



Funkcja logarytmiczna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Funkcja logarytmiczna

Źródło: Andreas Kretschmer, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Podczas odkrywania nowych treści z matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum warto podkreślić znaczenie logarytmów w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych. Procesy te zachodzą, gdy w określonym przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Dzieje się tak np. w przypadku skali Richtera, która służy do określenia siły trzęsień ziemi. Opierając się na wiedzy teoretycznej na temat funkcji logarytmicznej w tej lekcji, rozwiążemy zadania i interaktywne ćwiczenia.



Źródło: Steve Harvey, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Twoje cele

- Zdefiniujesz funkcję logarytmiczną.
- Określisz podstawowe własności funkcji logarytmicznej.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji logarytmicznej.
- Zastosujesz wiedzę, wykonując zestaw przygotowanych ćwiczeń.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja logarytmiczna

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \log_a x$, przy założeniu, że $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > 0$.

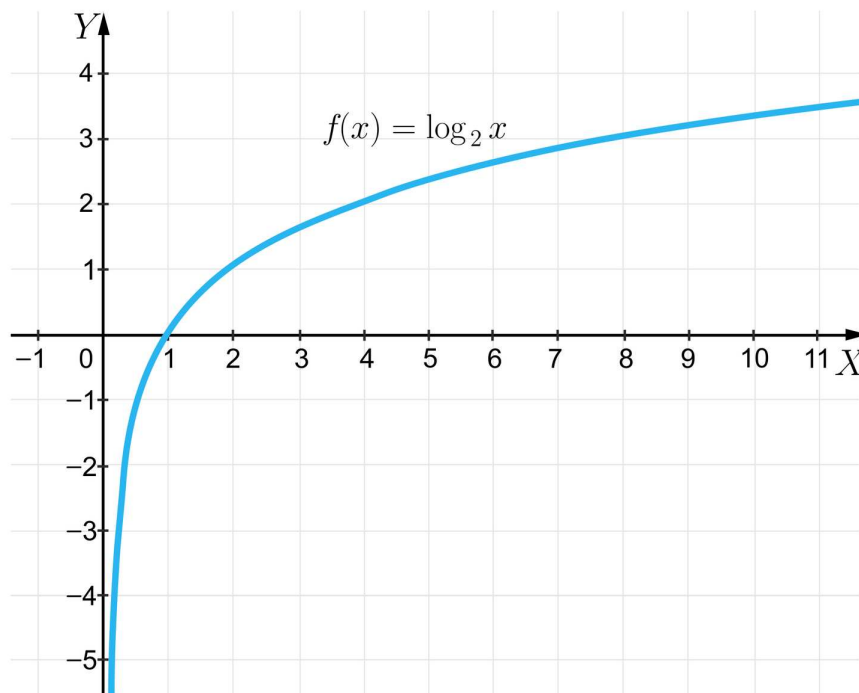
Funkcjami logarytmicznymi są na przykład funkcje określone wzorami $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Ważne!

Funkcja wykładnicza określona wzorem $f(x) = a^x$ oraz funkcja logarytmiczna określona wzorem $f(x) = \log_a x$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

Wykresem [funkcji logarytmicznej](#) jest krzywa, która przechodzi przez punkt $(1, 0)$.

Wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ przedstawia się następująco:



Własności [funkcji logarytmicznej](#) $f(x) = \log_a x$:

- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $x \in \mathbb{R}_+$,
- zbiorem wartości jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
- miejscem zerowym jest liczba $x = 1$,
- jest różnowartościowa,
- nie jest parzysta i nie jest nieparzysta.

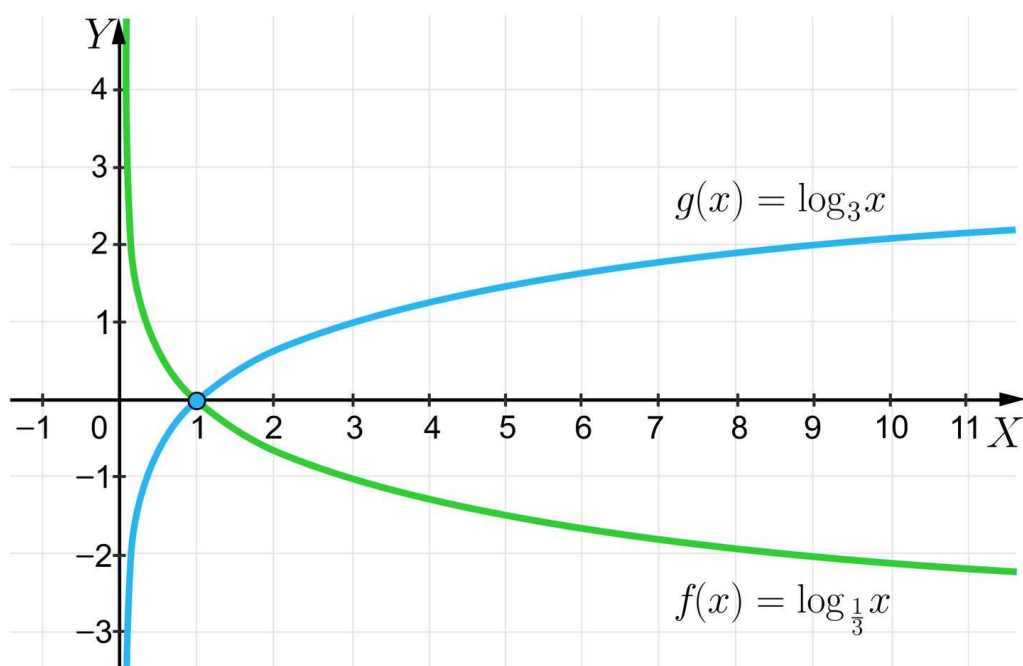
Monotoniczność **funkcji logarytmicznej** $f(x) = \log_a x$:

- dla $a \in (0, 1)$ funkcja jest malejąca,
- dla $a \in (1, \infty)$ funkcja jest rosnąca.

Na poniższym wykresie przedstawiono wykresy dwóch funkcji logarytmicznych określonych wzorami:

- $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$
- $g(x) = \log_3 x$

Wykres funkcji f przedstawia funkcję malejącą, a wykres funkcji g przedstawia funkcję rosnącą.



Przykład 1

Wyznamy dziedzinę funkcji określonej wzorem $f(x) = \log_3(2x^2 - x - 1)$.

Wykorzystamy założenia logarytmu, z których otrzymujemy nierówność

$$2x^2 - x - 1 > 0.$$

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$.

Przykład 2

Do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a(x - 3)$ należy punkt o współrzędnych $(5, 2)$. Wyznamy wartość współczynnika a .

Współrzędne punktu podstawiamy do wzoru funkcji i otrzymujemy równanie:

$$\log_a 2 = 2.$$

Z definicji logarytmu mamy, że $a^2 = 2$.

$$\text{Czyli } a = \sqrt{2} \text{ lub } a = -\sqrt{2}.$$

Ponieważ dla funkcji logarytmicznej $a > 0$, stąd $a = \sqrt{2}$.

Przykład 3

Określimy dziedzinę funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{x^2-1}(2x-3)$.

Z założeń funkcji logarytmicznej wynika, że $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > 0$.

Układamy warunki do dziedziny funkcji.

$$x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 - 1 \neq 1 \wedge 2x - 3 > 0.$$

Rozwiązaniami powyższych nierówności są zbiory:

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty),$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\},$$

$$x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Dziedziną podanej funkcji jest zbiór $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Przykład 4

Dana jest funkcja logarytmiczna określona wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 11) + m$. Wartość funkcji dla argumentu 6 wynosi 3. Wyznamy wartość parametru m .

Wartość funkcji f dla $x = 6$ wynosi 3, zatem

$$3 = \log_{\frac{1}{5}} 25 + m, \text{ czyli}$$

$$3 = -2 + m, \text{ więc } m = 5.$$

Przykład 5

Wyznamy wartości parametrów m i n we wzorze funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_3(mx + n)$, jeżeli do wykresu tej funkcji należą punkty $K = (-1, 2)$ i $L = (1, 1)$.

W celu wyznaczenia parametrów m i n podstawiamy współrzędne punktów K i L do wzoru funkcji f , co sprowadza się do układu równań:

$$\begin{cases} 2 = \log_3(-m + n) \\ 1 = \log_3(m + n) \end{cases}$$

Układ ten zapisujemy w prostszej postaci:

$$\begin{cases} -m + n = 9 \\ m + n = 3 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} m = -3 \\ n = 6 \end{cases}$.

Zatem wzór funkcji f ma postać: $f(x) = \log_3(-3x + 6)$.

Słownik

funkcja logarytmiczna

funkcja postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $x > 0$

funkcja odwrotna

funkcja $g : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczana jako f^{-1} , spełniająca warunek $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Przeanalizuj sposób szkicowania wykresu funkcji logarytmicznej oraz wyznaczania brakującej podstawy we wzorze funkcji logarytmicznej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GkdE7f4>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zagadnienia funkcji logarytmicznej.

Polecenie 2

Do wykresu funkcji logarytmicznej określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ należy punkt o współrzędnych $(25, -2)$. Wyznacz wzór tej funkcji, wykonaj tabelę wartości dla kilku argumentów, a następnie naszkicuj wzór tej funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Do dziedziny funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-2x + 4)$ należy liczba:

☐ 4

☐ -2

☐ 2

Ćwiczenie 2



Połącz wzór funkcji z odpowiadającą jej dziedziną:

$$f(x) = \log_3(-x + 2)$$

$$x \in (2, \infty)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x + 1)$$

$$x \in (-\infty, 1)$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$$

$$x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \log_2 x$$

$$x \in (-\infty, 2)$$

Ćwiczenie 3



Wstaw w tekst odpowiednie liczby:

Wartość funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$ dla $x = 4$ wynosi , zaś dla $x = \frac{9}{4}$ wynosi .

Ćwiczenie 4



W celu wyznaczenia dziedziny funkcji $f(x) = \log_{x-1}(2x^2 - 1)$ należy ułożyć warunki:

☐ $x - 1 > 0, 2x^2 - 1 > 0.$

☐ $x - 1 > 0, x - 1 \neq 1, 2x^2 - 1 > 0,$

☐ $x - 1 \neq 1, 2x^2 - 1 > 0,$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary argument funkcji $\log_{\frac{1}{2}} x$ z odpowiadającą mu wartością:

4

2

$\frac{1}{4}$

4

8

-3

$\frac{1}{16}$

-2

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania.

Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_4 x$ należy punkt (, $\frac{1}{2}$).

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od .

Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej:

$f\left(\frac{1}{81}\right)$



$f(1)$



$f(9)$



$f\left(\frac{1}{27}\right)$



Ćwiczenie 8



Do wykresu funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x - 2) + k$ należy punkt $(\frac{51}{25}, -3)$. Wówczas:

☐ $k = -1$

☐ $k \in (-3, 3)$

☐ $k \in (-10, -1)$

☐ $k = -5$

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcja logarytmiczna

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję oraz założenia funkcji logarytmicznej,
- wyznacza dziedzinę funkcji logarytmicznej,
- wykorzystuje podstawowe własności funkcji logarytmicznej do wyznaczania jej wzoru.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w grupach;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Funkcja logarytmiczna” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj” oraz korzystają z materiałów pomocniczych. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z poleceniami z sekcji „Animacja”. Z uwagą oglądają animację, a następnie krok po kroku wykonują polecenie numer 2.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi. Podczas pracy zapisują problemy, na które napotkali podczas rozwiązywania zadań.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, a następnie porównują swoje odpowiedzi z odpowiedziami kolegi lub koleżanki.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie podczas rozmowy kierowanej przez nauczyciela odpowiadają na pytania sformułowane w fazie wstępnej lekcji.
2. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy funkcji specjalnych](#)
- [Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)

Wskazówki metodyczne:

- Pracę uczniów można oceniać podczas całej lekcji lub na końcu zajęć. W ocenie pracy uczniów należy uwzględnić specyficzne trudności w uczeniu się matematyki.