



## Równania kwadratowe niezupełne typu $ax^2 + c = 0$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Równania kwadratowe niezupełne typu $ax^2 + c = 0$

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Umiesz już rozpoznawać i zapisywać równania kwadratowe. W trakcie tych zajęć zajmiemy się rozwiązywaniem szczególnych równań kwadratowych, mianowicie takich, w których współczynnik przy  $x$  jest równy 0. Takie równanie nazywa się niezupełnym. Rozwiązywanie równań kwadratowych niezupełnych typu  $ax^2 + c = 0$ , dla  $a \neq 0$ , często sprowadza się do wykorzystania wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

### Twoje cele

- Rozpoznasz równanie kwadratowe niezupełne typu  $ax^2 + c = 0$ .
- Rozwiążesz równanie kwadratowe niezupełne typu  $ax^2 + c = 0$ .
- Wyznaczysz takie współczynniki równania, aby jego rozwiązaniem były określone liczby lub, aby równanie nie posiadało rozwiązania.

# Przeczytaj

---

**Ważne!**

**Pamiętasz?**

**Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą** – jest to równanie, które można sprowadzić do postaci  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a$ ,  $b$  i  $c$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz  $a \neq 0$ .

Postać  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdy  $a \neq 0$  nazywamy **postacią ogólną równania kwadratowego**.

Równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego  $b$  lub  $c$  są równe 0, nazywamy **równaniami kwadratowymi niezupełnymi**.

Jeżeli  $b = 0$  i  $c = 0$  to równanie kwadratowe  $ax^2 = 0$  ma tylko jedno rozwiązanie  $x = 0$ .

**Przykład 1**

Rozwiążemy równanie kwadratowe niezupełne  $3x^2 - 27 = 0$ .

Przeniesiemy najpierw liczbę na drugą stronę równania, pamiętając o zmianie znaku na przeciwny.

$$3x^2 = 27$$

Podzielimy obie strony równania przez 3.

$$x^2 = 9$$

Pierwiastkujemy obie strony równania.

$$\sqrt{x^2} = 3$$

Otrzymaliśmy równanie z wartością bezwzględną.

$$|x| = 3$$

Czyli  $x = -3$  lub  $x = 3$ .

Rozwiązaniem równania są liczby  $x \in \{-3, 3\}$ .

W rozwiązaniu kolejnego przykładu skorzystamy z następującego twierdzenia.

**Twierdzenie:** Iloczyn dwóch liczb jest równy zero, jeżeli przynajmniej jedna z tych liczb jest równa zero.

Dla dowolnych liczb  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \cdot b = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = 0$  lub  $b = 0$ .

### Przykład 2

Rozwiążemy równanie kwadratowe niezupełne  $2x^2 - 9 = 0$ .

Skorzystamy najpierw ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$(\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 3) = 0$$

Zgodnie z twierdzeniem  $(\sqrt{2}x - 3) = 0$  lub  $(\sqrt{2}x + 3) = 0$

$$\sqrt{2}x = 3 \text{ lub } \sqrt{2}x = -3$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ lub } x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Po usunięciu niewymierności z mianownika każdego ułamka otrzymujemy:

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

### Przykład 3

Rozwiążemy równanie kwadratowe niezupełne  $-x^2 - 4 = 0$ .

$$x^2 = -4$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ kwadrat dowolnej liczby jest zawsze liczbą nieujemną.

Zatem równanie nie posiada rozwiązania.

### Przykład 4

Określimy liczbę rozwiązań równania  $ax^2 + c = 0$ , jeżeli wiadomo, że  $a > 0$  i  $c > 0$ .

Współczynniki  $a$  i  $c$  są liczbami dodatnimi, zatem po przeniesieniu liczby  $c$  na drugą stronę równania prawa strona będzie liczbą ujemną.

$$ax^2 = -c$$

Ponieważ kwadrat dowolnej liczby pomnożony przez liczbę dodatnią jest zawsze nieujemny, to lewa strona równania jest liczbą nieujemną, prawa zaś liczbą ujemną.

Otrzymaliśmy sprzeczność. Równanie  $ax^2 + c = 0$  dla  $a > 0$  i  $c > 0$  jest równaniem sprzecznym.

### Przykład 5

Rozwiążemy równanie  $(\sqrt{5}x - 2)^2 = 16$ .

$$(\sqrt{5}x - 2)^2 = 16$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}x - 2)^2} = \sqrt{16}$$

Wiemy, że  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

$$|\sqrt{5}x - 2| = 4$$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$\sqrt{5}x - 2 = 4 \text{ lub } \sqrt{5}x - 2 = -4$$

$$\sqrt{5}x = 6 \text{ lub } \sqrt{5}x = -2$$

$$x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ lub } x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$x \in \left\{ -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5} \right\}$$

### Przykład 6

Rozwiążemy równanie  $|x^2 - 4| = 8$ .

$$|x^2 - 4| = 8$$

$$x^2 - 4 = 8 \text{ lub } x^2 - 4 = -8$$

$$x^2 = 12 \text{ lub } x^2 = -4$$

$$x = 2\sqrt{3} \text{ lub } x = -2\sqrt{3} \text{ lub } x \in \emptyset$$

$$\text{Czyli } x \in \left\{ -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \right\}.$$

## Słownik

### równania kwadratowe niezupełne

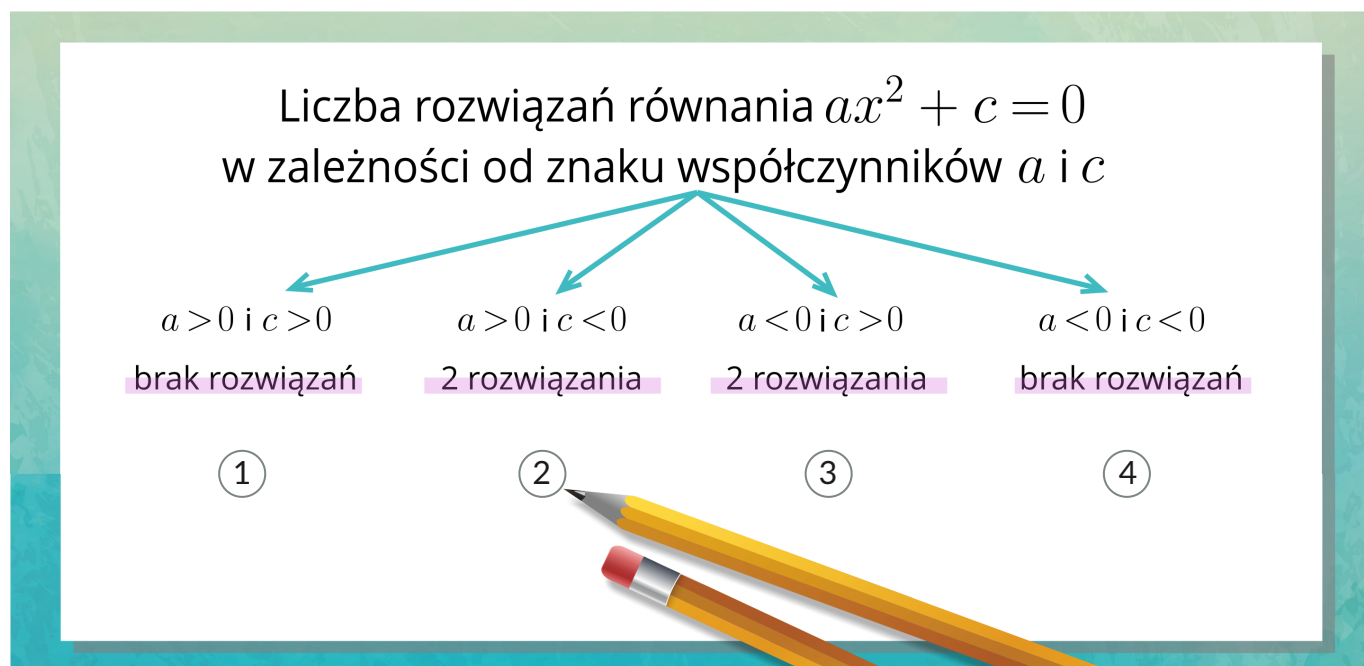
równania, w których współczynniki trójmianu kwadratowego  $b$  lub  $c$  są równe 0



# Infografika

## Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką określającą liczbę rozwiązań równania kwadratowego niepełnego typu  $ax^2 + c = 0$  w zależności od znaków współczynników  $a$  i  $c$  występujących w równaniu.



1. Przykład {audio} $x^2 + 4 = 0$   
 $x^2 = -4$

sprzeczność

Każda liczba podniesiona do kwadratu jest nieujemna.

2. Przykład {audio} $x^2 - 4 = 0$   
 $x^2 = 4$   
 $x = 2$  lub  $x = -2$

3. Przykład {audio} $-x^2 + 4 = 0$   
 $-x^2 = -4$   
 $x^2 = 4$   
 $x = 2$  lub  $x = -2$

4. Przykład {audio} $-x^2 - 4 = 0$   
 $-x^2 = 4$   
 $x^2 = -4$

sprzeczność

Każda liczba podniesiona do kwadratu jest nieujemna.

### **Polecenie 2**

Czy istnieją takie równania kwadratowe niezupełne, które posiadają jedno rozwiązanie?

Jeśli tak, podaj trzy przykłady takich równań. Jaką liczbą jest rozwiązanie takiego równania?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wybierz wszystkie równania kwadratowe niezupełne typu  $ax^2 + c = 0$ .

☐  $4a^2 + 3a^2 - 5 = 4$

☐  $\frac{y^2-4}{4} = 1$

☐  $\sqrt{5}s^2 = 1$

☐  $\frac{2y^2-y}{7y} = 3$

☐  $-3z^2 = 1$

☐  $3t^2 - 4 = 1$

☐  $x^2 - 3x^2 + 2x = 0$

☐  $(6z - 1)(4 - t) = 0$

## Ćwiczenie 2



„Przeciągnij” równanie do odpowiedniego okienka.

Równanie niezupełne, które nie posiada rozwiązania.

$$t^2 = 2^2$$

$$t^2 = -1$$

$$\sqrt[3]{3} - x^2 = 0$$

$$7\sqrt[3]{2}x + 3 = 2$$

$$2t^2 + 8 = 0$$

$$2a^2 - 5 = 0$$

Równanie niezupełne, którego zbiorem rozwiązań są dwie liczby.

## Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Rozwiązaniem równania  $(2x - 1)^2 - 3 \cdot (x + 2)(x - 2) = 4 - 4 \cdot (x - 1)$  jest:

☐  $\{-4, 4\}$

☐ zbiór  $\mathbb{R}$

☐  $\{-16, 16\}$

☐ zbiór  $\emptyset$

#### Ćwiczenie 4



Połącz w pary równanie z odpowiadającym mu rozwiązaniem.

$$-\frac{1}{9}x^2 + 4 = 0$$

$$x \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0$$

$$x \in \left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right\}$$

$$-4x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$x \in \{-6, 6\}$$

$$2 - 18x^2 = 0$$

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right\}$$

$$4 - 100x^2 = 0$$

$$x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x \in \{-2, 2\}$$

#### Ćwiczenie 5



Przeciągnij w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby rozwiązaniem równania

$$3x^2 - \boxed{\phantom{000}} = 0 \text{ był zbiór } -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

-4

4

-2

2

#### Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie  $(\sqrt{2}x - 1)^2 = 81$  można sprowadzić do rozwiązania alternatywy równań liniowych:

☐  $\sqrt{2}x - 1 = 0$  lub  $\sqrt{2}x + 8 = 0$

☐  $\sqrt{2}x - 10 = 0$  lub  $\sqrt{2}x - 8 = 0$

☐  $\sqrt{2}x - 10 = 0$  lub  $\sqrt{2}x + 8 = 0$

☐  $\sqrt{2}x + 10 = 0$  lub  $\sqrt{2}x + 8 = 0$

### Ćwiczenie 7



Wstaw w wyznaczone miejsce taką liczbę lub wyrażenie algebraiczne, aby rozwiązaniem równania  $(x + 3)^2 - 5 \cdot (x + 4) - 100 = x +$  był zbiór liczb  $-12, 12$ .

### Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie  $|x^2 - 9| = 1$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Równanie kwadratowe niepełne typu  $ax^2 + c = 0$

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje równanie kwadratowe niepełne typu  $ax^2 + c = 0$
- rozwiązuje równanie kwadratowe niepełne typu  $ax^2 + c = 0$
- wyznacza takie współczynniki równania, aby jego rozwiązaniem były określone liczby lub, aby równanie nie posiadało rozwiązania
- tworzy procedury rozwiązania równania

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe wzory skróconego mnożenia (aby w dalszej części lekcji wykorzystać je w zadaniach).

#### **Faza realizacyjna:**

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów prostych równań niezupełnych typu  $ax^2 + c = 0$ .
2. Następnie uczniowie starają się podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują liczbę rozwiązań równania.
4. Przykłady rozwiązań równań znajdujące się w części *przeczytaj* uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
5. Uczniowie oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem.
6. Uczniowie w parach rozwiązują zadania 1-6 interaktywne metodą stolików zadaniowych. Każdy „stolik” to 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje stopień bardzo dobry.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące podziału równań na zupełne i niezupełne.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

[Równanie kwadratowe](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Infografika może być wykorzystana przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli prezentującej równania kwadratowe niezupełne.