



Szeregi geometryczne w nierównościach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Szeregi geometryczne w nierównościach

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

W tym materiale zapoznamy się z nierównościami, w których występują sumy szeregu geometrycznego. Będzie to dobra okazja do przypomnienia sobie, w jaki sposób rozwiązujemy nierówności wielomianowe i wymierne. Szczególną uwagę będziemy zwracać na to, jak rozpoznajemy szeregi geometryczne występujące w zadaniu. Bardzo istotną kwestią będzie wyznaczanie dziedziny nierówności w związku z warunkami zbieżności szeregu geometrycznego.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać nierówności z wykorzystaniem szeregów geometrycznych.
- Przypomnisz sobie metody rozwiązywania nierówności wielomianowych i wymiernych.

Przeczytaj

W tym materiale przedstawimy przykłady nierówności, w których występują sumy szeregów geometrycznych.

Przy rozwiązywaniu nierówności należy zwrócić szczególną uwagę na to, jaka część nieskończonej sumy jest sumą szeregu geometrycznego. Najczęściej jest to zapisane w poleceniu, ale jeżeli nie ma takiej informacji, trzeba rozpoznać szereg na podstawie kilku początkowych wyrazów oraz wyrazu zapisanego w postaci ogólnej.

Należy także pamiętać o sprawdzeniu dziedziny, na którą istotny wpływ ma wartość ilorazu szeregu geometrycznego oraz pierwszy wyraz szeregu geometrycznego.

Konieczne na końcu każdego rozwiązania nierówności trzeba sprawdzić, czy otrzymane wyniki należą do dziedziny.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $x^2 + x^4 + x^6 + \dots > \frac{4}{5}$, w której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Szereg geometryczny ma pierwszy wyraz $a_1 = x^2$ oraz iloraz $q = x^2$.

Zatem ten szereg jest zbieżny, gdy $x^2 = 0$ lub $|x^2| < 1$.

Wobec tego dziedziną równania jest przedział $(-1, 1)$.

Po obliczeniu [sumy szeregu geometrycznego](#) z lewej strony nierówności, przyjmuje ona postać:

$$\frac{x^2}{1-x^2} > \frac{4}{5}$$

Możemy nierówność pomnożyć stronami przez $(1 - x^2)$, gdyż $1 - x^2 > 0$:

$$5x^2 > 4(1 - x^2)$$

$$9x^2 > 4$$

$$x^2 > \frac{4}{9}$$

Otrzymujemy zatem rozwiązanie

$x > \frac{2}{3}$ lub $x < -\frac{2}{3}$, a po uwzględnieniu dziedziny nierówności dostajemy odpowiedź:

$$x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $1 + \sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x})^4 + \dots < \sqrt{x} + 1$, w której lewa strona jest **sumą szeregu geometrycznego**.

Rozwiązanie:

Zapiszmy założenie: $x \geq 0$.

Aby szereg geometryczny z lewej strony nierówności był zbieżny, musi zachodzić warunek: $|\sqrt{x}| < 1$.

Stąd otrzymujemy ostateczną postać dziedziny nierówności: $\langle 0, 1 \rangle$.

Po obliczeniu sumy szeregu geometrycznego z lewej strony nierówności, przyjmuje ona postać:

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} \leq \sqrt{x} + 1$$

Możemy pomnożyć nierówność stronami przez $(1 - \sqrt{x})$, gdyż $1 - \sqrt{x} > 0$.

Nierówność ma wówczas postać:

$$1 \leq (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$$

$$1 \leq 1 - x$$

$$x \leq 0$$

Zatem po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy rozwiązanie nierówności: $x = 0$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)^3} + \dots \geq 2 - x$, w której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Szereg geometryczny z lewej strony nierówności ma pierwszy wyraz $a_1 = \frac{1}{x-3}$ i iloraz $q = \frac{1}{x-3}$.

Aby szereg był zbieżny, musi zachodzić warunek:

$$\frac{1}{|x-3|} < 1.$$

Zatem

$$1 < |x - 3|$$

czyli

$$x - 3 > 1 \text{ lub } x - 3 < -1$$

Zatem dziedziną nierówności jest zbiór: $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

Zapisujemy sumę szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{x-3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x-3}} = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{1}{\frac{x-3-1}{x-3}} = \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-4} = \frac{1}{x-4}$$

Zapisujemy nierówność z wykorzystaniem wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{x-4} \leq 2 - x$$

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{x-4} - 2 + x \leq 0$$

$$\frac{1-(2-x)(x-4)}{x-4} \leq 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x-4} \leq 0$$

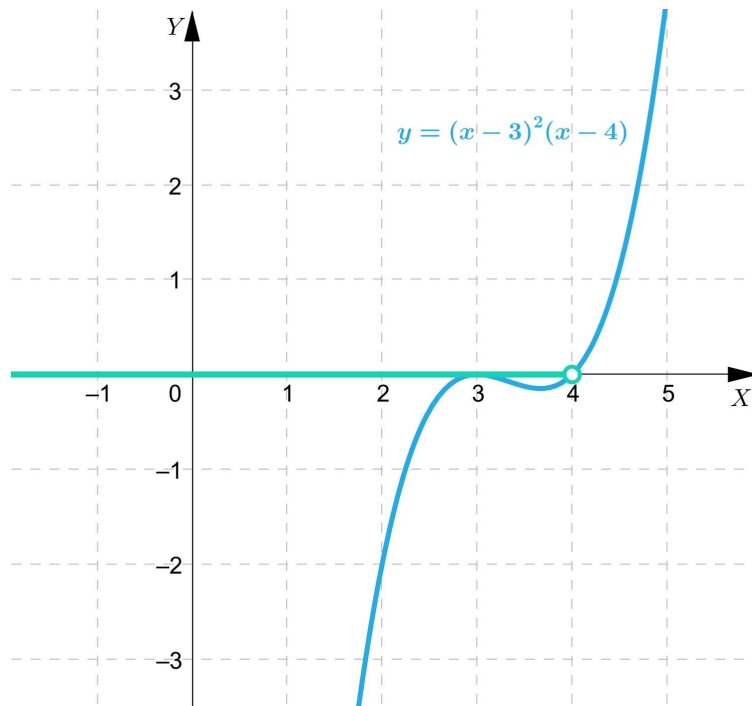
$$\frac{(x-3)^2}{x-4} \leq 0$$

Nierówność tę zapisujemy równoważnie jako koniunkcję warunków:

$$(x-3)^2(x-4) \leq 0 \text{ i } x-4 \neq 0.$$

Rysujemy wykres wielomianu: $y = (x-3)^2(x-4)$ i odczytujemy rozwiązanie:

$$x \in (-\infty, 4)$$



Po uwzględnieniu dziedziny nierówności rozwiązaniem jest przedział: $(-\infty, 2)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \dots \leq 4x + 3$, w której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Zakładamy, że $x \neq 1$.

Aby szereg geometryczny z lewej strony nierówności był zbieżny, musi zachodzić warunek:

$$\left| -\frac{1}{x-1} \right| < 1$$

Otrzymujemy więc

$$|x - 1| > 1$$

$$x - 1 > 1 \text{ lub } x - 1 < -1$$

$$x > 2 \text{ lub } x < 0$$

Zatem dziedzina nierówności jest zbiór $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Zapisujemy sumę szeregu geometrycznego:

$$\frac{\frac{1}{x-1}}{1 + \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{x}.$$

Zatem nierówność przyjmuje postać:

$$\frac{1}{x} \leq 4x + 3.$$

Przenosimy wszystkie składniki na lewą stronę nierówności i sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{x} - (4x + 3) \leq 0$$

$$\frac{1-4x^2-3x}{x} \leq 0$$

Nierówność jest równoważna koniunkcji warunków:

$$(1 - 4x^2 - 3x)x \leq 0 \text{ i } x \neq 0.$$

Rozwiązujemy nierówność:

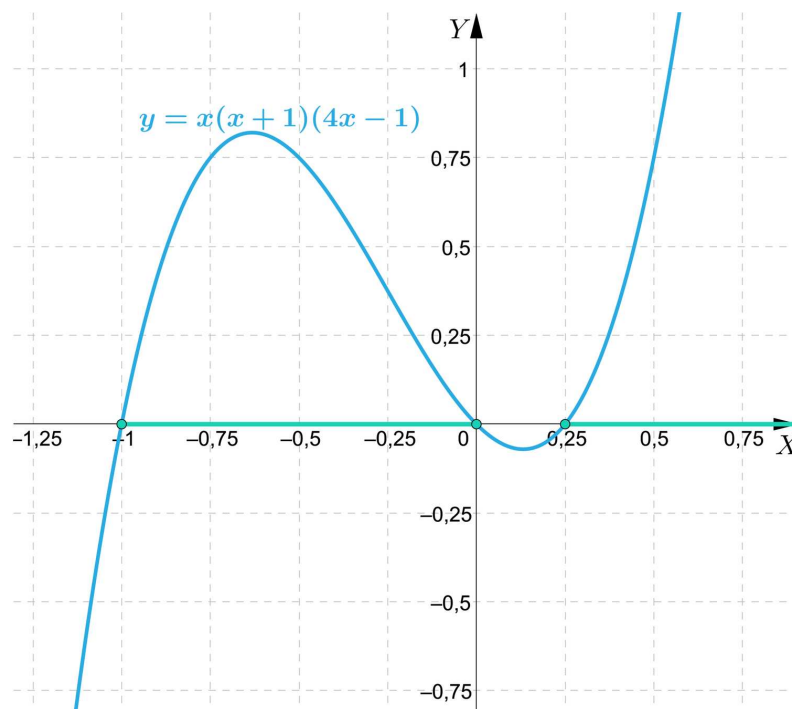
$$(4x^2 + 3x - 1)x \geq 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-3-5}{8} = -1 \text{ lub } x = \frac{-3+5}{8} = \frac{1}{4}$$

Rysujemy wykres wielomianu $y = (4x^2 + 3x - 1)x$ i odczytujemy rozwiązanie:

$$x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle \frac{1}{4}, \infty \rangle \text{ i } x \neq 0.$$



Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy rozwiązanie nierówności:

| $\langle -1, 0 \rangle \cup (2, \infty)$.

Słownik

suma szeregu geometrycznego

- jeżeli $|q| < 1$ lub $a_1 = 0$, to szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ jest zbieżny
- jeżeli $a_1 = 0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = 0$
- jeżeli $|q| < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z zamieszczoną animacją, a następnie wykonaj kolejne polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzeuECaer>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej szeregów geometrycznych.

Polecenie 2

Rozwiązaniem nierówności $1 - 2x + 4x^2 - \dots \leq 2$, (45), której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego, jest zbiór:

☐ $(\frac{1}{2}, \infty)$

☐ $\langle -\frac{8}{27}, \frac{1}{2} \rangle$

☐ $(-\infty, -\frac{8}{27} \rangle$

☐ $\langle -\frac{8}{27}, \infty)$

☐ $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{27} \rangle$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż elementy spełniające nierówność $2x - 4 + \frac{8}{x} - \dots \leq \frac{2x^2}{x+2}$, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

☐ $\sqrt{5}$

☐ 3

☐ -2

☐ -5

☐ 2

Ćwiczenie 2



Wskaż dziedzinę nierówności $1 + \frac{x}{2x-1} + \frac{x^2}{(2x-1)^2} + \dots < \sqrt{4x-1}$, w której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

☐ $(0, \frac{1}{4})$

☐ $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

☐ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$

☐ $(0, \frac{2}{3})$

☐ $(1, \infty)$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówność (lewa strona nierówności jest sumą szeregu geometrycznego) i jej rozwiązanie.

$$-3x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} - \dots \geq 1, (72)$$

$$\left(-3, -\frac{24}{89}\right)$$

$$-3x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} - \dots \geq 0, (8)$$

$$\left\langle -\frac{1}{4}, 3 \right\rangle$$

$$-3x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} - \dots \leq 0, (81)$$

$$\left(-3, -\frac{57}{118}\right)$$

Ćwiczenie 4



Rozwiązaniem nierówności $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots < \sqrt{x^2 + 1}$ jest zbiór:

☐ $(-1, 1)$

☐ $(-\infty, 0)$

☐ $\emptyset$

☐ $(-\infty, \infty)$

Ćwiczenie 5



Rozwiązaniem nierówności $\frac{2}{x-3} + \left(\frac{2}{x-3}\right)^2 + \left(\frac{2}{x-3}\right)^3 + \dots \leq 2$, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego, jest zbiór:

☐ $(6, \infty)$

☐ $(5, 6)$

☐ $(-\infty, 1) \cup (5, 6)$

☐ $(-\infty; 1) \cup \langle 6; \infty)$

Ćwiczenie 6



Wskaż najmniejszą liczbę rzeczywistą, która spełnia nierówność:

$$2(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots) \geq 3(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots).$$

☐ Nie ma takiej liczby.

☐ 1

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż nierówność: $1 + (x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)^2 + \dots \leq 1$, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{x^2 + x + 1} + \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} \right)^n \right] \leq -3$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Szeregi geometryczne w nierównościach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto

2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności z wykorzystaniem szeregów geometrycznych,
- stosuje metody rozwiązywania nierówności wielomianowych i wymiernych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają pojęcie szeregu geometrycznego oraz twierdzenie o sumie zbieżnego szeregu geometrycznego.
2. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Szeregi geometryczne w nierównościach”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Szeregi geometryczne w nierównościach”).

Materiały pomocnicze:

[Szeregi geometryczne zbieżne](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy przed sprawdzianem wiadomości.