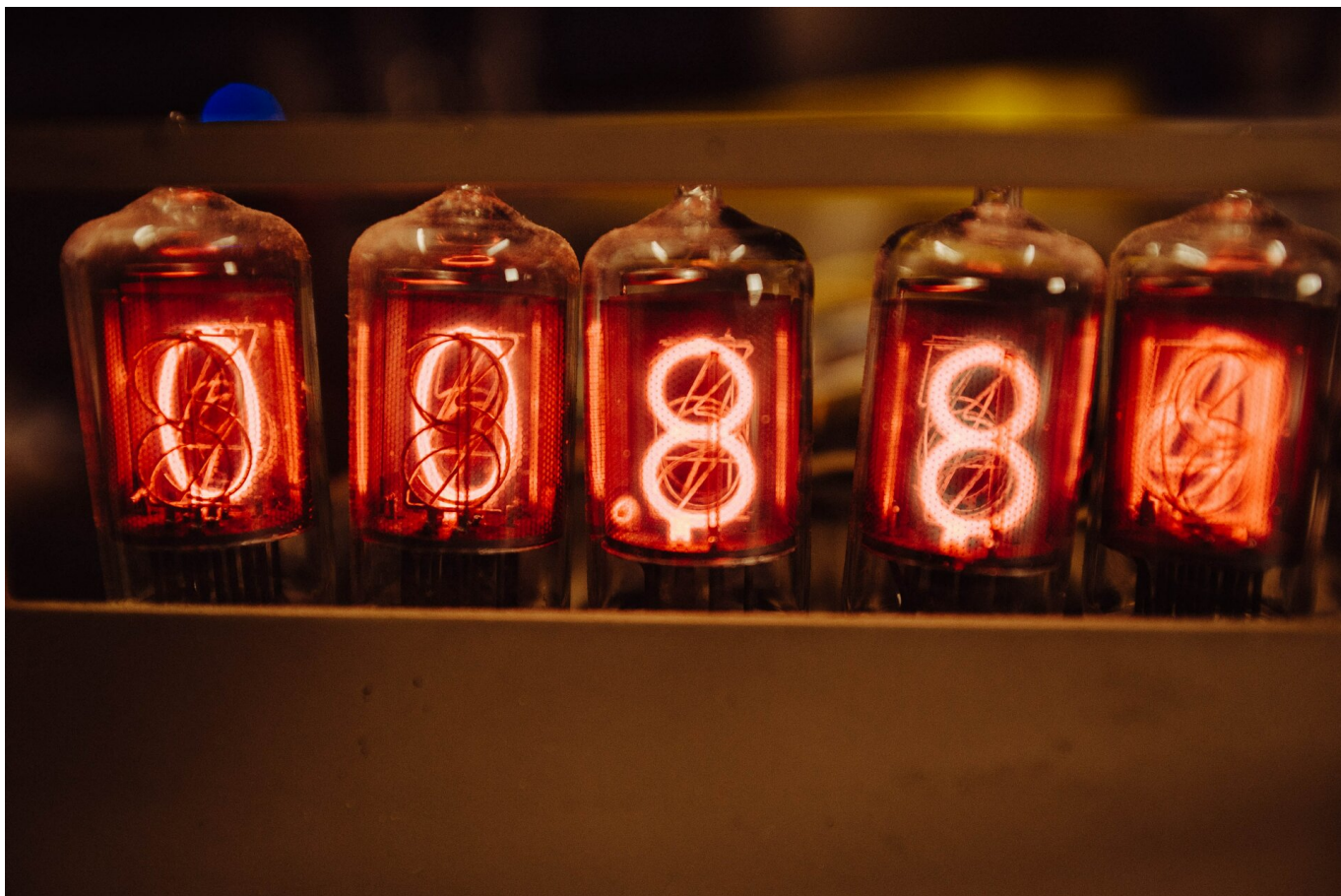




Wzór na różnicę n -tych potęg dwumianu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Wzór na różnicę n-tych potęg dwumianu

Źródło: Carlos Irineu Da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.



Strona tytułowa oryginalnego wydania łacińskiego z 1621 r. autorstwa Claude'a Gasparda Bacheta de Méziriac z Diophantus' Arithmetica
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Diofantos, matematyk grecki, żyjący w III wieku, zamiast spędzać przyjemnie czas na plaży (mieszkał w Aleksandrii leżącej nad Morzem Śródziemnym), zajmował się poszukiwaniem uniwersalnego algorytmu na rozwiązywanie w zbiorze liczb naturalnych niektórych typów równań.

Przykładem takiego równania (zwanego obecnie diofantycznym) jest równanie $x^n + y^n = z^n$, które dla $n = 2$ przedstawia zależność między długościami boków w trójkącie prostokątnym. Dla $n > 2$ równanie to nie ma rozwiązań (stanowi to treść wielkiego twierdzenia Fermata).

Niestety, Diofantos nie znalazł poszukiwanego algorytmu, za to pozostawił w spadku następnym pokoleniom matematyków wiele pytań z nim związanych.

Wielowiekowe próby odpowiedzi na pytania postawione przez Diofantosa doprowadziły do szybkiego rozwoju metod algebraicznych rozwiązywania równań. A co za tym idzie wzorów skróconego mnożenia, pomocnych w rozkładzie na czynniki wyrażeń algebraicznych.

W tym materiale poznasz dwa z takich wzorów – wzór na różnicę n -tych potęg i wzór na sumę n -tych potęg.

Twoje cele

- Zapiszesz różnicę potęg o wykładnikach naturalnych dwóch wyrażeń w postaci sumy jednomianów.
- Zapiszesz sumę potęg o wykładnikach naturalnych dwóch wyrażeń w postaci sumy jednomianów.
- Wykorzystasz poznane wzory skróconego mnożenia do przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Przeczytaj

Wzór na różnicę n -tych potęg

Zapiszmy kilka różnic kolejnych naturalnych potęg liczb x oraz y .

$$x^1 - y^1 = x - y$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

Zauważ, że w powyższych wzorach liczba wyrazów w drugim nawiasie jest równa wykładnikowi potęg stojących z lewej strony równości.

Analizując powyższe wzory zauważamy też inne analogie, które można ująć w postaci wzoru ogólnego.

Ważne!

Wzór na różnicę n -tych potęg:

Dla liczb rzeczywistych x, y i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Pokażemy teraz kilka zastosowań powyższego wzoru.

Przykład 1

Zapiszemy w postaci iloczynu $a^5 - 32$.

Ponieważ $32 = 2^5$, więc do wzoru

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

podstawiamy:

$$x = a, y = 2$$

$$a^5 - 2^5 = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + a^2 \cdot 2^2 + a \cdot 2^3 + 2^4)$$

Wykonujemy wskazane działania w nawiasie.

$$a^5 - 32 = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$$

Zauważmy, że wzór na różnicę n -tych potęg dla $n = 2$ to znany nam już wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń. Zatem jeśli wykładnik potęgi jest liczbą parzystą, to, rozkładając na czynniki wyrażenie $x^n - y^n$ można skorzystać (w niektórych przypadkach kilkakrotnie) właśnie z tego wzoru.

Przykład 2

Zapiszemy w postaci iloczynu: $M = 625 - k^4$.

Zauważmy, że $625 = 25^2$ i $k^4 = (k^2)^2$.

Aby zapisać podane wyrażenie w postaci iloczynu, korzystamy dwukrotnie ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$M = 625 - k^4 = 25^2 - (k^2)^2 = (25 - k^2)(25 + k^2)$$

$$M = (5 - k)(5 + k)(25 + k^2)$$

Przykład 3

Zapiszemy iloczyn $(b + 2c - 2)(b + 2c + 2)$ w postaci różnicy potęg.

Oznaczmy:

$$x = b + 2c$$

Możemy wtedy zapisać:

$$(b + 2c - 2)(b + 2c + 2) = (x - 2)(x + 2)$$

Prawa strona równości to iloczyn różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę – skorzystamy więc ze wzoru na różnicę kwadratów

$$(b + 2c - 2)(b + 2c + 2) = x^2 - 2^2 = (b + 2c)^2 - 2^2$$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $(x^3 + x)(x^2 - 1) = 1 - x$.

Przenosimy wyrazy z prawej strony równania na lewą.

$$(x^3 + x)(x^2 - 1) + x - 1 = 0$$

Różnicę kwadratów zapisujemy w postaci iloczynu.

$$(x^3 + x)(x - 1)(x + 1) + (x - 1) = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik poza nawias.

$$(x - 1) \cdot [(x^3 + x)(x + 1) + 1] = 0$$

W nawiasie kwadratowym wykonujemy wskazane działania.

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Iloczyn stojący po lewej stronie równania to różnica piątych potęg liczb x oraz 1.

$$x^5 - 1 = 0$$

Stąd:

$$x = 1$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Ważne!

Jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, a, b – to dowolne liczby rzeczywiste, to

$$x^{2n} - y^{2n} = (x - y)(x + y)(x^{2n-2} + x^{2n-4}y^2 + x^{2n-6}y^4 + \dots + x^2y^{2n-4} + y^{2n-2})$$

Wzór na sumę n -tych potęg

Zapiszmy kilka sum kolejnych nieparzystych naturalnych potęg liczb x oraz y .

$$x^1 + y^1 = x + y$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$x^7 + y^7 = (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$$

Analizując powyższe wzory, zauważamy pewne analogie, które można ująć w postaci wzoru ogólnego.

Ważne!

Wzór na sumę n -tych potęg:

Dla liczb rzeczywistych x, y i dowolnej liczby naturalnej nieparzystej n prawdziwy jest wzór

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Pokażemy teraz kilka zastosowań powyższego wzoru.

Przykład 5

Zapiszemy w postaci iloczynu każdą z sum.

Korzystamy ze wzoru na sumę n -tych potęg.

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$$

$$(xy)^7 + 7^7 = (xy + 7)(x^6y^6 - 7 \cdot x^5y^5 + 7^2 \cdot x^4y^4 - 7^3 \cdot x^3y^3 + 7^4 \cdot x^2y^2 - 7^5 \cdot xy + 7^6)$$

W niektórych przypadkach w postaci iloczynu można zapisać też sumy potęg o wykładnikach parzystych.

Przykład 6

Korzystając z tożsamości Sophie Germain, zapiszemy każdą z sum w postaci iloczynu.

$$a^{18} + 8b^{18} = (a^6 + 2b^6)(a^{12} - 2a^6b^6 + 4b^{12})$$

$$a^{12} + 8b^{12} = (a^4 + 2b^4)(a^8 - 2a^4b^4 + 4b^8)$$

Przykład 7

Wykażemy, że liczba $M = 6^{20} + 1$ jest liczbą złożoną.

$$M = 6^{20} + 1 = 6^{4 \cdot 5} + 1^5 = (6^4 + 1)(6^{16} - 6^{12} + 6^8 - 6^4 + 1)$$

Liczba M jest iloczynem dwóch liczb naturalnych, z których każda jest większa od 1, jest więc liczbą złożoną.

Słownik

wzór na różnicę n -tych potęg

dla liczb rzeczywistych x, y i dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z materiałem przedstawionym w animacji. Zapisz dwie następne różnice potęg, wynikające z równości podanych w Przykładzie 1.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1nGUYnKG>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wzoru na różnicę n -tych potęg dwumianu

Polecenie 2

Wykaż, że liczba $2^{10} + 7^{12}$ jest liczbą złożoną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary wyrażenie i jego zapis w postaci iloczynu.

$$x^5 - y^5$$

$$(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

$$x^3 - y^3$$

$$(x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$$

$$x^2 - y^2$$

$$(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

$$x^7 - y^7$$

$$(x - y)(x + y)$$

$$x^4 - y^4$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Ćwiczenie 2



Uzupełnij rozkład na czynniki, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

$$x^6 - y^6 = (x - y) \cdot \boxed{} \cdot (x^2 + xy + y^2) \cdot \boxed{}$$

$$x^4 - y^4 = (x + y) \cdot \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$$(x^2 + xy + y^2)$$

$$(x^2 - y^2)$$

$$(x + y)$$

$$(x^2 - xy + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)$$

$$(x - y)$$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Wyrażenie $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ można zapisać jako sumę piątych potęg liczb a oraz b .
- ☐ Jeśli $(k + 1)^n - k^n = (k + 1)^3 + (k + 1)^2k + (k + 1) \cdot k^2 + k^3$ to $n = 4$.
- ☐ Wyrażenie $x^{10} - y^{10}$ to dziesiąta potęga różnicy.

Ćwiczenie 4



Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozkład na czynniki wyrażenia $W = x^4 - 81$.

$$W = x^4 - 81$$



$$W = (x - 3)[x^2(x + 3) + 9 \cdot (x + 3)]$$



$$W = (x - 3)(x^3 + 3^1x^2 + 3^2x + 3^3)$$



$$W = x^4 - 3^4$$



$$W = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$



$$W = (x - 3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27)$$



Ćwiczenie 5



Wyrażenie $a^4(a^4 + 3) - 4$ można zapisać w postaci

☐ $(a - 1)(a^2 + 1)^2 \cdot (a^4 + 4)$

☐ $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

☐ $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 4)$

☐ $(a - 1)^2 \cdot (a^2 + 1)(a^4 + 4)$

Ćwiczenie 6



Wiadomo, że $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2 \cdot (x^2 + xy + y^2)^2$. Zatem liczba a spełniająca warunek $4^4 + 6^4 + 10^4 = 2a^2$ jest równa

☐ 76

☐ 46

☐ 152

☐ 86

Ćwiczenie 7



Wykaż, że $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$, gdy $x \neq 0$ i $y \neq 0$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że wyrażenie $x^4 - y^4$ można zapisać w postaci iloczynu dwoma sposobami:

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \text{ lub}$$

$$x^4 - y^4 = (x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3).$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na różnicę n -tych potęg dwumianu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje różnicę (sumę) potęg o wykładnikach naturalnych dwóch wyrażeń w postaci sumy jednomianów
- wykorzystuje poznane wzory skróconego mnożenia do przekształcania wyrażeń algebraicznych
- dobiera argumenty do uzasadnienia poprawności rozwiązań problemów
- dobiera odpowiednie modele matematyczne do rozwiązywanych problemów teoretycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- mini – konkurs

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w małych grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają poznane wzory skróconego mnożenia.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Następnie uczniowie w małych grupach zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” oraz z animacją.

Faza realizacyjna:

Grupy dzielą się pozyskanymi wiadomościami i wspólnie wykonują mapę myśli, zamieszczając na niej uzyskane informacje na temat wzorów na różnicę i sumę potęg.

Uczniowie biorą udział w mini – konkursie zadaniowym. W parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Trzy pary, które najszybciej poprawnie rozwiążą zadania, otrzymują oceny

bardzo dobre.

Faza podsumowująca:

Wybrani uczniowie przedstawiają zbiór najważniejszych wiadomości uzyskanych w czasie zajęć, oceniają, czy zakładane cele zostały osiągnięte.

Nauczyciel wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ogłasza wyniki konkursu zadaniowego.

Praca domowa:

W domu uczniowie mają za zadanie poszukać problemów z innych dziedzin wiedzy (np. z fizyki, chemii), w których wykorzystywany jest wzór na różnicę n -tych potęg.

Materiały pomocnicze:

Wzór skróconego mnożenia na n -tą potęgę różnicy

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać przy okazji podsumowywania działu związanego z wyrażeniami algebraicznymi lub rozkładem wielomianów na czynniki.