



Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Źródło: Ruthson Zimmerman, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiesz, że twój kolega Eryk ma dwójkę rodzeństwa. Koleżanka powiedziała ci, że Eryk na pewno ma brata, ale nie znała płci drugiego dziecka. Zastanów się, jakie jest prawdopodobieństwo, że Eryk ma dwóch braci.

Jeśli twoja odpowiedź brzmi $\frac{1}{2}$, bo przecież drugie dziecko to albo chłopiec, albo dziewczynka, to się mylisz! Okazuje się, że to co podpowiada nam intuicja, nie zawsze jest poprawne matematycznie. Skoro wiemy, że Eryk ma brata, to wszystkie możliwe zdarzenia elementarne określające kolejność płci rodzeństwa Eryka są następujące:



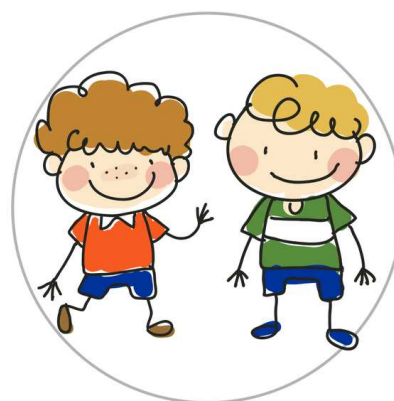
Brat

Siostra



Siostra

Brat



Brat

Brat

Mamy więc trzy możliwości, z których wybieramy jedno zdarzenie sprzyjające (brat, brat). Prawdopodobieństwo, że Eryk ma dwóch braci jest równe $\frac{1}{3}$, czyli około 33%. Czy na pewno?

Zdarzenie: *Eryk ma brata* i zdarzenie: *Eryk nie ma brata* to zdarzenia przeciwne. Zatem, gdyby koleżanka powiedziała ci, że Eryk nie ma brata, to czy prawdopodobieństwo zdarzenia: *Eryk ma dwóch braci* byłoby nadal równe $\frac{1}{3}$? Czy na pewno? Wyjaśnij ten paradoks.

Jeśli zaciekał cię przedstawiony wyżej problem, który możemy nazwać „paradoksem dwóch braci”, to na pewno z przyjemnością zapoznasz się z dalszymi materiałami, w których będziemy rozważać prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.

Twoje cele

- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego.
- Obliczysz prawdopodobieństwo danego zdarzenia, znając prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.
- Dobierzesz odpowiedni model probabilistyczny do problemu z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

W tym materiale pokażemy kilka przykładów zastosowania wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego. Będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $A' \subset \Omega$.

Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Dowód

Założmy, że $A \subset \Omega$, $A' \subset \Omega$ i A, A' są zdarzeniami przeciwnymi.

Wtedy $A \cap A' = \emptyset$. Zdarzenia A i A' wykluczają się. Zatem obliczając prawdopodobieństwo ich sumy, korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń wykluczających się.

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

Wiemy też, że $A \cup A' = \Omega$. Zatem:

$$P(A \cup A') = P(\Omega) = 1$$

Porównujemy prawe strony otrzymanych równości.

$$P(A) + P(A') = 1$$

Stąd:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

c.d.n.

Analizując wzór zawarty w twierdzeniu o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego, można zauważyć, że znając prawdopodobieństwo danego zdarzenia, można obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego i odwrotnie.

Przykład 1

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $A' \subset \Omega$. Obliczymy $P(A)$ i

$P(A')$ wiedząc, że $P(A) = 4 \cdot P(A')$.

Korzystamy z równości zapisanej w treści zadania i ze wzoru wynikającego z twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego. Zapisujemy odpowiedni układ równań i wyznaczamy najpierw $P(A')$.

$$\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(A') \\ P(A') = 1 - 4 \cdot P(A') \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(A') \\ 5 \cdot P(A') = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(A') \\ P(A') = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\text{Stąd } P(A) = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Zadania z rachunku prawdopodobieństwa na ogół można rozwiązać kilkoma sposobami. Nad wykorzystaniem wzoru na [prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego](#), zastanawiamy się, spotykając w treści zadania sformułowania typu „choć raz”, „co najmniej...”. Również zadania, w treści których znajduje się przeczenie, (np. nie wszystkie..., nie każdy..., nie jest podzielna...) wskazują, że warto rozważyć możliwość obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego.

Przykład 2

Z cyfr 7, 9, 5 tworzymy liczby pięciocyfrowe. Z tak utworzonych liczb wybieramy jedną. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wybrana liczba nie jest podzielna przez 5.

Wynikiem doświadczenia jest wybranie liczby pięciocyfrowej, zbudowanej z podanych trzech cyfr.

Takich liczb jest $3^5 = 243$.

Zatem $|\Omega| = 243$.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na wybraniu liczby podzielnej przez 5,

A' – zdarzenie polegające na wybraniu liczby, która nie jest podzielna przez 5.

Liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A łatwo wyznaczyć, bo cyfrą jedności każdej z takich liczb musi być 5.

Stąd: $|A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 81$.

Zakładamy, że wybór każdej z liczb jest jednakowo prawdopodobny.

$$P(A) = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$$

Teraz możemy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego, czyli zdarzenia A' .

$$P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wybrana liczba nie jest podzielna przez 5 jest równe $\frac{2}{3}$.

Przykład 3

Jury konkursu *Przeboje świata* składa się z dziesięciu osób. W czasie prezentacji uczestników, jurorzy siedzą w jednym rzędzie. Przed zajęciem miejsc, losują numery foteli, na których zasiadą. Obliczymy, jakie jest prawdopodobieństwo, że pani Miła i pan Bardzomiły nie będą siedzieć obok siebie.

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że pani Miła (M) i pan Bardzomiły (B) usiądą obok siebie,

A' – zdarzenie polegające na tym, że pani Miła (M) i pan Bardzomiły (B) nie będą siedzieć obok siebie.

Obliczymy najpierw, ile jest możliwości zdarzenia polegającego na tym, że pani Miła (M) i pan Bardzomiły (B) usiądą bok siebie.

Pani Miła i pan Bardzomiły mogą siedzieć w porządku MB lub BM – dwie możliwości.

Para ta może usiąść na 1 i 2 miejscu, 2 i 3 miejscu, ..., 9 i 10 miejscu – 9 możliwości.

Jeśli pani Miła i pan Bardzomiły zajmą miejsca, to pozostałe osoby mogą usiąść na $10 - 2 = 8$ miejscach na $8!$ sposobów.

Zatem

$$|A| = 2 \cdot 9 \cdot 8! = 18 \cdot 8!$$

Jurorzy zajmują miejsca w sposób losowy, więc

$$|\Omega| = 10!$$

Korzystamy z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A) = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{18}{9 \cdot 10} = \frac{1}{5}$$

Teraz już możemy wyznaczyć szukane prawdopodobieństwo:

$$P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że pani Miła i pan Bardzomiły nie będą siedzieć obok siebie jest równe $\frac{4}{5}$.

Przykład 4

Spośród 4 kobiet i 8 mężczyzn wybrano w sposób losowy 3 osoby, które poddano testom na prawdomówność. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wśród wybranych osób jest co najmniej jedna kobieta.

Oznaczmy:

K – zdarzenie polegające na tym, że wśród wybranych jest co najmniej jedna kobieta.

Zdarzeniu K odpowiadają trzy możliwości – wybrana została jedna kobieta, wybrane zostały dwie kobiety, wybrane zostały trzy kobiety. Aby nie rozpatrywać trzech możliwości, wygodniej jest określić najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego K' – wybrani zostali sami mężczyźni.

Wybierane są trzy osoby z dwunastu, zatem $|\Omega| = \binom{12}{3} = 220$.

Zdarzeniu K' sprzyja tyle zdarzeń elementarnych, ile jest trzelementowych kombinacji zbioru ośmioelementowego.

$$|K'| = \binom{8}{3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest więc równe

$$P(K') = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

Obliczamy wreszcie prawdopodobieństwo zdarzenia K .

$$P(K) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wśród wybranych osób jest co najmniej jedna kobieta, jest równe $\frac{41}{55}$.

Przykład 5

W torebce było n cukierków, wśród których były dwa cukierki czekoladowe. Kuba wyciągnął w sposób losowy dwa cukierki z torebki. Prawdopodobieństwo, że wyciągnie

przynajmniej jeden cukierek czekoladowy jest równe $\frac{19}{55}$. Obliczymy ile było cukierków w torebce.

Obliczamy najpierw **prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego** N – Kuba nie wyciągnął ani jednego cukierka czekoladowego.

$$P(N) = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{(n-2)! \cdot 2!}{n!} = \frac{(n-3)(n-2)}{n(n-1)}$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia W – Kuba wyciągnie przynajmniej jeden cukierek czekoladowy jest równe

$$P(W) = 1 - P(N) = 1 - \frac{(n-3)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n(n-1) - (n-3)(n-2)}{n(n-1)}$$

Wiemy, że liczba $P(W)$ jest równa $\frac{19}{55}$.

Czyli

$$\frac{n(n-1) - (n-3)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{19}{55}$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie kwadratowe $19n^2 - 239n + 330 = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $\frac{30}{19}$ i 11.

Tylko druga z tych liczb spełnia warunki zadania (jako liczba naturalna).

Odpowiedź:

W torebce było 11 cukierków.

Przed przystąpieniem do rozwiązania kolejnego zadania, przypomnimy dwa ważne twierdzenia, które pomogą nam w obliczeniach.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega, B \subset \Omega$.

Wówczas:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Twierdzenie: Prawa de Morgana dla zdarzeń

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega, B \subset \Omega$.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Przykład 6

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ wylosowano jedną liczbę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba nie jest podzielna ani przez 20, ani przez 30.

Z określeniem liczby elementów zbioru zdarzeń elementarnych nie mamy problemu:

$$|\Omega| = 100.$$

Oznaczmy:

A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba nie jest podzielna ani przez 20, ani przez 30.

Wypisanie wszystkich liczb, które nie są podzielne ani przez 20, ani przez 30 jest dość pracochłonne.

Wiemy już, że w takich przypadkach warto rozważyć zdarzenie przeciwne.

Oznaczmy teraz:

D – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 20,

T – zdarzenie polegające na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 30.

Wtedy:

$$D = \{20, 40, 60, 80, 100\}, |D| = 5 \text{ i } P(D) = \frac{5}{100};$$

$$T = \{30, 60, 90\}, |T| = 3 \text{ i } P(T) = \frac{3}{100};$$

$$D \cap T = \{60\}, |D \cap T| = 1 \text{ i } P(D \cap T) = \frac{1}{100}.$$

Korzystając z praw de Morgana możemy zapisać

$$A = D' \cap T' = (D \cup T)'$$

Stąd

$$P(A) = P[(D \cup T)'] = 1 - P(D \cup T) = 1 - P(D) - P(T) + P(D \cap T)$$

$$P(A) = 1 - \frac{5}{100} - \frac{3}{100} + \frac{1}{100} = \frac{93}{100}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba nie jest podzielna ani przez 20, ani przez 30 jest równe $\frac{93}{100}$.

Słownik

prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $A' \subset \Omega$; jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj animację, która przybliży Ci jedno z kluczowych twierdzeń klasycznego modelu rachunku prawdopodobieństwa – twierdzenie o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego. Zwróć uwagę, w jakich przypadkach warto korzystać z tego twierdzenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVaAxw9Ve>

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

W urnie jest siedem kul czarnych i pięć białych. Losowo wyciągamy cztery kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z wyciągniętych kul jest czarna.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że ta liczba nie jest kwadratem liczby naturalnej jest równe:

☐ $\frac{7}{50}$

☐ $\frac{43}{50}$

☐ $\frac{49}{50}$

☐ $\frac{1}{50}$

Ćwiczenie 2



W kwaciarni na półce stoi piętnaści wazonów, przy czym pięć z kwiatami. Sprzedawca na chybił trafił zdejmuję z półki cztery wazon. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden to wazon z kwiatami?

☐ $\frac{11}{13}$

☐ $\frac{9}{13}$

☐ $\frac{2}{13}$

☐ $\frac{5}{13}$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie ułamki dziesiętne.

Dwaj strzelcy strzelają jednocześnie do tej samej tarczy. Pierwszy trafia z prawdopodobieństwem 0,8, a drugi nie trafia z prawdopodobieństwem 0,1.

Prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony co najmniej raz jest równe .

Prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony dokładnie dwa razy jest równe .

Ćwiczenie 4



W urnie są trzy kule białe i pięć czarnych. Losujemy dwie kule. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Prawdopodobieństwo, że żadna z wylosowanych kul nie jest biała jest równe $\frac{5}{14}$.

☐ Prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedna kula jest biała jest równe $\frac{3}{14}$.

☐ Prawdopodobieństwo, że obydwie kule są białe jest równe $\frac{3}{28}$.

Ćwiczenie 5



Niech $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ i $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$. Połącz w pary prawdopodobieństwo i jego wynik.

$P(B)$

$\frac{7}{12}$

$P(B')$

$\frac{1}{2}$

$P(A \cup B)$

$\frac{5}{12}$

$P(B \cap A')$

$\frac{1}{6}$

Ćwiczenie 6



W turnieju tenisowym uczestniczy ośmiu graczy, których rozdzielono w sposób losowy na dwie grupy, po cztery osoby w każdej. Należy obliczyć prawdopodobieństwo, że gracze Wysoki i Niski znajdą się w tej samej grupie.

Uzupełnij rozwiązanie zadania, przeciągając odpowiednie liczby.

Liczba zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest równa liczbie

-elementowych kombinacji zbioru

-elementowego.

Zatem:

$$|\Omega| =$$

Oznaczmy:

R - zdarzenie polegające na tym, że Wysoki i Niski znajdą się w różnych grupach.

Wysoki i Niski znajdą się w różnych grupach, gdy w jednej z grup będzie trzech graczy spośród

i jeden z nich.

$$|R| = \binom{6}{3} \cdot \binom{2}{1} =$$

Prawdopodobieństwo, że gracze Wysoki i Niski znajdą się w różnych grupach jest równe:

$$P(R) =$$

Prawdopodobieństwo, że gracze Wysoki i Niski znajdą się w tej samej grupie, jest równe:

$$P(R') = 1 - P(R) =$$

70	4	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	20	8	$\frac{4}{7}$	30	6	40	2
----	---	---------------	---------------	----	---	---------------	----	---	----	---

Ćwiczenie 7



Rzucono trzema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wyrzuconych oczek na trzech kostkach nie jest liczbą podzielną przez sześć i nie jest liczbą podzielną przez dziewięć.

Ćwiczenie 8



W loterii *Dla ryzykantów* zawierającej dziesięć losów jeden los jest wygrywający. W loterii *Dla ostrożnych* zawierającej dwadzieścia losów, dwa losy są wygrywające. W której loterii jest większe prawdopodobieństwo wygrania przy zakupie dwóch losów?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego
- wyznacza prawdopodobieństwo danego zdarzenia, znając prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego
- dobiera odpowiedni model probabilistyczny do problemu z kontekstem realistycznym
- analizuje wybierane przez siebie metody rozwiązywania zadań probabilistycznych i ocenia ich skuteczność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- po nitce do kłębka

- zadania z koszyka

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą po nitce do kłębka powtarzają wiadomości na temat sposobów wyznaczania prawdopodobieństwa, znanych wzorów (kolejni uczniowie podają po jednej informacji, aż do wyczerpania wiadomości).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w małych grupach pracują metodą zadania z koszyka. Najpierw zapoznają się z materiałem zapisanym w sekcji „Przeczytaj”. Następnie układają zadania podobnego typu, zapisują na kartkach i umieszczają je w koszyku.
2. Teraz przedstawiciele grup kolejno losują zadania z koszyka i rozwiązują je na tablicy. Ich zadaniem jest nie tylko rozwiązanie zadania, ale też szczegółowe wyjaśnienie wykonywanych czynności – w razie wątpliwości podpowiadają autorzy danego zadania.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.
3. Ochotnicy opowiadają o swoich strategiach rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa, dokonują autorefleksji, wysłuchują rad koleżanek i kolegów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest obejrzenie animacji i rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wstępem do zajęć lub jednym z elementów zajęć podsumowujących umiejętności dotyczące rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa.