



Tajemnice wartości bezwzględnej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Tajemnice wartości bezwzględnej

Źródło: Possessed Photography, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Najczęściej uważa się, że matematycy zajmują się tylko badaniem własności abstrakcyjnych pojęć, jak choćby wartość bezwzględna. Jednak większość terminów matematycznych najpierw kształtowała się w świadomości człowieka w wyniku obserwacji stosunków ilościowych i form przestrzennych występujących w przyrodzie.

Być może, właśnie obserwacje w terenie spowodowały, że niezbędne stało się jednoznaczne określenie odległości, co z kolei spowodowało zdefiniowanie pojęcia *wartość bezwzględna*.

W tym materiale zbierzemy i rozszerzymy wiadomości o wartości bezwzględnej i jej własnościach.

Twoje cele

- Obliczysz wartość bezwzględną liczby rzeczywistej.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne z wartością bezwzględną.
- Udowodnisz niektóre własności wartości bezwzględnej.
- Zastosujesz własności wartości bezwzględnej w zadaniach.

Przeczytaj

Wartość bezwzględna – co to takiego?

Definicja: Wartość bezwzględna

Wartością bezwzględną (modułem) liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę a , gdy $a \geq 0$ lub liczbę $(-a)$, gdy $a < 0$.

Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Zatem:

$$|a| = a, \text{ gdy } a \geq 0$$

$$|a| = -a, \text{ gdy } a < 0$$

Przykład 1

Zapiszemy w najprostszej postaci podane wyrażenia.

- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$, bo $\sqrt{2} > 1$ i $\sqrt{2} - 1 > 0$
- $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, bo $\sqrt{2} > 1$ i $1 - \sqrt{2} < 0$
- $|4 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 4| + |2\sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3} = 8$

Liczby przeciwne a i $(-a)$ mają równe wartości bezwzględne, czyli:

$$|a| = |-a|$$

W szczególności

$$|a - b| = |b - a|$$

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $|x^2 - 3x| + 2x = |3x - x^2| + 2$.

Przenosimy wyrażenia ze zmienną na lewą stronę równania.

$$|x^2 - 3x| + 2x - |3x - x^2| = 2$$

Korzystamy z własności wartości bezwzględnej

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|x^2 - 3x| + 2x - |x^2 - 3x| = 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Na osi liczbowej wartość bezwzględna liczby rzeczywistej a jest odległością tej liczby od zera.

Przykład 3

Obliczmy odległość na osi liczbowej punktu $P = (-9)$ od zera.

Na osi liczbowej odległość punktu $P = (-9)$ od punktu 0 jest równa $|-9| = 9$.

Łatwo można uzasadnić, że odległość na osi liczbowej punktów $A = (a)$ i $B = (b)$ jest równa różnicy ich współrzędnych.

$$d(AB) = |a - b| = |b - a|$$

Przykład 4

Obliczmy odległość punktów $P = (2 + \sqrt[3]{3})$ i $R = (-2 + \sqrt[3]{3})$ na osi liczbowej.

$$d(PR) = |-2 + \sqrt[3]{3} - 2 - \sqrt[3]{3}| = |-4| = 4.$$

Wartość bezwzględna pomocna jest też w obliczeniach związanych z pierwiastkami.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Przykład 5

Zapiszemy wyrażenie $W(x) = \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$ bez użycia pierwiastka.

Wyrażenie pod pierwiastkiem zapisujemy w postaci kwadratu różnicy, a następnie z wykorzystaniem wartości bezwzględnej.

$$W(x) = \sqrt{4x^2 - 20x + 25}$$

$$W(x) = \sqrt{(2x - 5)^2}$$

$$W(x) = |2x - 5|$$

$$W(x) = \begin{cases} -2x + 5, & x < 2,5 \\ 2x - 5, & x \geq 2,5 \end{cases}$$

Przykład 6

Zapoznaj się z trudniejszymi przykładami obliczania wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających **wartość bezwzględna**.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DoFYNh6Cf>

Film nawiązujący do treści materiału o tajemnicach wartości bezwzględnej.

Własności wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna ma wiele ciekawych własności, poznamy niektóre z nich.

Własność a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste	Nazwa własności
$ a \geq 0$	nieujemność
$ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$	dodatnia określoność
$ a \cdot b = a \cdot b $	multiplikatywność
$ \frac{a}{b} = \frac{ a }{ b }$, dla $b \neq 0$	zachowanie dzielenia
$ a + b \leq a + b $ $ a - b \geq a - b $	podaddytywność
$ -a = a $	symetria
$ a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$	identyczność nierozróżnialnych
$ a - b \leq a - c + c - b $	nierówność trójkąta

W kolejnym przykładzie jeszcze kilka własności wartości bezwzględnej i ich zastosowania.

Przykład 7

- Dla dowolnej liczby rzeczywistej x , $x \leq |x|$.

Na przykład:

$$7 \leq |7| = 7$$

$$-7 \leq |-7| = 7$$

- Jeśli $x \neq 0$ to $\frac{|x|}{x} = 1$ lub $\frac{|x|}{x} = -1$.

Na przykład:

$$\frac{|9|}{9} = 1$$

$$\frac{|-9|}{-9} = -1$$

- Dla dowolnej liczby rzeczywistej x , $|x|^2 = x^2$.

Na przykład:

$$|-8|^2 = |-8| \cdot |-8| = 8 \cdot 8 = 64 = (-8) \cdot (-8) = (-8)^2$$

Przykład 8

Wykażemy prawdziwość nierówności $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Skorzystamy z podanych wyżej własności wartości bezwzględnej.

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + |2xy| + y^2$$

$$x^2 + |2xy| + y^2 = (|x| + |y|)^2$$

Stąd

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Przykład 9

Wykażemy, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b , jeżeli $a^2 + b^2 \leq 2$ to $|a + b| \leq 2$.

$$a^2 + b^2 \leq 2$$

Mnożymy przez 2 obie strony nierówności.

$$2a^2 + 2b^2 \leq 4$$

Zauważmy teraz, że $2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$, zatem

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 4$$

Ponieważ

$$(a + b)^2 \leq (a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 4$$

zatem

$$(a + b)^2 \leq 4$$

Obie strony nierówności są nieujemne.

$$\sqrt{(a + b)^2} \leq \sqrt{4}$$

$$|a + b| \leq 2.$$

Słownik

wartość bezwzględna

wartością bezwzględną (modułem) liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę a , gdy $a \geq 0$ lub liczbę $(-a)$, gdy $a < 0$

Animacja

Polecenie 1

Obejrzyj Animację. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam zadania, a dopiero następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHERavQOx>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przekształcania wyrażeń z wartością bezwzględną.

Polecenie 2

Zapisz wyrażenie

$$W(x) = |x - 6| - |3 - x| + |5 + x|, \text{ gdzie } x \in (-5, 3)$$

bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczba $A = |4 - 6| - |7 - 1| + |-8 - 4| - |-2| - |6|$ jest równa:

☐ 1

☐ -2

☐ -1

☐ 0

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Otoczeniem punktu x_0 nazywamy dowolny przedział otwarty o środku w punkcie x_0 .

Otoczeniem punktu x_0 o promieniu δ jest przedział $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, czyli zbiór wszystkich punktów x takich, że $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Ten warunek jest równoważny warunkowi:

☐ $|x - x_0| < \delta$

☐ $|x_0 - \delta| < x$

☐ $|x + \delta| < x_0$

☐ $|x - \delta| < x_0$

Ćwiczenie 3



Zaznacz, która nierówność jest prawdziwa, a która fałszywa.

Nierówność	Nierówność prawdziwa	Nierówność fałszywa
$ x + 3 \leq x + 3$	☐	☐
$ 4 - x \leq 4 - x + x - 4 $	☐	☐
$\sqrt{x^2 - 4} = x - 2 + x + 2 $	☐	☐
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq x + y - z $	☐	☐

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zapis, przeciągając takie wyrażenie, aby uzyskać nierówność prawdziwą.

$$\frac{|a+b|}{2} \leq \boxed{}$$

$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}$
 $\frac{a-b}{2}$
 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
 $\frac{a+b}{2}$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij równość, przeciągając odpowiednie wyrażenie.

Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą nie mniejszą niż trzy, liczba a jest ujemna to $-\sqrt[n]{|a|} =$
 $\boxed{}$

$\sqrt[n]{-a}$
 $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$
 $\sqrt[n]{a}$
 $\sqrt{a}$

Ćwiczenie 6



Dane jest wyrażenie $W(x) = |x - 1| + |4 - x| - |x + 2| - |x - 7|$.

Dopasuj odpowiedni przedział do zapisu tego wyrażenia bez użycia znaku wartości bezwzględnej.

$$W(x) = -2x - 4$$

$$x \in \langle -2, 1 \rangle$$

$$W(x) = -6$$

$$x \in \langle 1, 4 \rangle$$

$$W(x) = 0$$

$$x \in (-\infty, -2)$$

$$W(x) = 2x - 14$$

$$x \in \langle 4, 7 \rangle$$

Ćwiczenie 7



Dla każdej liczby rzeczywistej a i liczby rzeczywistej $b \geq 0$, jeśli $|a| \leq b$ to $-b \leq a \leq b$.

Korzystając z podanej wyżej własności wartości bezwzględnej, rozwiąż nierówność

$$|6x - 9| \leq 3.$$

Ćwiczenie 8



Dla każdej liczby rzeczywistej a i liczby rzeczywistej $b \geq 0$, jeśli $|a| > b$ to $a > b$ lub $a < -b$.

Korzystając z podanej wyżej własności wartości bezwzględnej, rozwiąż nierówność

$$|2x - 5| > 1.$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Tajemnice wartości bezwzględnej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartość bezwzględną liczby rzeczywistej
- przekształca wyrażenia algebraiczne z wartością bezwzględną
- udowadnia niektóre własności wartości bezwzględnej
- stosuje własności wartości bezwzględnej w zadaniach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- tak – nie
- kartki z kalendarza

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w parach metodą tak – nie przypominają sobie zdobyte do tej pory wiadomości na temat wartości bezwzględnej (jeden z uczniów podaje stwierdzenie na temat wartości bezwzględnej, drugi określa czy jest to stwierdzenie prawdziwe czy fałszywe).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w małych grupach metodą *kartki z kalendarza* pracują nad przykładami opisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz w animacji (uczniowie najpierw czytają treść danego zadania, a następnie opierając się na znanych zadaniach podobnego typu, próbują samodzielnie rozwiązać problem. W razie problemów, korzystają z „kartek z kalendarza” – czyli zapisków w zeszycie z poprzednich lekcji. Na koniec porównują swoje rozwiązania z przedstawionymi w przykładach).
2. Podsumowaniem tego etapu lekcji jest wspólna dyskusja na temat sposobów rozwiązywania zadań dotyczących wartości bezwzględnej, a w szczególności przekształcania wyrażeń algebraicznych i arytmetycznych z wartością bezwzględną.
3. Uczniowie wspólnie opracowują algorytm rozwiązywania takich zadań.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Liderzy grup opowiadają o ciekawych pomysłach, ale też problemach pracy w grupach.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

W ramach pracy domowej uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej – pojęcie algebraiczne](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wstępem do zajęć poświęconych rozwiązywaniu równań bądź nierówności z wartością bezwzględną.