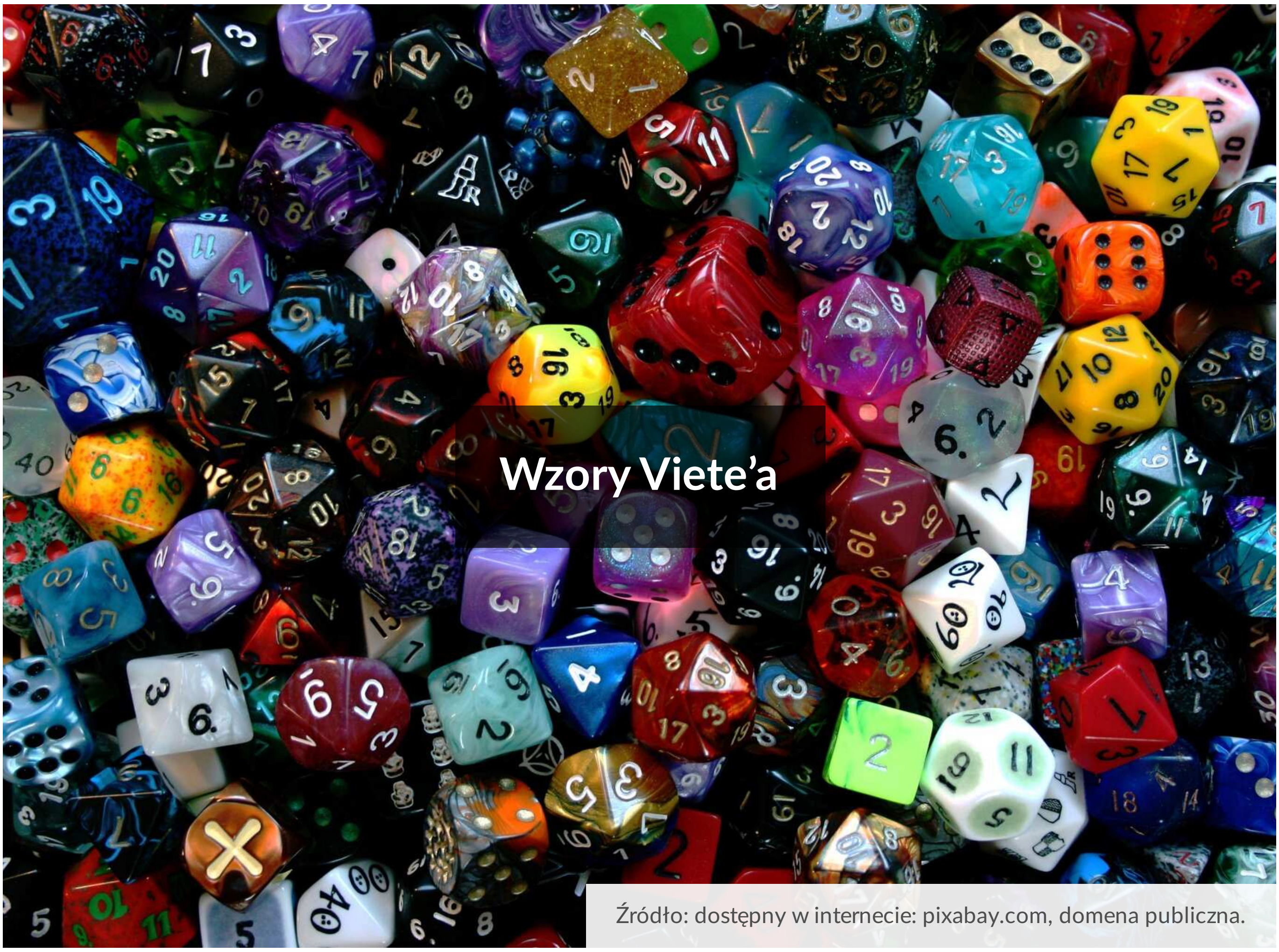
Wzory Viete’a

Wzory Viete’a



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale wyprowadzimy i zastosujemy wzory na sumę oraz iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.

Wzory te są wykorzystywane do znajdowania rozwiązań równania kwadratowego, badania ich znaków oraz do obliczania wartości wyrażeń, które zawierają te pierwiastki.

Wzory te nazwane są wzorami Viete’a od nazwiska ich autora Francois Viete $(1540 - 1603)$ – francuskiego matematyka, z zawodu prawnika. François Viète jako pierwszy posłużył się oznaczeniami literowymi do zapisywania niewiadomych oraz współczynników w równaniach. Dzięki wprowadzeniu oznaczeń literowych w równaniach pojawiła się możliwość opisywania ogólnych własności równań.

Francois Viete

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Obliczysz sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.
- Określisz znaki pierwiastków równania kwadratowego.
- Obliczysz sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego.

Przeczytaj

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0$ ma pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

Jeżeli $\Delta > 0$ to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeżeli $\Delta = 0$ wtedy równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Twierdzenie: Wzory Viete'a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dowód

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Przykład 1

Obliczymy sumę i iloczyn pierwiastków równania $x^2 + 2x - 15 = 0$ (jeżeli równanie ma pierwiastki).

$x^2 + 2x - 15 = 0$

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$

$\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa pierwiastki x_1 i x_2.

Korzystając z wzorów Viete'a obliczymy sumę pierwiastków:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

Obliczymy iloczyn pierwiastków:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{1} = -15$

Przykład 2

Obliczymy sumę i iloczyn rozwiązań równania $2x^2 - 3x + 7 = 0$ (jeżeli istnieją).

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47$

„Delta” jest liczbą ujemną, zatem równanie nie posiada miejsc zerowych.

Poznane wzory wykorzystamy teraz do określenia znaku pierwiastków równania kwadratowego.

Przykład 3

Jeśli równanie kwadratowe $x^2 - 5x + 6 = 0$ ma pierwiastki, to określimy ich znaki.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

Ponieważ $\Delta > 0$ to równanie ma dwa pierwiastki x_1, x_2.

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$

Ponieważ $x_1 \cdot x_2 > 0$, to możemy wnioskować, że oba pierwiastki x_1 i x_2 mają ten sam znak (oba są ujemne lub oba są dodatnie).

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$

Ponieważ $x_1 + x_2 > 0$ oraz obie liczby mają ten sam znak, zatem x_1 i x_2 są liczbami dodatnimi.

Przykład 4

Określimy znaki pierwiastków równania $x^2 + x - 12 = 0$ (jeżeli istnieją).

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$

Jeżeli iloczyn liczb jest ujemny oznacza to, że liczby x_1 i x_2 mają różne znaki (jedna jest dodatnia, a druga ujemna).

Wniosek:

Liczby x_1, x_2 są dodatnie gdy:

$x_1 \cdot x_2 > 0$

$x_1 + x_2 > 0$

Liczby x_1, x_2 są ujemne gdy:

$x_1 \cdot x_2 > 0$

$x_1 + x_2 < 0$

Liczby x_1, x_2 mają różne znaki gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Przykład 5

Jeśli równanie $2x^2 + 5x - 4$ ma pierwiastki, to obliczymy sumę ich kwadratów.

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 25 + 32 = 57 > 0$

$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$

Zatem:

$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-4}{2} = \frac{25}{4} + 4 = 6\frac{1}{4} + 4 = 10\frac{1}{4}$

Suma kwadratów pierwiastków równania jest równa $10\frac{1}{4}$.

Słownik

wzory Viete'a

jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Film samouczek

Polecenie 1

Obejrzyj film samouczek przedstawiający wyprowadzenie wzorów Viete'a różnymi metodami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15vrw21U

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Uzasadnij, że jeżeli równanie kwadratowe ma jeden podwójny pierwiastek, to wzory Viete'a można zapisać w postaci $2x_0 = -\frac{b}{a}$, ${x_0}^2 = \frac{c}{a}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Czy można ułożyć równanie kwadratowe tak, aby suma pierwiastków była równa 4, a iloczyn 5?

Ćwiczenie 8

Korzystając ze wzorów Viete'a oblicz kwadrat różnicy rozwiązań równania kwadratowego $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory Viete'a

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) stosuje wzory Viete'a dla równań kwadratowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego
- określa znaki pierwiastków równania kwadratowego
- oblicza sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego
- dobiera model algebraiczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się w parach wiadomościami dotyczącymi miejsc zerowych równania kwadratowego oraz wzorów na sumę i iloczyn pierwiastków. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe i porównują swoje wiadomości.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj".
3. Uczniowie oglądają film samouczek i porównują wzory na sumę i iloczyn pierwiastków z tymi, które wyprowadzili sami.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące obliczania sumy i iloczynu pierwiastków równania kwadratowego.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany do stworzenia prezentacji multimedialnej.