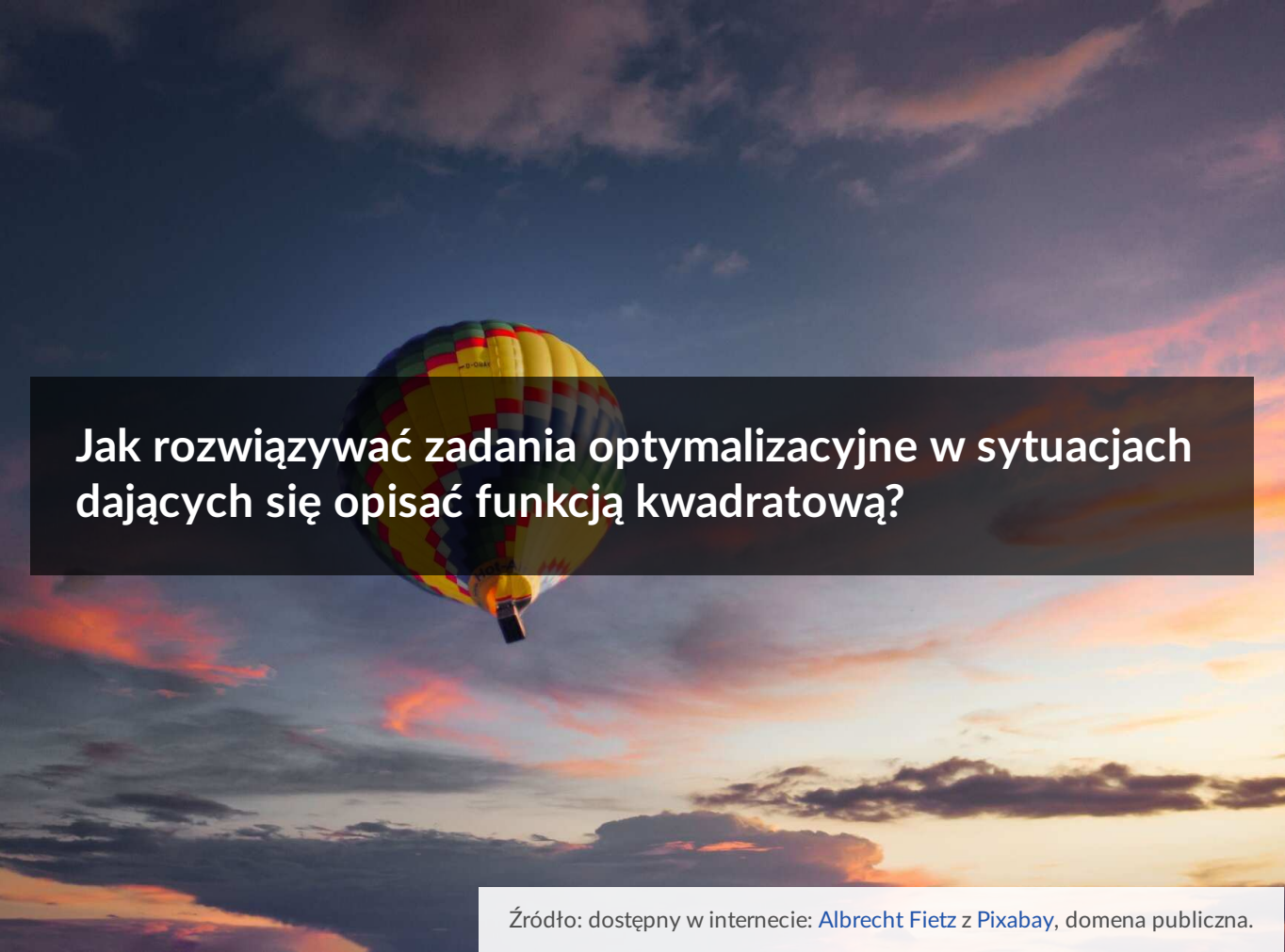




Jak rozwiązywać zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak rozwiązywać zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową?

Źródło: dostępny w internecie: [Albrecht Fietz](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W tej lekcji nauczymy się rozwiązywać zadania optymalizacyjne, szukając wartości parametrów dla których wartość od nich zależna jest maksymalna/minimalna np. wyznaczając największe pole lub najmniejszą sumę kwadratów liczb. Będziemy korzystać z wykresu funkcji kwadratowej oraz z własności tej funkcji.

Twoje cele

- Zastosujesz wiadomości z zakresu funkcji kwadratowej.
- Na podstawie własności funkcji kwadratowej i jej wykresu rozwiązesz zadania optymalizacyjne.

Przeczytaj

Przypomnijmy wiadomości dotyczące funkcji kwadratowej

- Wykresem jest parabola.
- Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dokładnie jedno **ekstremum** dla argumentu $x_w = -\frac{b}{2a}$, które wynosi $y_w = f(x_w) = -\frac{\Delta}{4a}$. Znajduje się ono w wierzchołku paraboli.
- Gdy $a > 0$ ramiona paraboli są skierowane w górę, w wierzchołku znajduje się minimum funkcji.
- Gdy $a < 0$ ramiona paraboli są skierowane w dół, w wierzchołku paraboli znajduje się maksimum funkcji.

Aby rozwiązać zadanie optymalizacyjne z wykorzystaniem funkcji kwadratowej, należy:

1. wyznaczyć wzór funkcji opisującej sytuację z zadania,
2. wyznaczyć dziedzinę tej funkcji,
3. obliczyć współrzędną x_w wierzchołka paraboli i sprawdzić czy należy do dziedziny funkcji,
4. wyznaczyć odpowiedź do zadania.

Przykład 1

Wyznamy wymiary prostokąta o obwodzie 60 cm i największym polu.

Rozwiązanie

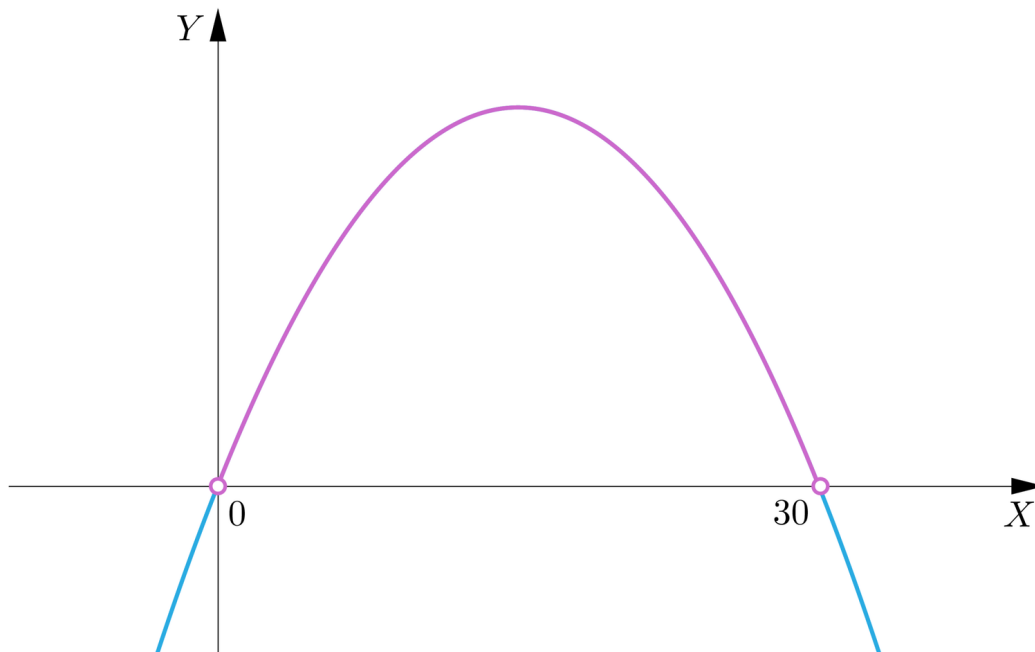
W pierwszym etapie dążymy do opisanie pola za pomocą funkcji jednej zmiennej. Oznaczmy a i b jako boki prostokąta. Zatem a i b muszą być liczbami dodatnimi, ponieważ długości boków figury nie mogą być ujemne. Zapiszmy obwód w postaci równania $2a + 2b = 60$. Wyznamy jedną zmienną np. b , otrzymujemy $b = 30 - a$. Skoro $b > 0$, to $a \in (0, 30)$.

Pole prostokąta wynosi $a \cdot b$. Podstawiając otrzymujemy funkcję zależną od a :

$$P(a) = a(30 - a).$$

$$D = (0, 30).$$

Naszkuujemy wykres funkcji, współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc ramiona paraboli skierowane są w dół.



Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli a_w , jest średnią miejsc zerowych funkcji $y = a(30 - a)$, zatem $a_w = \frac{0+30}{2} = 15$. Zauważmy, że a_w należy do dziedziny, zatem największa wartość funkcji jest przyjmowana w wierzchołku paraboli. Wyznamy $b = 30 - 15 = 15$.

Odpowiedź

Wymiary prostokąta to $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$.

Przykład 2

Wyznamy liczby, których różnica jest równa 8 tak, by suma ich kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie

Oznaczymy:

x, y – szukane liczby.

Z treści zadania wiemy, że $x - y = 8$. Szukamy najmniejszej wartości wyrażenia $x^2 + y^2$. W tym celu wyznaczmy jedną ze zmiennych np. $y = x - 8$ i rozważmy funkcję jednej zmiennej

$$f(x) = x^2 + (x - 8)^2.$$

Sprowadzając funkcję $f(x)$ do postaci ogólnej mamy:

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 64.$$

W tym przykładzie nie mamy żadnych warunków nałożonych na zmienne x i y , więc dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Wykresem funkcji f jest parabola, której ramiona skierowane są w górę. Wartość najmniejsza jest więc przyjmowana w wierzchołku. Obliczając pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli ze wzoru:

$$x_w = -\frac{b}{2a},$$

otrzymamy $x_w = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = 4$. Zatem jedna z liczb jest równa 4.

Obliczamy drugą liczbę $y = 4 - 8 = -4$.

Odpowiedź

Szukane liczby to (-4) i 4.

Przykład 3

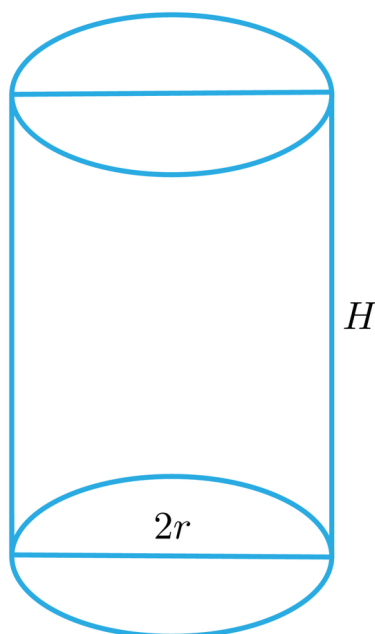
Przekrój osiowy walca jest prostokątem o obwodzie 14. Obliczymy największe możliwe pole powierzchni bocznej tego walca.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

H – wysokość walca,

r – promień podstawy walca.



Obwód prostokąta możemy zapisać $2H + 4r = 14$. Pole powierzchni bocznej walca możemy wyliczyć ze wzoru:

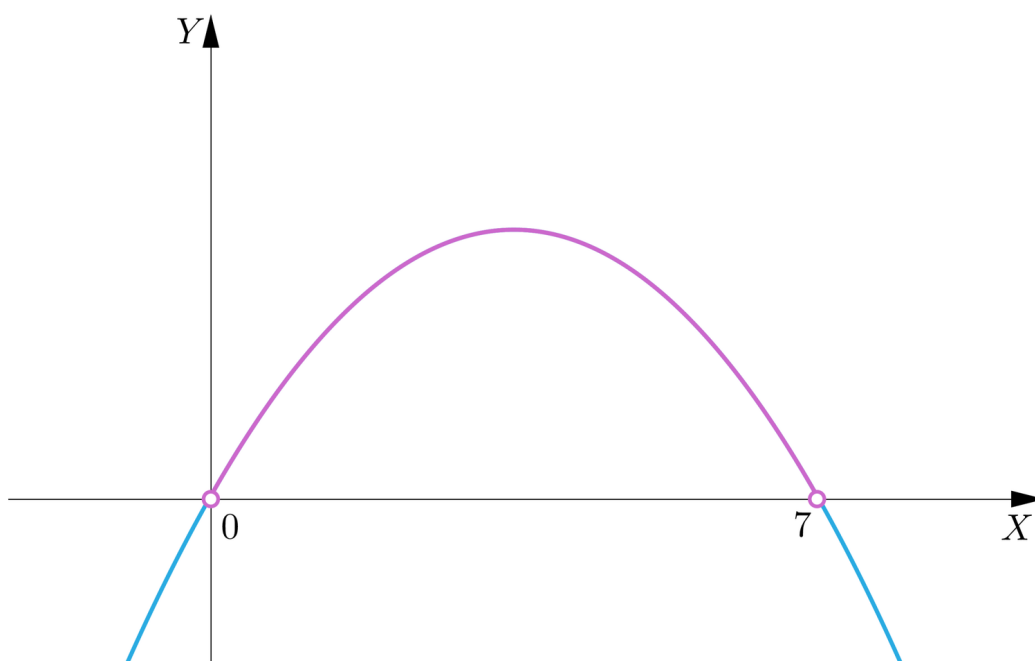
$$P_b = 2\pi rH.$$

Ze wzoru na obwód prostokąta wyliczamy, że $2r = 7 - H$. Podstawiając $7 - H$ w miejsce $2r$ otrzymujemy pole powierzchni bocznej jako funkcję zmiennej H .

$$P_b(H) = \pi(7 - H)H.$$

Ponieważ wysokość walca i promień jego podstawy są liczbami dodatnimi, więc dziedziną funkcji jest zbiór $D : H \in (0, 7)$.

Naszkicujemy wykres funkcji kwadratowej, której wykres pokrywa się z funkcją H w jej dziedzinie.



Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli H_w , jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, zatem $H_w = \frac{0+7}{2} = 3,5$ cm. Możemy zauważyć, że należy do dziedziny funkcji, zatem funkcja przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli. Następnie wyznaczymy największe możliwe pole. Podstawmy wyliczoną wysokość do wzoru na pole powierzchni bocznej walca:

$$P_b(H) = \pi(7 - 3,5) \cdot 3,5 = 12,25\pi.$$

Odpowiedź

Największe możliwe pole wynosi $12,25\pi$.

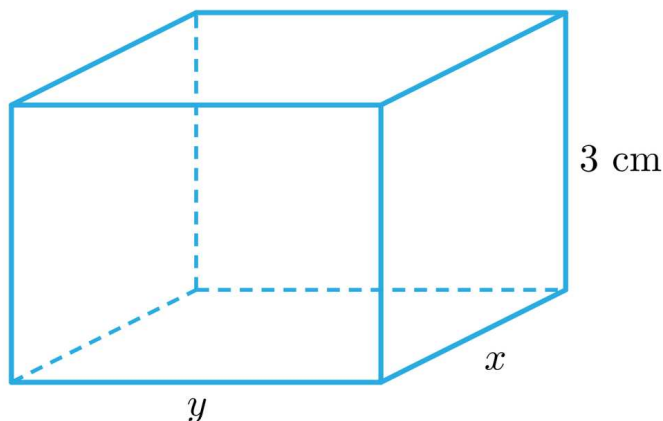
Przykład 4

Wysokość prostopadłościanu jest równa 3 cm, a jego podstawą jest prostokąt o obwodzie 18 cm. Obliczymy wymiary podstawy oraz objętość prostopadłościanu, którego pole

powierzchni całkowitej jest największe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x i y długości krawędzi podstawy.



Zapisując obwód w postaci równania otrzymujemy $2x + 2y = 18$. Pole powierzchni prostopadłościanu wynosi:

$$P_c = 2xy + 6x + 6y.$$

Wyznaczamy jedną zmienną z równania obwodu np. $y = 9 - x$ i podstawiamy do wzoru na pole powierzchni całkowitej:

$$P_c(x) = 2x(9 - x) + 6x + 6(9 - x) = -2x^2 + 18x + 54.$$

Długości krawędzi muszą być dodatnie, więc $y = 9 - x > 0$, więc dziedziną funkcji jest:

$$D : x \in (0, 9).$$

Powstała funkcja kwadratowa ma ramiona skierowane w dół, więc wartość największą przyjmuje w wierzchołku. Dlatego obliczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli ze wzoru:

$$x_w = -\frac{b}{2a},$$

otrzymamy $x_w = -\frac{18}{-4} = 4,5$, czyli należy do dziedziny funkcji. Prostokąt w podstawie ma więc wymiary $4,5 \text{ cm} \times 4,5 \text{ cm}$.

Policzymy objętość prostopadłościanu ze wzoru:

$$V = xyH.$$

Podstawiając otrzymujemy $V = 4,5 \cdot 4,5 \cdot 3 = 60,75 \text{ cm}^3$.

Słownik

funkcja kwadratowa

to funkcja określona wzorem:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie współczynniki a , b , c są ustalonymi liczbami przy czym $a \neq 0$

ekstremum funkcji

to maksymalna lub minimalna wartość funkcji

Film samouczek

Polecenie 1

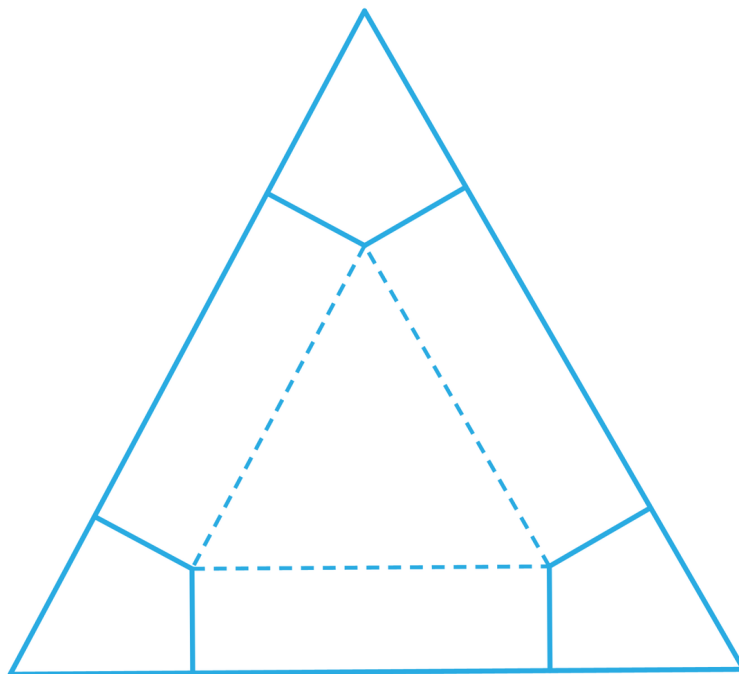
Zapoznaj się uważnie z poniższym filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GiKGbMD>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący optymalizacji.

Polecenie 2

Z trójkąta równobocznego o wysokości $4\sqrt{3}$ wycięto naroża w kształcie deltoidów, uzyskując siatkę pudełka o prostokątnych ścianach bocznych (zobacz rysunek).



Ile wynosi największe możliwe pole?

☐ $6\sqrt{3}$

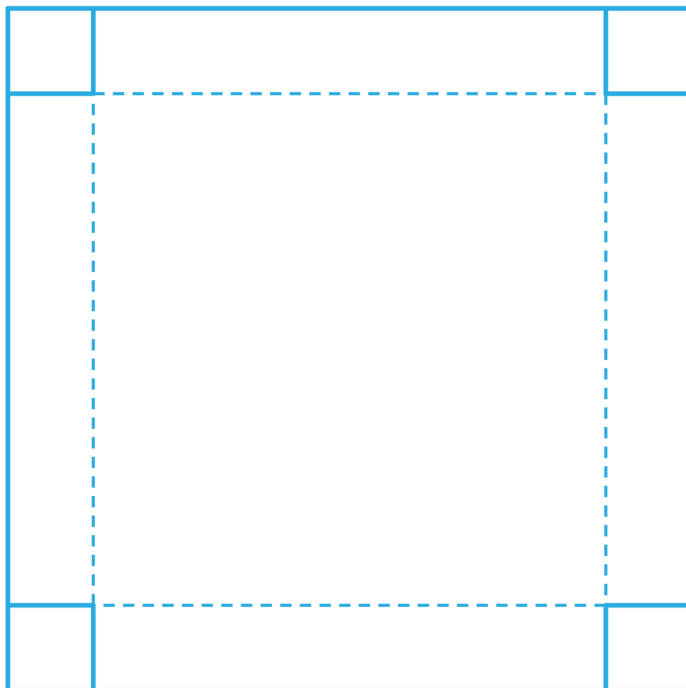
☐ $8\sqrt{3}$

☐ $4\sqrt{3}$

☐ $10\sqrt{3}$

Polecenie 3

Z kwadratu o przekątnej długości $4\sqrt{2}$ wycięto cztery kwadratowe naroża uzyskując siatkę pudełka o prostokątnych ścianach bocznych (zobacz rysunek).



Ile wynosi największe możliwe pole?

☐ 2

☐ 12

☐ 6

☐ 8

☐ 10

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Która z funkcji osiąga maksimum, a która osiąga minimum? Dopasuj wzory do odpowiednich grup.

maksimum

$$f(x) = 4(x + 1)^2 - 5$$

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

$$f(x) = 2(4 - x)^2 - 5$$

minimum

$$f(x) = -2(1 - x)(x - 3)$$

$$f(x) = 3(x + 5)(2 - x)$$

$$f(x) = -2(x - 4)^2 + 5$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Ćwiczenie 3



Obwód prostokąta wynosi 28 cm. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt, aby jego pole było jak największe?

☐ 5 cm × 9 cm

☐ 7 cm × 7 cm

☐ 13 cm × 15 cm

☐ 6 cm × 8 cm

☐ 14 cm × 14 cm

Ćwiczenie 4

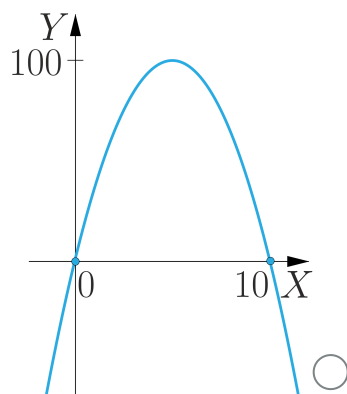
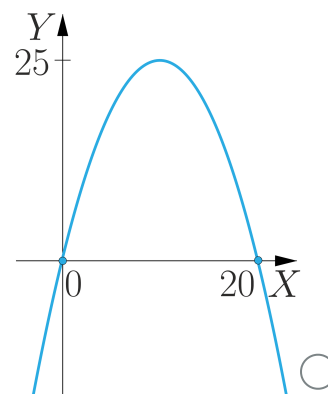
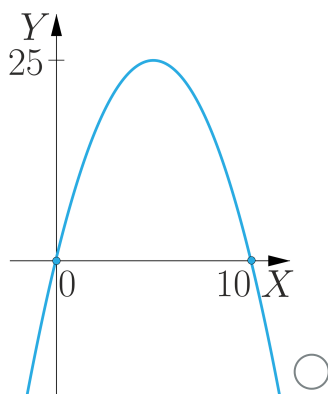
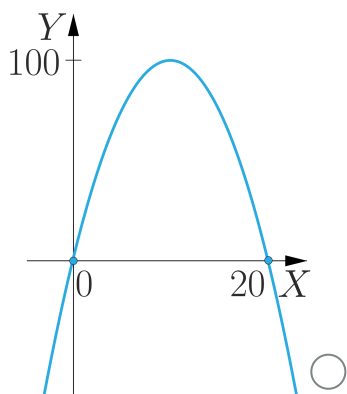


Jaka liczba dodana do swojego kwadratu tworzy najmniejszą sumę?

Ćwiczenie 5



Wskaż wykres, z którego można odczytać rozwiązanie zadania: Jaka jest możliwa największa wartość iloczynu dwóch liczb, których suma jest równa 20?



Ćwiczenie 6



Na prostej o równaniu $x + 6y - 24 = 0$ znajdź taki punkt P o dodatnich współrzędnych, że iloczyn odległości punktu P od osi układu współrzędnych jest największy z możliwych.

☐ $P = (2, 10)$

☐ $P = (15, \frac{3}{2})$

☐ $P = (12, 2)$

☐ $P = (10, 2)$

☐ $P = (\frac{3}{2}, 15)$

☐ $P = (2, 12)$

Ćwiczenie 7



Dane są punkty $A = (2, 3)$ i $B = (5, 6)$. Na osi X znajdź taki punkt C , aby suma kwadratów długości odcinków AC i BC była najmniejsza.

☐ $C = (\frac{29}{4}, 0)$

☐ $C = (\frac{29}{2}, 0)$

☐ $C = (\frac{7}{2}, 0)$

☐ $C = (\frac{7}{4}, 0)$

Ćwiczenie 8



Drut o długości 54 cm rozcięto na dwa kawałki i z każdego kawałka zbudowano brzeg trójkąta równoramiennego, przy czym stosunek długości ramienia do długości podstawy w jednym trójkącie wynosi 5 : 8, a w drugim 13 : 10. Jakie obwody mają te trójkąty, jeżeli suma ich pól jest najmniejsza z możliwych?

Dla nauczyciela

Autor: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak rozwiązywać zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji
- wyznacza dziedzinę otrzymanej funkcji
- obliczy wartość najmniejszą bądź największą otrzymanej funkcji
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- odwrócona lekcja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uczniowie wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film samouczek”, czyta treść polecenia nr 1 – „Zapoznaj się uważnie z poniższym filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenia”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie w grupach rozwiązują polecenie nr 2 w sekcji „Film samouczek”. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania z ćwiczeń interaktywnych.
4. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu tylko wybrane ćwiczenia albo te, których uczniowie nie zdążyli zrobić z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Współrzędne wierzchołka paraboli](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób schemat rozwiązania zadań optymalizacyjnych.