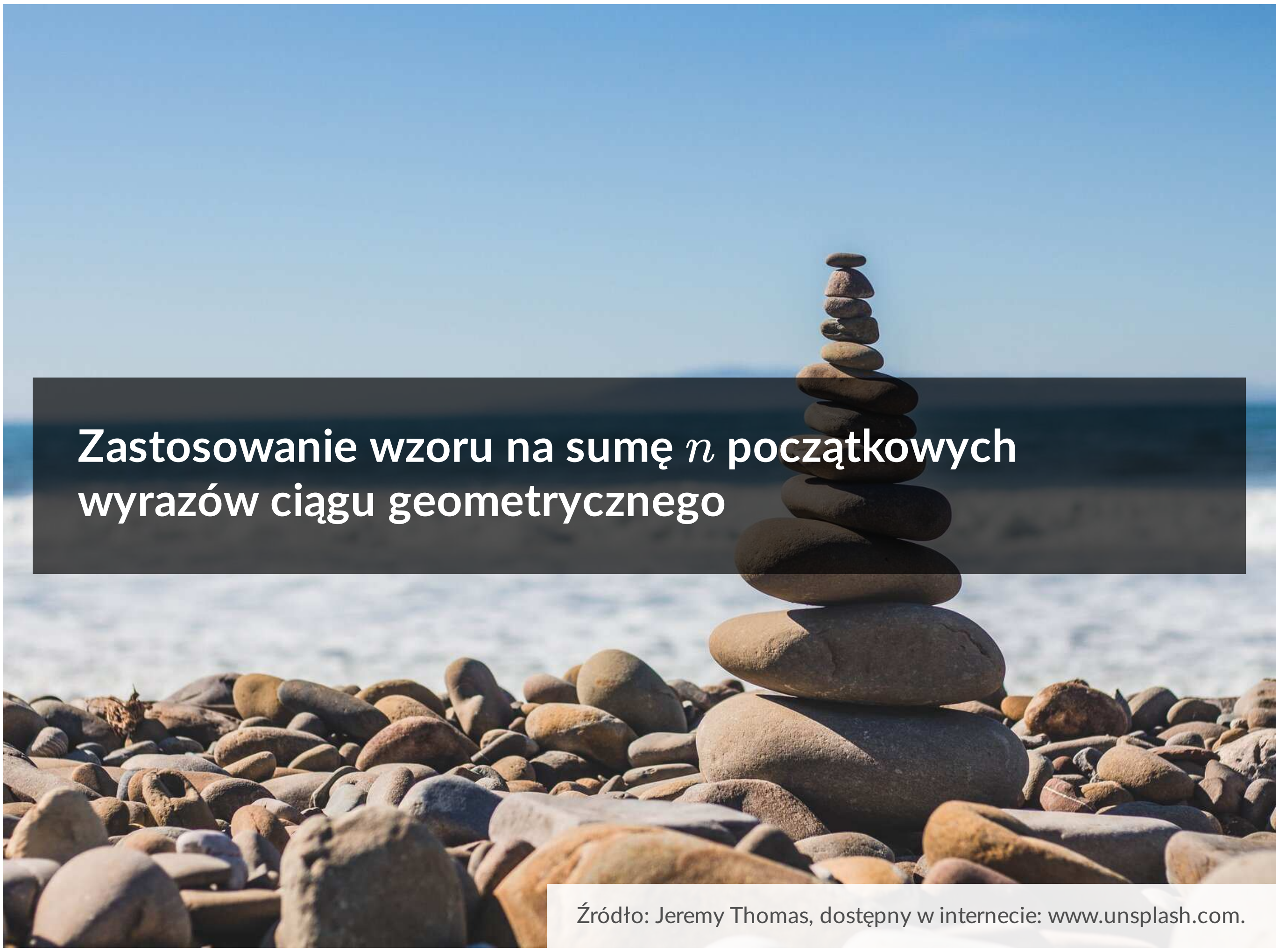
Zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego



Źródło: Jeremy Thomas, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale zajmiemy się przykładami zastosowania wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, do wyznaczania wielkości związanych z takim ciągiem – na przykład ilorazu ciągu, czy jego pierwszego wyrazu. Będziemy rozważać głównie ciągi mające skończoną liczbę wyrazów. W przypadku ciągów nieskończonych, będziemy uwzględniać tylko niektóre ich wyrazy.

Przed zapoznaniem się z treściami zawartymi w tym materiale, warto przypomnieć sobie sposoby rozwiązywania równań i układów równań.

Twoje cele

- Obliczysz sumę skończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego.
- Wykorzystasz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do wyznaczania wielkości związanych z tym ciągiem.
- Zastosujesz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w zadaniach z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie najważniejszych pojęć i wzorów, związanych z ciągiem geometrycznym.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n), jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu.

Ciąg geometryczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	**Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu**	**Suma n początkowych wyrazów ciągu**
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

W pierwszym przykładzie pokażemy, że znając sumę kilku wyrazów ciągu geometrycznego, pierwszy wyraz i iloraz ciągu, można określić ile wyrazów dodano.

Przykład 1

Dany jest ciąg geometryczny (c_n) taki, że $c_1 = 4$. Iloraz ciągu jest równy 3. Dodano kilka początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu i otrzymano 484. Ile wyrazów dodano?

Oznaczmy:
n – liczba wyrazów, które dodano ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$),
q – iloraz ciągu.

Podstawiamy dane wynikające z treści zadania do wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

$S_n = c_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$484 = 4 \cdot \frac{1-3^n}{1-3}$

$484 = 4 \cdot \frac{1-3^n}{-2}$

$484 = 2 \cdot (-1 + 3^n)$

Dzielimy obie strony równania przez 2 i wyznaczamy n.

$242 + 1 = 3^n$

$3^n = 243$

$n = 5$

Odpowiedź:

Dodano pięć wyrazów ciągu.

Zauważ, że w rozpatrywanym wyżej przykładzie, można było znaleźć kolejne wyrazy ciągu i dodawać je tak długo, aż otrzymamy 484. Jednak w przypadku dużej liczby wyrazów sumy, taka procedura jest pracochłonna i znacznie prościej jest korzystać z odpowiednich wzorów.

Teraz podobny, ale trudniejszy przykład, w którym teoretycznie też, moglibyśmy ograniczyć się do znalezienia kolejnych wyrazów ciągu („od tyłu"). Ale nie wiemy ile operacji dzielenia i dodawania musielibyśmy wykonać, więc ponownie skorzystamy z przydatnych wzorów.

Przykład 2

Obliczymy pierwszy wyraz i liczbę n wyrazów ciągu geometrycznego (b_n), w którym $b_n = 8748$, $S_n = 6564$ i iloraz ciągu $q = (-3)$.

Korzystamy ze wzoru na n–ty wyraz ciągu geometrycznego i ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego – otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} b_1 \cdot (-3)^{n-1} = 8748 \\ b_1 \cdot \frac{(-3)^n - 1}{-3-1} = 6564 \end{cases}$$

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez (-3), a obie strony drugiego równania przez (-4).

$$\begin{cases} b_1 \cdot (-3)^n = -26244 \\ b_1 \cdot [(-3)^n - 1] = -26256 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy b_1 i wstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} b_1 = \frac{-26244}{(-3)^n} \\ \frac{-26244}{(-3)^n} \cdot [(-3)^n - 1] = -26256 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie i wyznaczamy n.

$-26244 \cdot (-3)^n = -26256 \cdot (-3)^n - 26244$

$12 \cdot (-3)^n = -26244$

$(-3)^n = (-3)^7$

$n = 7$

Znamy już liczbę wyrazów, które dodawaliśmy – liczba 7 jest liczbą naturalną dodatnią, więc spełnia warunki zadania. Wyznaczymy pierwszy wyraz ciągu.

$b_1 = \frac{-26244}{(-3)^7} = 12$

Odpowiedź:

Pierwszy wyraz ciągu jest równy 12. Dodawano 7 wyrazów tego ciągu.

W kolejnym przykładzie na podstawie znanych wyrazów ciągu, znajdziemy sumę ciągu.

Przykład 3

Piąty wyraz rosnącego ciągu geometrycznego (c_n) jest równy 10000, a siódmy jest równy 62500. Wyznaczymy sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Oznaczmy:
c_5 – piąty wyraz rozważanego ciągu,
c_7 – siódmy wyraz ciągu,
S_5 – suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu.

Zauważmy, że $c_7 = c_5 \cdot q^2$. Zatem:

$62500 = 10000 \cdot q^2$

$q^2 = 6,25$

$q = 2,5$ lub $q = -2,5$

Ponieważ ciąg ma być rosnący, zatem $q = 2,5$.

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$c_5 = c_1 \cdot q^4$

$10000 = c_1 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4$

$c_1 = 256$

Obliczamy sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu.

$S_5 = 256 \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^5}{1-\frac{5}{2}}$

$S_5 = 256 \cdot \frac{\frac{3093}{32}}{\frac{3}{2}}$

$S_5 = 16496$

Odpowiedź:

Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu jest równa 16496.

Pokażemy, jak znając dwie sumy kilku wyrazów ciągu geometrycznego, można znaleźć wzór ogólny tego ciągu i jego wyrazy.

Przykład 4

Dany jest malejący ciąg geometryczny (a_n) sześciowyrazowy. Suma trzech pierwszych wyrazów jest równa 168, a suma trzech końcowych wyrazów jest ośmiokrotnie mniejsza. Znajdziemy wyraz ogólny ciągu i obliczymy wszystkie wyrazy tego ciągu.

Oznaczmy:
$a_1, a_2, \ldots, a_6$ – kolejne wyrazy ciągu.

Na podstawie treści zadnia możemy zapiać, że

$a_1 + a_2 + a_3 = 168$ i $a_4 + a_5 + a_6 = 168 : 8 = 21$

Wynika stąd, że $S_6 = 168 + 21 = 189$.

Teraz możemy zapisać odpowiedni układ równań, korzystając ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

Ponieważ ciąg jest malejący, zatem $q \neq 1$.

$a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 168$ i $a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 189$

Dzielimy stronami drugie z otrzymanych równań przez pierwsze.

$a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} : \left(a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q}\right) = 189 : 168$

$\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q} \cdot \frac{1-q}{a_1\left(1-q^3\right)} = \frac{189}{168}$

Skracamy ułamki i korzystamy z tego, że $1 - q^6 = \left(1 - q^3\right)\left(1 + q^3\right)$.

$1 + q^3 = \frac{9}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Znajdujemy teraz pierwszy wyraz ciągu.

$a_1 \cdot \frac{1-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = 168$

$a_1 = 168 \cdot \frac{4}{7} = 96$

> Zapisujemy wzór ogólny ciągu: $a_n = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, gdy $n \in \{1, 2,\ 3, 4,\ 5, 6\}$.
>
> Kolejne wyrazy ciągu to: 96, 48, 24, 12, 6, 3.

Równanie, które teraz rozwiążemy, może wydawać się dość trudne. Jednak rozumowanie, które przeprowadzimy, będzie podobne do tych, stosowanych w poprzednich przykładach.

> **Przykład 5**
>
> Rozwiążemy równanie wiedząc, że lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
>
> $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \ldots + x = 255,75$
>
> Na podstawie treści zadania wnioskujemy, że liczby
>
> $\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1\ldots$
>
> są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest równy $\frac{1}{4}$, a iloraz
>
> $q = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = 2$
>
> Liczba $255,75$ jest sumą kolejnych wyrazów tego ciągu. Ustalimy ilu.
>
> Zapisujemy lewą stronę równania, korzystając ze wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.
>
> $\frac{1}{4} \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 255,75$
>
> $2^n - 1 = 1023$
>
> $2^n = 1024$
>
> $n = 10$
>
> Obliczyliśmy, że lewa strona równania jest sumą dziesięciu wyrazów ciągu. Zatem x to dziesiąty wyraz tego ciągu. Czyli
>
> $x = \frac{1}{4} \cdot 2^{10-1} = \frac{512}{4} = 128$
>
> Odpowiedź:
>
> Rozwiązaniem równania jest liczba 128.

Słownik

ciąg geometryczny

ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Zwróć uwagę na zastosowania wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego w obliczeniach praktycznych.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DeeXJN5YH

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania wzoru na sumę n wyrazów ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

Danych jest sześć trójkątów o wspólnej podstawie długości 2. Wysokość pierwszego, najmniejszego z trójkątów jest równa 1. Wysokość drugiego trójkąta jest równa 2, wysokość każdego kolejnego trójkąta jest dwukrotnie większa, niż wysokość poprzedniego trójkąta. Oblicz sumę pól tych trójkątów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

W ciągu geometrycznym (a_n) sześciowyrazowym suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest trzy razy mniejsza od sumy wyrazów stojących na miejscach parzystych. Suma wyrazów stojących na miejscach parzystych jest równa 546. Znajdź wzór na n–ty wyraz ciągu.

Ćwiczenie 8

W rosnącym ciągu geometrycznym suma pierwszych czterech wyrazów jest równa 85, a suma następnych czterech jest równa 21760. Wyznacz iloraz ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza sumę skończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego
- wykorzystuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do wyznaczania wielkości związanych z tym ciągiem
- stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w zadaniach z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena ważona
- technika kruszenia

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie techniką oceny ważonej przypominają sobie w parach poznane twierdzenia, wzory, pojęcia związane z ciągiem geometrycznym. Ustalenia zamieszczają na hierarchicznym grafie, który powinien obrazować powiązania między wzorami i pojęciami.
2. Wybrany uczeń omawia efekty pracy swoje i osoby, z którą pracował, pozostali uczniowie ewentualnie korygują wypowiedź lub przedstawiają inne pomysły.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach techniką kruszenia, rozważając przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj”. Po przeczytaniu treści przykładu, ustalają z czego mogą wynikać problemy w rozwiązaniu danego zadania. Zastosowanie tej techniki pozwala na analizę danego problemu z innego punktu widzenia i ułatwia poszukiwanie alternatywnych rozwiązań. Po omówieniu w ten sposób zadania, uczniowie w każdym przypadku ustalają, co należy zrobić, aby wyeliminować trudności, które mogą się pojawić, co należy wiedzieć i jakie wzory zastosować. Następnie porównują swoje przypuszczenia z proponowanym rozwiązaniem.
2. Przykłady pokazane w filmie samouczku rozwiązują samodzielnie, porównując z proponowanymi rozwiązaniami.

Faza podsumowująca:

1. W ramach podsumowania zajęć uczniowie wspólnie wypracowują algorytm rozwiązania prostego zadania, wymagającego zastosowania wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ciąg geometryczny

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać na zajęciach poświęconych zastosowaniu ciągu geometrycznego w sytuacjach praktycznych.