



Bryły archimedesowe

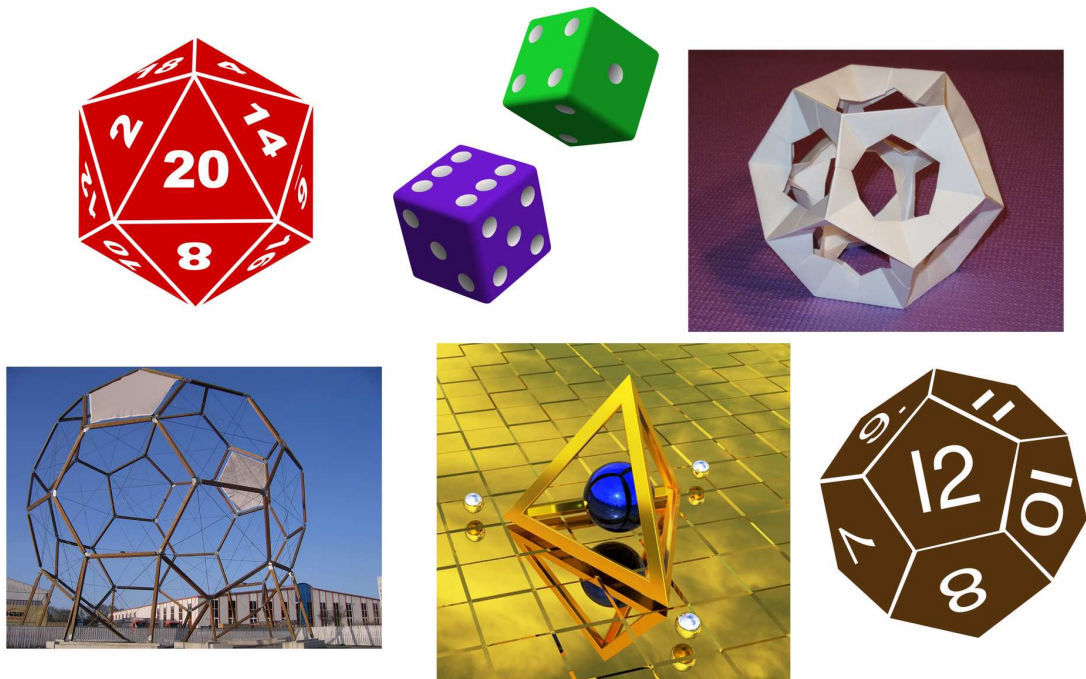
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Klaus Scheiber, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Wielościąg kojarzy nam się zazwyczaj z graniastosłupem lub ostrosłupem. Świat wielościągów jest znacznie bogatszy. Możemy spotkać w nim bryły platońskie, archimedesowe i wiele innych. Zwiedzanie krainy wielościągów to fascynująca przygoda, podczas której możemy odkryć wzajemne relacje pomiędzy nimi.

Informacje przedstawione w tym materiale wykraczają poza podstawę programową, ale są ciekawym uzupełnieniem wiadomości o bryłach.



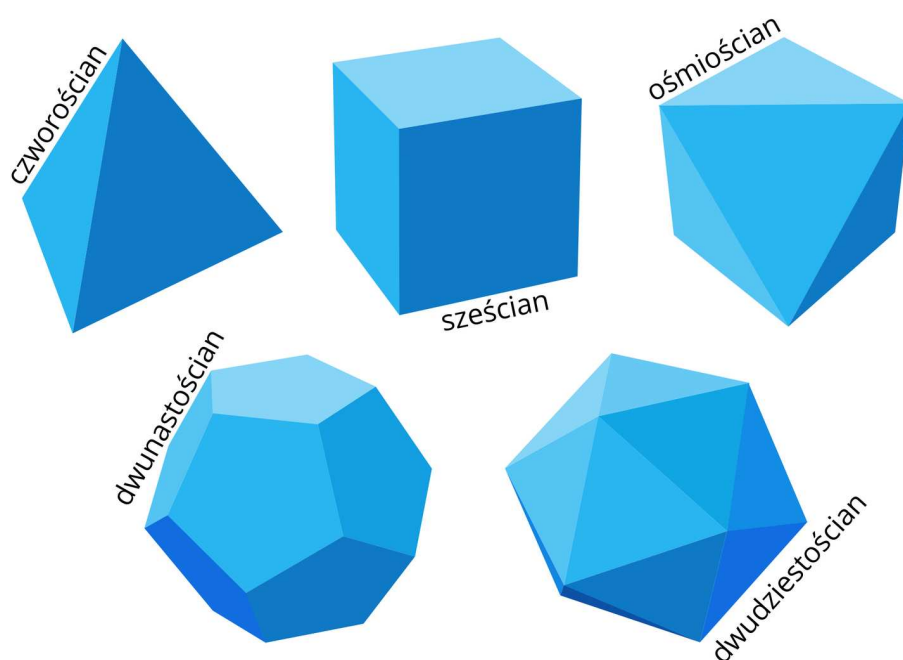
Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

- Poznasz własności wielościanów archimedesowych,
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość brył,
- Obliczysz pola powierzchni i objętości niektórych wielościanów archimedesowych.

Przeczytaj

Podróż po krainie wielościanów należy rozpocząć od poznania jej najważniejszych mieszkańców: wypukłych **wielościanów foremnych**, nazywanych też bryłami platońskimi. Chodzi oczywiście o: **czworościan foremny**, **sześcian**, **ośmiościan foremny**, **dwunastościan foremny** i **dwudziestościan foremny**. Wszystkie ich ściany są przystającymi wielokątami foremnymi oraz w każdym wierzchołku spotyka się ta sama liczba ścian.

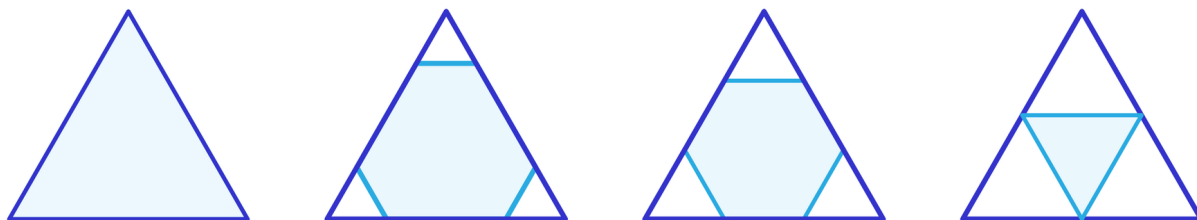


Istnieją również wielościany o przystających wierzchołkach i ścianach będących wielokątami foremnymi niekoniecznie jednego rodzaju. Takie wielościany nazywamy **wielościanami archimedesowymi**.

W materiale przedstawiono tylko niektóre z nich.

Przykład 1

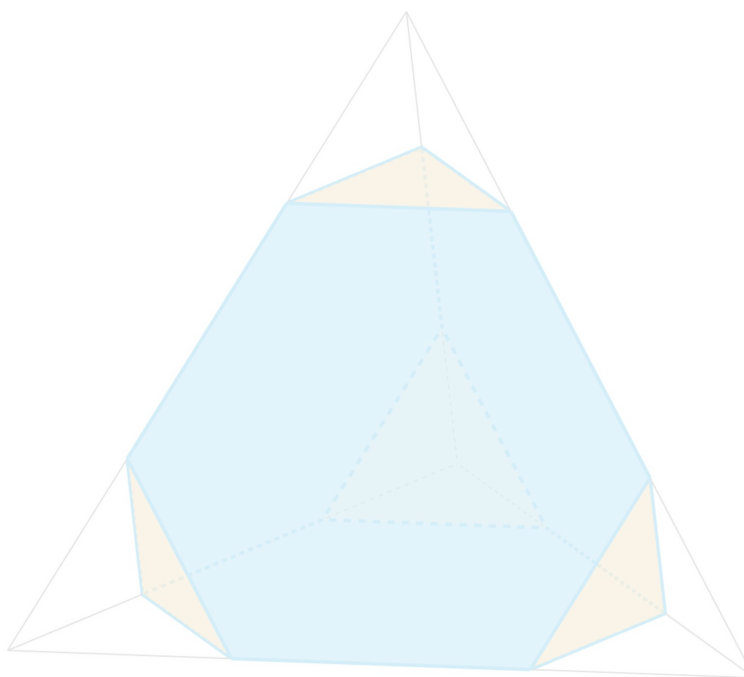
Rozważmy na początek dowolny trójkąt równoboczny. Ścinając symetrycznie jego wierzchołki otrzymamy sześciokąt. Jeżeli odpowiednio dobierzemy długość cięcia, to powstanie sześciokąt foremny. Przesuwając linię cięcia do środka, otrzymamy trójkąt równoboczny.



Przeprowadzimy analogiczną operację w przestrzeni dla czworościanu foremnego.

Bierzemy czworościan foremny, zaznaczamy na jego krawędziach punkty o ustalonej odległości od wierzchołka i przez te punkty prowadzimy płaszczyzny odcinające wierzchołki czworościanu. Po odcięciu wszystkich wierzchołków powstaną w ich miejsce ściany, które są trójkątami, a pozostałe ściany staną się sześciokątami.

Dobierając odpowiednio odległość od wierzchołków czworościanu otrzymamy bryłę, której 4 ściany są trójkątami równobocznymi i 4 ściany są sześciokątami foremnymi. Taką bryłę nazywamy czworościanem ściętym.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DC84GxTVO>

Zauważmy, że pogłębiając cięcia możemy otrzymać ośmiościan foremny.

Przykład 2

Z czworościanu foremnego o krawędzi 12 cm odcinamy narożniki będące czworościanami foremnymi o krawędzi długości 4 cm. Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanej bryły.

Rozwiązanie

Skoro prowadzimy cięcia w odległości 4 cm od wierzchołków czworościanu, to każdą jego krawędź dzielimy na 3 równe części. Powstaje zatem czworościan ścięty o krawędzi 4 cm.

Ponieważ czworościan ścięty ma 4 ściany będące trójkątami równobocznymi i 4 ściany, które są sześciokątami foremnymi, to jego pole powierzchni obliczymy ze wzoru:

$$P_c = 4 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 112\sqrt{3}$$

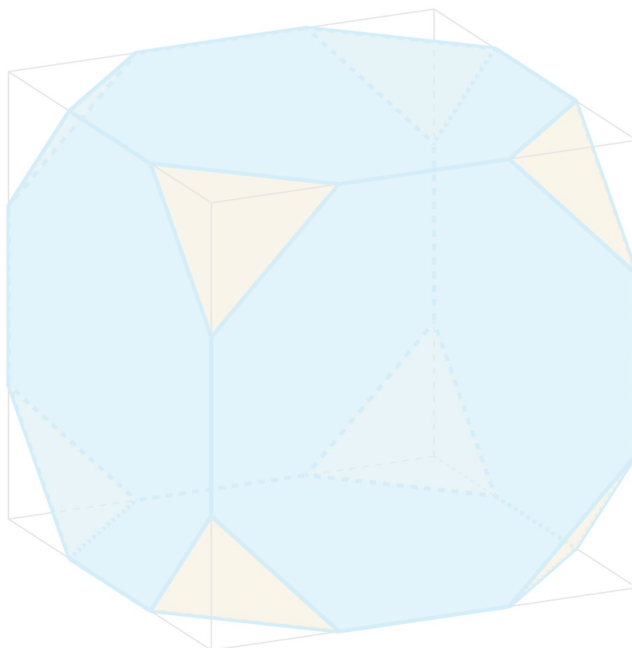
Objętość czworościanu ściętego możemy obliczyć odejmując od objętości czworościanu foremnego objętości odciętych narożników:

$$V = \frac{12^3\sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{4^3\sqrt{2}}{12} = \frac{368\sqrt{2}}{3}$$

Zatem pole powierzchni czworościanu ściętego wynosi $112\sqrt{3} \text{ cm}^2$ zaś jego objętość: $\frac{368\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

Przykład 3

Rozważmy dowolny sześcián. Zaznaczamy na jego krawędziach punkty o ustalonej odległości od wierzchołka i przez te punkty prowadzimy płaszczyzny odcinające wierzchołki sześcián. Po odcięciu wszystkich wierzchołków powstaną w ich miejsce ściany, które są trójkątami, a pozostałe ściany staną się ośmiokątami. Dobierając odpowiednio odległości płaszczyzn od wierzchołków, otrzymamy wielościan o 14 foremnych ścianach: 8 trójkątach i 6 ośmiokątach. Taką bryłę nazywamy sześciánem ściętym.



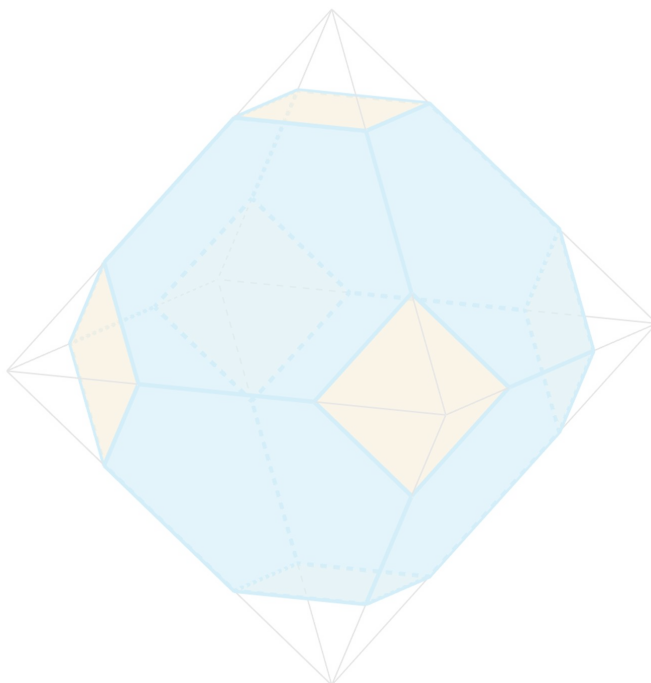
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DC84GxTVO>

Pogłębiając cięcia do środków krawędzi otrzymujemy wielościan archimedesowy, który nazywamy sześćcio – ośmiościanem. Jest to bryła o 14 ścianach, ale tym razem jest to 8 trójkątów równobocznych i 6 kwadratów.

Przykład 4

Rozważmy dowolny ośmiościan foremny.

Ścinając naroża i dobierając odpowiednio odległości płaszczyzn od wierzchołków otrzymamy ośmiościan ścięty, który jest bryłą o 14 ścianach: 8 z nich to sześciokąty foremne a 6 to kwadraty.



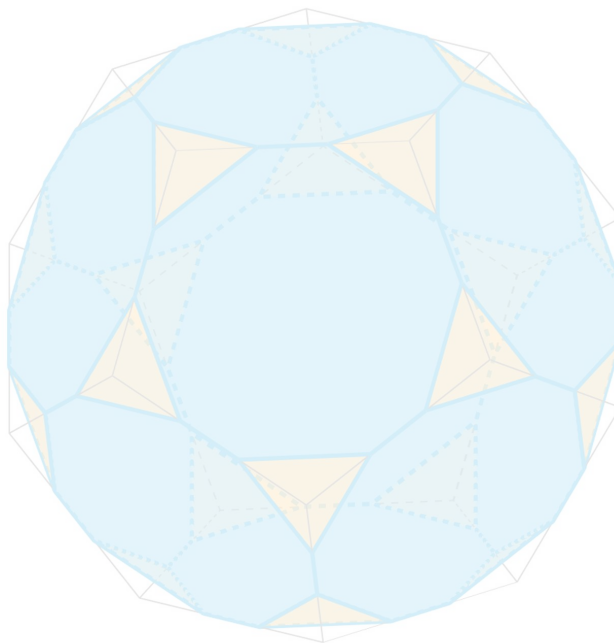
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DC84GxTVO>

Prowadząc cięcia przez środki krawędzi nie otrzymamy nowej bryły archimedesowej a ponownie sześćcio – ośmiościan.

Przykład 5

Rozważmy dowolny dwunastościan foremny.

Ścinając odpowiednio naroża otrzymamy dwunastościan ścięty. Ma on 32 ściany: 12 dziesięciokątów foremnych i 20 trójkątów równobocznych. Stosunek długości krawędzi dwunastościanu ściętego do długości krawędzi dwunastościanu przed ścięciem wynosi $\sqrt{5} : 5$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DC84GxTVO>

Prowadząc cięcia przez środki krawędzi otrzymamy **bryłę archimedesową**, którą nazywamy dwudziesto – dwunastościanem. Jego ścianami są trójkąty równoboczne i pięciokąty foremne.

Przykład 6

Z dwunastościanu foremnego o krawędzi długości 15 ścinamy naroża w kształcie czworościanu foremnego i otrzymujemy dwunastościan ścięty. Wyznamy długość krawędzi takiego czworościanu i obliczymy pole powierzchni otrzymanej bryły.

Rozwiązanie

Wyznamy najpierw długość krawędzi a dwunastościanu ściętego:

$$\frac{a}{15} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Stąd } a = 3\sqrt{5}$$

Ściany dwunastościanu są dziesięciokątami foremnymi i trójkątami równobocznymi o boku $a = 3\sqrt{5}$, więc jego pole obliczymy ze wzoru:

$$P_c = 12 \cdot \frac{5a^2}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

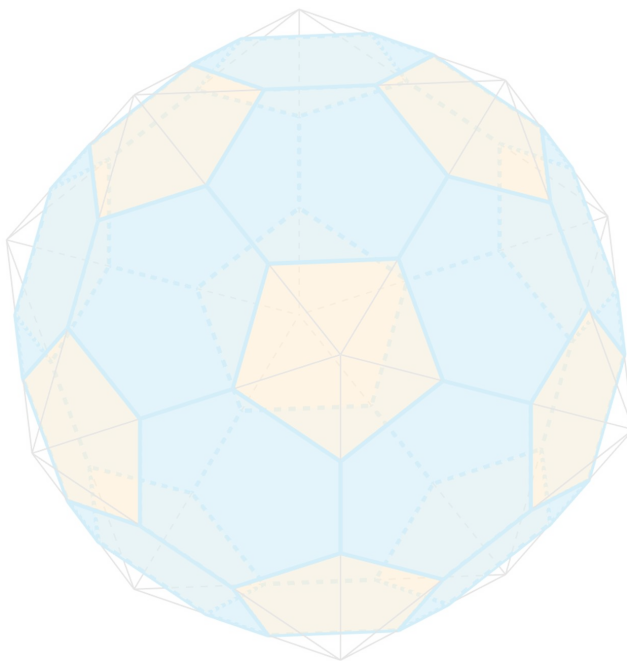
Mamy zatem:

$$P_c = 12 \cdot \frac{5(3\sqrt{5})^2}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + 20 \cdot \frac{(3\sqrt{5})^2\sqrt{3}}{4} = 225(6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3}).$$

Przykład 7

Rozważmy dowolny dwudziestościan foremny.

Ścinając odpowiednio naroża otrzymamy dwudziestościan ścięty. Ma on 32 ściany w kształcie pięciokątów foremnych (12) i sześciokątów foremnych (20). Miłośnicy sportu mogą rozpoznać w tej bryle matematyczny model piłki nożnej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DC84GxTVO>



Zauważmy, że prowadząc cięcia przez środki krawędzi nie otrzymamy nowej bryły archimedesowej tylko dwudziesto – dwunastościan.

Słownik

wielościany archimedesowe

wielościany o przystających wierzchołkach i ścianach będących wielokątami foremnymi niekoniecznie jednego rodzaju

wielościan foremny

wielościan spełniający trzy warunki: ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian, jest bryłą wypukłą.

czworościan foremny

czworościan, którego ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

sześćcian

wielościan foremny o 6 ścianach w kształcie przystających kwadratów.

ośmiościan foremny

wielościan foremny o 8 ścianach w kształcie przystających trójkątów równobocznych.

dwunastościan foremny

wielościan foremny o 12 ścianach w kształcie przystających pięciokątów foremnych.

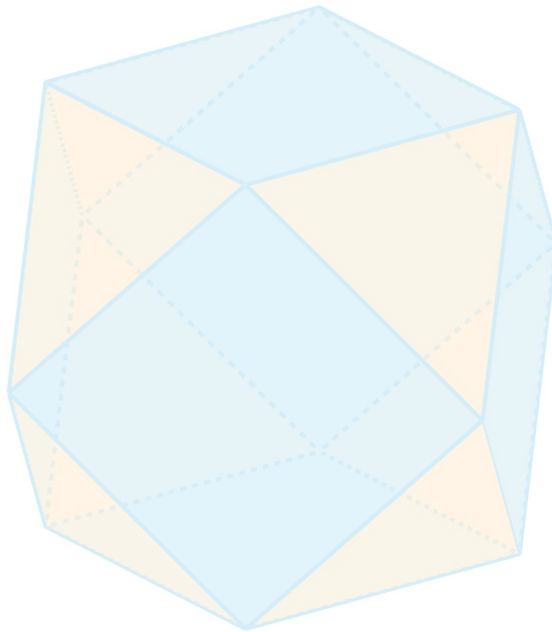
dwudziestościan foremny

najbardziej złożony wielościan foremny o 20 ścianach w kształcie przystających trójkątów równobocznych.

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się dokładnie z przedstawioną poniżej siatką sześćcio – ośmiościanu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dn3cOlqKb>

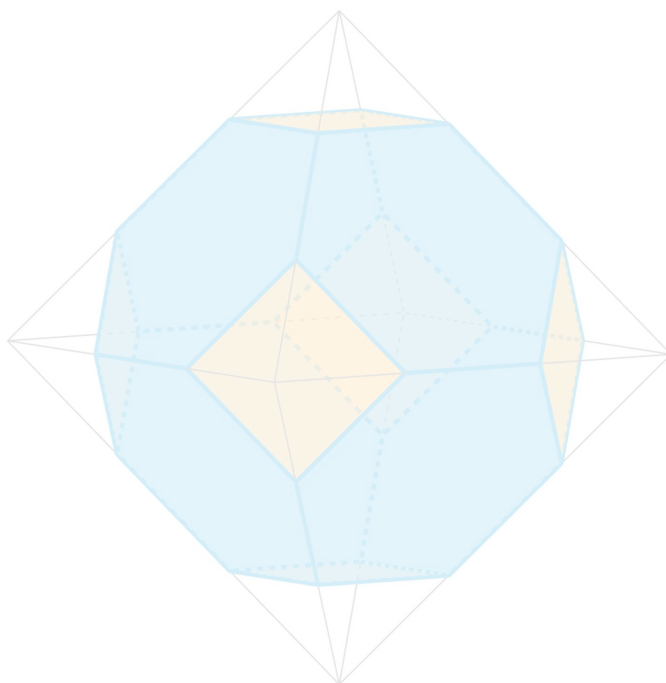
Polecenie 2

Obserwując powyższy aplet, odpowiedz na pytania.

- a. Ile wierzchołków ma sześćcio – ośmiościan?
- b. Ile krawędzi ma sześćcio – ośmiościan?

Polecenie 3

Poniższy aplet przedstawia ośmiościan ścięty.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dn3cOlqKb>

Wykonaj na kartce formatu A4 siatkę tej bryły.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij tabelę.

Nazwa	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi	Liczba ścian
Czworościan ścięty			
Sześcian ścięty			
Dwunastościan ścięty			

Ćwiczenie 2



Bryłę euklidesową, która ma 12 wierzchołków, 24 krawędzie i jest zbudowana z 8 trójkątów równobocznych i 6 kwadratów nazywamy:

☐ ośmiościanem ściętym.

☐ czworościanem ściętym.

☐ sześcianem ściętym.

☐ sześćcio – ośmiościanem.

Ćwiczenie 3



Do każdej z podanych brył dopasuj opis jej ścian.

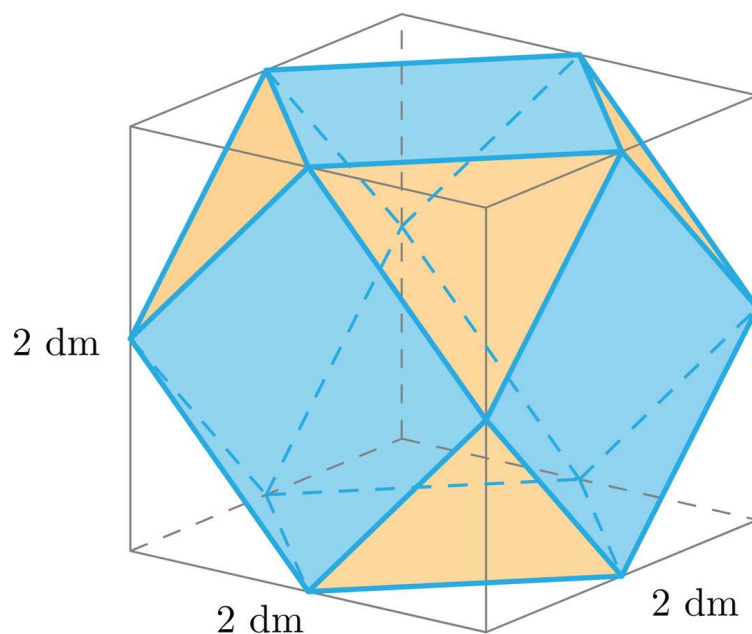
Dwudziesto – dwunastościan, Sześcian ścięty, Czwororościan ścięty, Ośmiościan ścięty

Nazwa bryły	Ściany
Dwudziesto – dwunastościan	
Sześcian ścięty	
Czworościan ścięty	
Ośmiościan ścięty	

Ćwiczenie 4



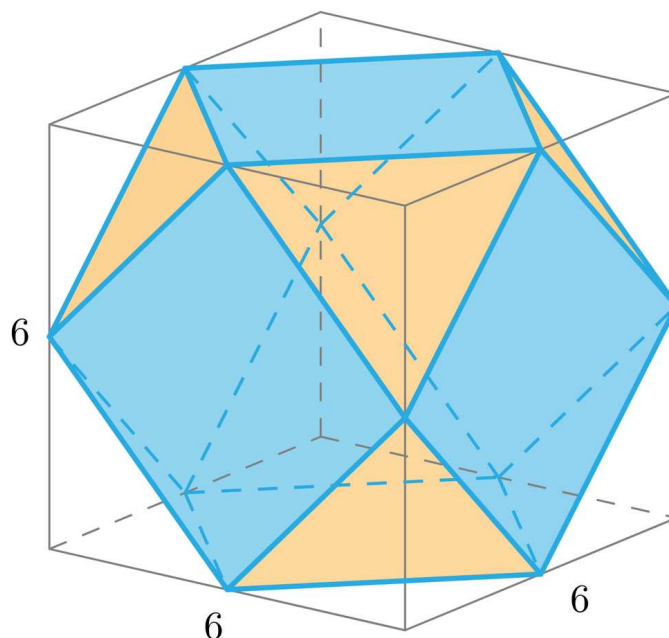
Z sześcianu o krawędzi 2 dm odcięto narożniki prowadząc cięcia przez środki krawędzi sześcianu. Otrzymano w ten sposób sześć – ośmiościan. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego sześć – ośmiościanu.



Ćwiczenie 5



Z sześcianu o krawędzi 6 odcięto narożniki prowadząc cięcia przez środki krawędzi sześcianu. Otrzymano w ten sposób sześćo – ośmiościan. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześćo – ośmiościanu.



Ćwiczenie 6



Z sześcianu o krawędzi a odcięto narożniki prowadząc cięcia przez punkty dzielące krawędzie na 3 równe części. Otrzymano w ten sposób sześcian ścięty.

Oblicz, o ile objętość powstałej bryły jest mniejsza od objętości sześcianu.

Ćwiczenie 7

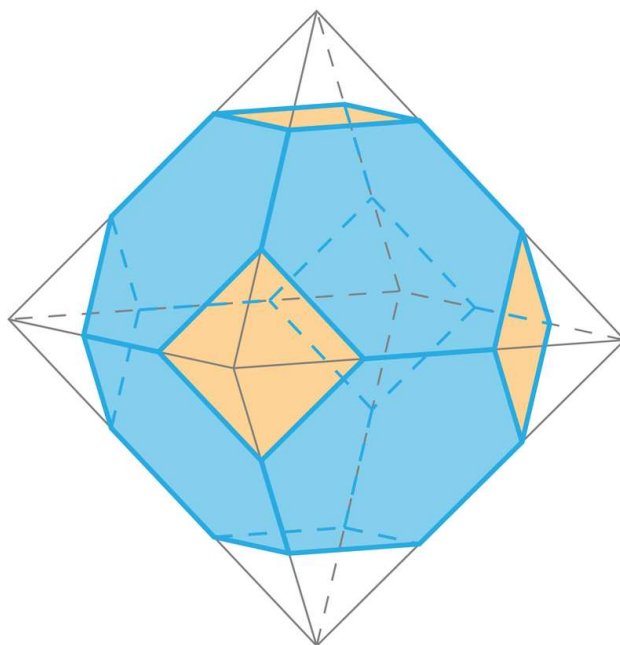


W drewnianym klocku w kształcie ośmiościanu foremnego odcinamy naroża prowadząc cięcia przez środki krawędzi. Otrzymujemy w ten sposób sześćo – ośmiościan. Jaki procent objętości ośmiościanu stanowi objętość tego sześćo – ośmiościanu?

Ćwiczenie 8



Z ośmiościanu foremnego o krawędzi długości a odcinamy naroża tak, że wszystkie krawędzie otrzymanej bryły mają jednakową długość, a jej ściany są wielokątami foremnymi tak, jak na rysunku (ośmiościan ścięty). Oblicz objętość tej bryły.



Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Bryły archimedesowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- utrzuca wiadomości o bryłach platońskich
- poznaje własności brył archimedesowych
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość ostrosłupów i graniastosłupów
- oblicza pola powierzchni i objętości niektórych wielościanów archimedesowych
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych
- analiza pomysłów
- burza mózgów
- odwrócona klasa

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie wiadomości o bryłach platońskich.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat „Bryły archimedesowe” i cele zajęć. Razem z uczniami określa kryteria sukcesu.
2. Uczniowie wymieniają poznane bryły archimedesowe i przypominają, jak one powstają.

Faza realizacyjna:

1. Wybrani uczniowie rozwiązują na tablicy Przykład 2 i Przykład 6 z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie rozwiązują polecenia z sekcji „Aplet” .
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4 grupy. Jedna grupa rozwiązuje ćwiczenie 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”; druga - ćwiczenie 3 i 4; trzecia - ćwiczenie 5, a czwarta - ćwiczenie 6.
4. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń dyskutuje rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinnam zapamiętać, że...”.

Praca domowa:

- Uczniowie dobierają się w pary i rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pole powierzchni i objętość ośmiościanu](#)
- [Pole powierzchni sześciianu](#)
- [Siatki sześciianu](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może przed lekcją poprosić o przypomnienie wzorów na pola powierzchni i objętości brył.

Aplet można wykorzystać przy omawianiu siatek brył.