



Poszukiwanie rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi w zbiorze liczb całkowitych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

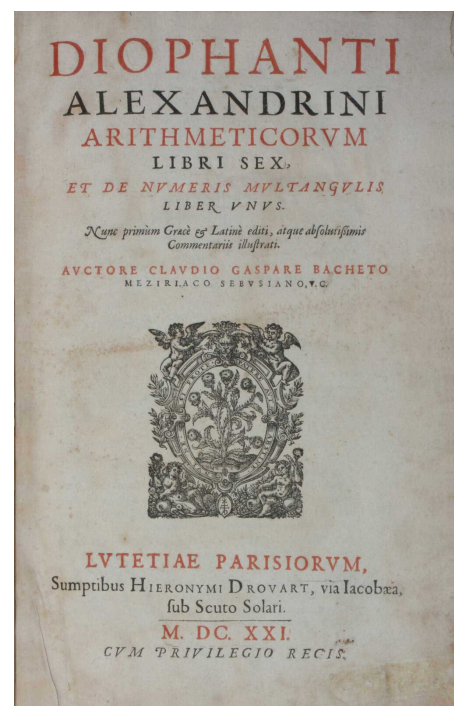
Poszukiwanie rozwiązania równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi w zbiorze liczb całkowitych

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się poszukiwaniem rozwiązań równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi w zbiorze liczb całkowitych.

Równania takie nazywamy diofantycznymi. Ich nazwa pochodzi od greckiego matematyka Diofantosa. Był on pierwszym uczniem, który poświęcił się rozwiązywaniu równań. Jest twórcą symboli odejmowania i równości.

Diofantos stworzył dzieło „*Arithmetica*”, które składało się najprawdopodobniej z trzynastu ksiąg. W zachowanych sześciu księgach zostawił 189 równań wraz z rozwiązaniami. Większość z tych równań jest równaniami nieoznaczonymi, czyli posiadającymi nieskończenie wiele rozwiązań (z jedną, dwiema lub trzema niewiadomymi). Rozwiązanie musiało być liczbą dodatnią i wymierną.



Okładka dzieła "Arithmetica"

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

To on jest autorem równania, które już znasz z informacji o wielkim twierdzeniu Fermata.

$$x^n + y^n = z^n$$

W XIV wieku grecki mnich Maksymus Planudes umieścił w swojej antologii wiersz „Epitafium Diofanta”. Jego treść jest jednocześnie zadaniem tekstowym.

“ Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant – a dzięki przedziwnej
Sztuce zmarłego i wiek jego zdradzi ci ten głaz:
Chłopcem przez szóstą część życia pozostać bóg mu pozwolił,
Lica pokwitły mu zaś, kiedy dwunasta znów część
Życia minęła, a znowu żywota, gdy przebył część siódmą.
Młodą małżonkę w dom dobry wprowadził mu bóg,
Która, gdy pięć lat minęło, małego powiła mu synka,
Ale okrutny chciał los, że kiedy syn ledwie wiek
Ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades.
Kojący ogromny swój ból, szukał Diofant wśród liczb
Jeszcze przez cztery lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Spróbuj policzyć, ile lat żył Diofantos. Jakie jeszcze informacje o uczonym możemy odczytać z tego wiersza?

Twoje cele

- Sformułujesz definicję równania diofantycznego.
- Znajdziesz niektóre rozwiązania całkowite równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przeczytaj

Przykład 1

Znajdziemy rozwiązania całkowite równania $x + y = 3$.

Rozwiązanie

Wiemy już, że rozwiązaniami takiego równania są pary liczb (x, y) , które spełniają to równanie.

W tym przykładzie wybieramy tylko takie pary, w których liczby x oraz y należą do zbioru liczb całkowitych.

Wypiszmy kilka przykładowych rozwiązań:

x	y	Rozwiązanie – para liczb całkowitych
$x = 0$	$y = 3$	$(0, 3)$
$x = 1$	$y = 2$	$(1, 2)$
$x = 2$	$y = 1$	$(2, 1)$
$x = 3$	$y = 0$	$(3, 0)$
$x = 4$	$y = -1$	$(4, -1)$
$x = 5$	$y = -2$	$(5, -2)$
$x = 6$	$y = -3$	$(6, -3)$

Widać, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań.

Definicja: Równanie diofantyczne pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Równaniem diofantycznym pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy równanie postaci $ax + by = c$, gdzie: a, b i $c \in \mathbb{Z}$ i szukane rozwiązania (x, y) stanowią pary liczb całkowitych.

Przykład 2

Wyznamy rozwiązania całkowite równania $3x + 2y = 1$.

Rozwiązanie

Rozwiązaniem, które daje się łatwo zauważyć jest $x = 1$ i $y = -1$.

Innymi rozwiązaniami tego równania są np. pary: $(-1, 2)$, $(3, -4)$, ale już nie tak łatwo to odgadnąć.

Twierdzenie: o rozwiązaniach równania diofantycznego

Równanie diofantyczne postaci $ax + by = c$, gdzie a, b i $c \in \mathbb{Z}$, ma rozwiązania (x, y) , gdzie x i y są liczbami całkowitymi wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(a, b)$ jest dzielnikiem liczby c .

Przykład 3

Spróbujemy wyznaczyć rozwiązanie całkowite równania $2x + 4y = 5$.

Rozwiązanie

To równanie nie ma rozwiązań całkowitych.

Wykażemy to korzystając z twierdzenia o rozwiązaniach równania diofantycznego. W przykładzie:

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$NWD(a, b) = NWD(2, 4) = 2$$

$$c = 5$$

$2 \nmid 5$ (dwa nie dzieli pięciu)

Zatem $NWD(a, b)$ nie jest dzielnikiem c , więc równanie diofantyczne $2x + 4y = 5$ nie ma rozwiązania (w zbiorze liczb całkowitych).

Twierdzenie: o parze liczb będącej rozwiązaniem równania diofantycznego

Jeśli para (x_0, y_0) jest rozwiązaniem równania diofantycznego postaci $ax + by = c$, gdzie a, b i $c \in \mathbb{Z}$ i jeśli $d = NWD(a, b)$, to każde rozwiązanie dane jest wzorem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t, & t \in \mathbb{Z} \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t, & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie diofantyczne $10x + 5y = -5$.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy równanie ma rozwiązanie.

Wyznaczamy współczynniki a, b i c .

$$a = 10$$

$$b = 5$$

$$c = -5$$

Obliczamy największy wspólny dzielnik współczynników a i b .

$$NWD(a, b) = NWD(5, 10) = 5$$

5 jest dzielnikiem $c = -5$, w więc zgodnie z powyższym twierdzeniem, istnieją rozwiązania tego równania.

Możemy łatwo zauważyć, że jednym z rozwiązań tego równania jest para liczb $(1, -3)$, aby znaleźć inne rozwiązania możemy skorzystać z twierdzenia.

Korzystając z twierdzenia o parze liczb będącej rozwiązaniem równania diofantycznego, jeśli przyjmiemy $x_0 = 1$ i $y_0 = -3$, otrzymujemy:

- dla $t = 1$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{5} \cdot 1 = 1 + 1 = 2 \\ y = -3 - \frac{10}{5} \cdot 1 = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para $(2, -5)$.

$$\text{Sprawdzamy: } L = 10 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) = 20 - 25 = -5 = P$$

- dla $t = -2$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{5} \cdot (-2) = 1 - 2 = -1 \\ y = -3 - \frac{10}{5} \cdot (-2) = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest para $(-1, 1)$.

$$\text{Sprawdzamy: } L = 10 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = -10 + 5 = -5 = P$$

Możesz w ten sposób znaleźć jeszcze inne rozwiązania. Jest ich, jak wiesz, nieskończenie wiele.

Przykład 5

A teraz sprawdzimy, czy udało się nam prawidłowo odczytać wiek Diofantosa.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

- czas życia Diofantosa – x
- dzieciństwo – $\frac{1}{6}x$
- okres młodości – $\frac{1}{12}x$
- czas między wiekiem młodzięcym, a ślubem – $\frac{1}{7}x$
- oczekiwanie na syna – 5
- czas życia syna – $\frac{1}{2}x$
- czas, jaki Diofantos żył po śmierci syna – 4

Układamy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Rozwiązujemy je metodą równań równoważnych:

$$\frac{2}{12}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{6}{12}x + 4 = x$$

$$\frac{1}{7}x + 9 + \frac{9}{12}x = x$$

$$x - \frac{12}{84}x - \frac{63}{84}x = 9$$

$$\frac{9}{84}x = 9 \quad | \cdot \frac{84}{9}$$

$$x = 84$$

A zatem:

Diofantos żył 84 lata. A oto pozostałe informacje:

- jego dzieciństwo to 14 lat, lica pokwitły mu w wieku 21 lat, a ożenił się, gdy miał 33 lata.
- gdy miał 38 lat urodził mu się syn, który żył jedynie 42 lata.

Słownik

równania diofantyczne pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

równania postaci $ax + by = c$, w którym współczynniki a, b, c są liczbami całkowitymi oraz rozwiązania (x, y) stanowią pary liczb całkowitych

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z algorytmem Euklidesa, a następnie zobacz, jak można go wykorzystać do znajdowania rozwiązań równania diofantycznego.

Polecenie 2

- Rozwiąż równanie diofantyczne $98x + 42y = 70$.
- Korzystając z algorytmu Euklidesa, wyznacz rozwiązanie (x_0, y_0) , gdzie $x_0 \in \mathbb{Z}$ i $y_0 \in \mathbb{Z}$.
- Następnie dla $t = 2$ wyznacz przykładowe rozwiązania (x, y) , gdzie $x \in \mathbb{Z}$ i $y \in \mathbb{Z}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary liczby a i b z ich największym wspólnym dzielnikiem.

$a = 462, b = 90$	2
$a = 234, b = 164$	6
$a = 420, b = 275$	7
$a = 245, b = 112$	5

Ćwiczenie 2



Zdanie	Prawda	Fałsz
Każda z par liczb: $(-3, 23), (0, 8), (7, -27)$ jest rozwiązaniem równania $5x + y = 8$.	☐	☐
Każda z par liczb: $(-7, -3), (0, 8),$ $(3, -1)$ jest rozwiązaniem równania $x - 5y = 8$.	☐	☐

Ćwiczenie 3



Zaznacz te równania diofantyczne, które posiadają rozwiązania.

☐ $184x - 345y = 92$

☐ $245x + 112y = 14$

☐ $25x - 135y = 49$

☐ $255x + 252y = -80$

Ćwiczenie 4



Przeciągnij do równań ich rozwiązania (x, y) , takie, że x i y są liczbami całkowitymi.

$$x - 3y = 10$$

$(-2, -16)$

$(4, 2)$

$(7, -1)$

$(4, -2)$

$(0, -10)$

$(-2, -4)$

$(10, 0)$

$(7, 11)$

$$3x - y = 10$$

Ćwiczenie 5



Uporządkuj zapis obliczenia $NWD(1517, 1073)$ za pomocą algorytmu Euklidesa.

$$444 = 185 \cdot 2 + 74$$



$$74 = 37 \cdot 2 + 0$$



$$NWD(1517, 1073) = 37$$



$$1073 = 444 \cdot 2 + 185$$



$$1517 = 1073 \cdot 1 + 444$$



$$185 = 74 \cdot 2 + 37$$



Ćwiczenie 6



Uzupełnij brakujące liczby i przyciągnij do górnej sekcji tylko te, które są rozwiązaniami równania diofantycznego $3x + 5y = 40$.

(80,)

(, -43)

(, -37)

12

30

-40

75

91

85

Ćwiczenie 7



Wskaż równanie, którego rozwiązaniami jest każda z par liczb: $(-2, 11)$, $(0, 5)$, $(1, 2)$.

☐ $-9x - 3y = 15$

☐ $3x + y = -5$

☐ $3x + y = 5$

☐ $6x + 2y = -10$

☐ $15x + 3y = 10$

Ćwiczenie 8



Wiedząc, że rozwiązaniem każdego z równań jest para liczb $(1, -1)$, wyznacz inne rozwiązanie dla wskazanego obok $t \in \mathbb{Z}$. Wpisz prawidłowe liczby.

Rozwiązaniem równania $15x + 21y = -6$ dla $t = 6$ jest para liczb: (,).

Rozwiązaniem równania $18x - 27y = 45$ dla $t = 2$ jest para liczb: (,).

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Poszukiwanie rozwiązań równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- rozpoznaje równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- rozpoznaje sytuacje, w odniesieniu do których, otrzymujemy równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości dotyczące równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i ich rozwiązań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i galerii zdjęć interaktywnych.
2. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają galerię zdjęć interaktywnych i konsultują wykonanie umieszczonego pod nim polecenia.
Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań

Wskazówki metodyczne:

Galeria zdjęć interaktywnych może być wykorzystana przez uczniów przed lekcją jako przygotowanie informacji o metodzie poszukiwania rozwiązań całkowitych równań liniowych z dwiema niewiadomymi lub jako utrwalenie wiadomości z lekcji.