność jest równoważna alternatywie warunków:

$-3 < t < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $t > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Stąd otrzymujemy warunki na $\operatorname{tg} x$:

$-3 < \operatorname{tg} x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $\operatorname{tg} x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta zapisujemy naszą nierówność w innej postaci:

$2 \sin x \cos x - \cos x + \sqrt{2} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Przenosimy wszystkie składniki na lewą stronę:

$2 \sin x \cos x - \cos x + \sqrt{2} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

Zauważmy, że mamy parzystą liczbę składników a pewne wspólne czynniki występują w parach. Wyłączamy zatem wspólne czynniki przed nawias:

$2 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$.

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i otrzymujemy postać iloczynową nierówności:

$\left(2 \cos x + \sqrt{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0$.

Stąd otrzymujemy alternatywę warunków:

$(\sin x > \frac{1}{2}$ i $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2})$ lub $(\sin x < \frac{1}{2}$ i $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Pierwszy warunek $\sin x > \frac{1}{2}$ i $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest równoważny warunkowi $\sin x > \frac{1}{2}$, czyli $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Drugi warunek $\sin x < \frac{1}{2}$ i $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest równoważny warunkowi $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Uwzględniając alternatywę powyższych warunków otrzymujemy odpowiedź:
$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Rozwiązanie

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę nierówności:

$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0.$

Korzystamy ze wzoru redukcyjnego:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) > 0.$

Korzystamy ze wzoru na różnicę sinusów i zapisujemy nierówność w postaci:

$2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} > 0.$

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy argumentów i w innej postaci zapisujemy wyrażenie $\sin x + \cos x$:

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

Stąd otrzymujemy szacowanie:

$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}.$

Ponieważ $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy nierówności: $0 < \frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x < \pi$.

Funkcja sinus w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ przyjmuje wartości dodatnie, zatem $\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} > 0.$

Korzystamy ze wzoru na sinus różnicy argumentów i w innej postaci zapisujemy wyrażenie $\sin x - \cos x$:

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

Stąd otrzymujemy szacowanie:

$-\sqrt{2} \leq \sin x - \cos x \leq \sqrt{2}.$

Ponieważ $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, więc $0 < \frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x < \pi$, czyli

$0 < \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Funkcja cosinus w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ przyjmuje wartości dodatnie, zatem $\cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} > 0$.

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności $\cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} > 0$ i $\sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} > 0$, zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x}{2} > 0$.

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Słownik

sinus sumy argumentów

$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$

sinus różnicy argumentów

$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

wzory na sumę oraz różnicę sinusów

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z animacją. Zwróć szczególną uwagę na ostatni przykład pokazany w animacji. Następnie wykonaj polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DV08jym0s

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej różnych typów nierówności trygonometrycznych.

Polecenie 2

Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ oraz $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Udowodnij, że $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma < 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Rozwiąż nierówność: $\frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 2x + \cos x} \leq 2.$

Ćwiczenie 8

Załóżmy, że $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$. Wykaż, że

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cdots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Różne typy nierówności trygonometrycznych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przypomni sobie wszystkie typy wzorów trygonometrycznych, które poznaliśmy na poprzednich lekcjach;
- przypomni sobie, jak stosować poznane wzory do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych różnych typów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metaplan;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Różne typy nierówności trygonometrycznych” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Obejrzyj uważnie animację. Zwróć szczególną uwagę na ostatni przykład pokazany w animacji. Następnie wykonaj polecenie 2” oraz materiał z sekcji „Animacja”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Różne typy nierówności trygonometrycznych”).

Materiały pomocnicze:

- Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Różne typy nierówności trygonometrycznych”.