Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Jednym z najwybitniejszych dziewiętnastowiecznych uczonych był francuski inżynier górnictwa, matematyk, fizyk i astronom Jules Henri Poincaré.

Henri Poincaré

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Jego wykłady, prowadzone na Sorbonie, cieszyły się ogromnym zainteresowaniem. Wykładał fizykę matematyczną i doświadczalną, rachunek prawdopodobieństwa i mechanikę nieba.

Stworzył prawie równocześnie z Einsteinem matematyczne podstawy szczególnej teorii względności, zajmował się miedzy innymi geometrią nieeuklidesową, zastosowaniami matematyki w fizyce.

Jak większość wybitnych umysłów był bardzo wszechstronny – w młodości pisywał sztuki teatralne. Jest też twórcą dwóch powieści. To jemu przypisuje się sformalizowany zapis wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, którym to wzorem zajmiemy się w tym materiale.

Twoje cele

- Określisz czy dane zdarzenia są rozłączne, czy nie.
- Obliczysz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń rozłącznych.
- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzeń, które nie są rozłączne.
- Udowodnisz proste zależności probabilistyczne.

Przeczytaj

Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń wykluczających się

Rzucamy kostką do gry. Możliwe jest wyrzucenie nieparzystej liczby oczek: 1, 3 lub 5. Można też wyrzucić parzystą liczbę oczek: 2, 4 lub 6. Zdarzenie A – wyrzucenie nieparzystej liczby oczek i zdarzenie B – wyrzucenie parzystej liczby oczek nie mogą zajść jednocześnie. Część wspólna tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym.

$$A \cap B = \emptyset$$

Zdarzenia te są zdarzeniami **rozłącznymi (wykluczającymi się)**.

W przypadku większej liczby zdarzeń o takich zdarzeniach mówimy, że są *„parami rozłącznymi”* lub *„parami wykluczającymi się”*.

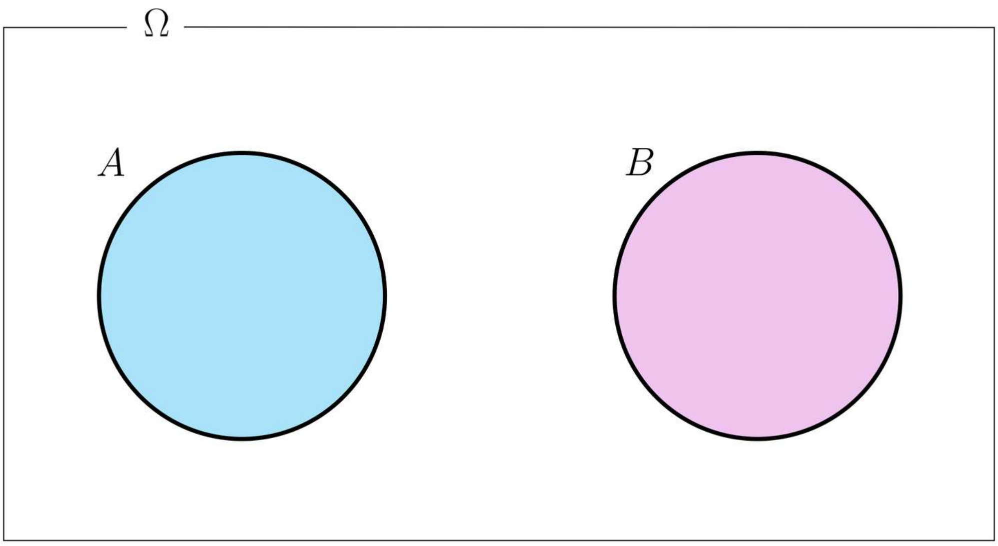
Informacja o tym, że dane zdarzenia są rozłączne jest bardzo ważna w przypadku określania prawdopodobieństwa sumy tych zdarzeń.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń rozłącznych

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas

jeśli zdarzenia A i B wykluczają się, czyli $A \cap B = \emptyset$, to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Przykład 1

Adam ma do wyboru 2 krawaty w kratkę, 3 w paski i 4 w kwiatki. Wybiera krawat w sposób losowy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierze krawat w kratkę lub w kwiatki?

Zdarzenia:
K – Adam wybierze krawat w kratkę,
A – Adam wybierze krawat w kwiatki
są rozłączne. Możemy więc zastosować wzór sformułowany w powyższym twierdzeniu.

$$P(K \cup A) = P(K) + P(A)$$

$$P(K \cup A) = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że Adam wybierze krawat w kratkę lub w kwiatki jest równe $\frac{2}{3}$.

Przykład 2

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ i $P(A \cap B') = 0,8$.

Wykażemy, że $P\left(A' \cap B\right) \leq 0,2$.

Rozwiązanie:

Wiadomo, że $A \cap B' = A \setminus B$ oraz $A' \cap B = B \setminus A$.

Zdarzenia te są rozłączne, zatem ze wzoru na sumę zdarzeń rozłącznych otrzymujemy:

$$P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right) \leq P(\Omega) = 1$$

Czyli:

$$P\left(A' \cap B\right) \leq 1 - P\left(A \cap B'\right) = 1 - 0,8 = 0,2$$

C.d.n

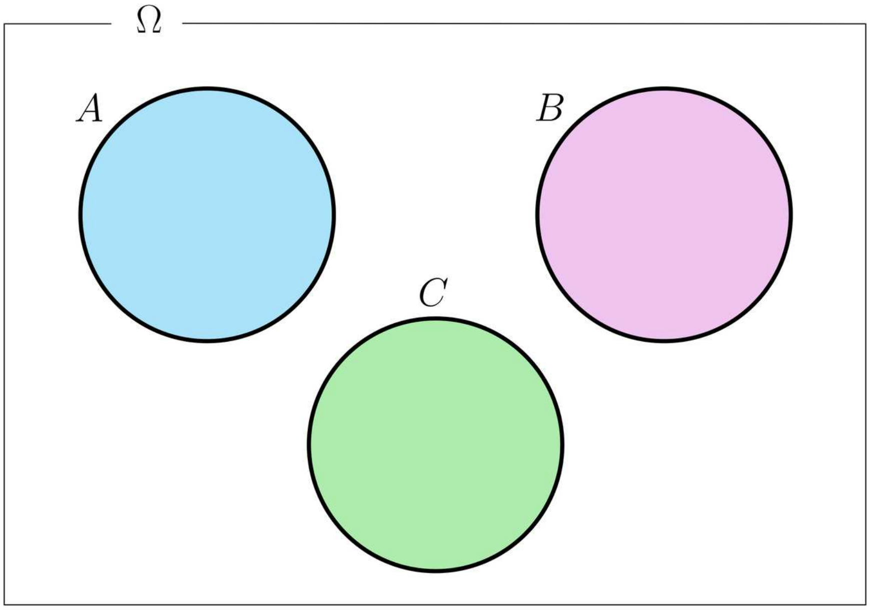
Podane powyżej twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy dwóch zdarzeń jest prawdziwe również dla większej liczby zdarzeń. Poniżej wersja twierdzenia dla trzech zdarzeń.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń rozłącznych

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$, wówczas

jeśli zdarzenia A, B, C wykluczają się wzajemnie, czyli $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, to:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$



Przykład 3

W koszu znajduje się 25 losów na loterię. Wśród nich 10 to losy przegrywające, a 15 wygrywające.

Ewa wyciąga kolejno trzy losy. Obliczymy prawdopodobieństwo, że wyciągnęła dwa losy wygrywające (W) i jeden przegrywający (K).

Rozwiązanie:

Pierwszy los wyciąga Ewa spośród 25 losów, drugi spośród 24, a trzeci spośród 23.

Zatem $|\Omega| = 25 \cdot 24 \cdot 23$.

Oznaczmy:
A – wyciągnięcie dwóch losów wygrywających i jednego przegrywającego.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia:

(W_1, W_2, K), (W_1, K, W_2), (K, W_1, W_2).

Zauważmy, że zdarzenia $W_1 \cap W_2 \cap K$, $W_1 \cap K \cap W_2$, $K \cap W_1 \cap W_2$ wzajemnie się wykluczają.

Prawdopodobieństwo ich sumy równe jest sumie ich prawdopodobieństw.

$$P(A) = P((W_1 \cap W_2 \cap K) \cup (W_1 \cap K \cap W_2) \cup (K \cap W_1 \cap W_2))$$

$$P(A) = P(W_1 \cap W_2 \cap K) + P(W_1 \cap K \cap W_2) + P(K \cap W_1 \cap W_2)$$

$P(A) = \frac{15 \cdot 14 \cdot 10 + 15 \cdot 10 \cdot 14 + 10 \cdot 15 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{21}{46}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez Ewę dwóch losów wygrywających i jednego przegrywającego jest równe $\frac{21}{46}$.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń, sformułujemy teraz w wersji ogólnej, dla n zdarzeń, gdzie $n \geq 2$ i $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy n zdarzeń rozłącznych

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i $A_1 \in \Omega$, $A_2 \in \Omega$, $\ldots$, $A_n \in \Omega$.

Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, $\ldots$, A_n wzajemnie się wykluczają, to:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

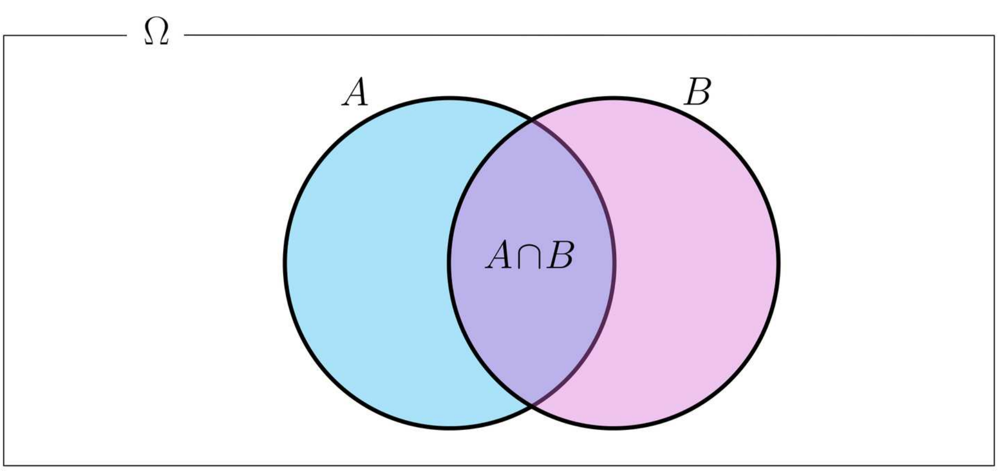
Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Poprzednie przykłady dotyczyły jedynie obliczania sumy zdarzeń wykluczających się. Teraz podamy twierdzenie uogólnione, w którym nie jest wymagane, aby dane zdarzenia były rozłączne.

Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Dowód

Załóżmy, że $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$.

Zachodzi wtedy równość:

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

Zdarzenia A i $B \setminus A$ wykluczają się, zatem:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

Prawdziwa jest również równość

$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

Zdarzenia $A \cap B$ oraz $B \setminus A$ wykluczają się, więc

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$

Otrzymane równości odejmujemy stronami.

$$\begin{array}{rl} & P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) \\ - & \underline{P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)} \\ & P(A \cup B) - P(B) = P(A) + P(B \setminus A) - P(A \cap B) - P(B \setminus A) \end{array}$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

Przenosimy na prawą stronę wyrażenie $P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

C.d.n

Przykład 4

Pewien maturzysta może uzyskać z egzaminu maturalnego z matematyki co najmniej 40 punktów z prawdopodobieństwem $0,6$.

Natomiast co najwyżej 40 punktów z prawdopodobieństwem $0,8$.

Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyska 40 punktów.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na uzyskaniu przez maturzystę co najmniej 40 punktów,
B – zdarzenie polegające na uzyskaniu przez maturzystę co najwyżej 40 punktów.

Zauważmy, że :

$P(A) = 0,6$

$P(B) = 0,8$

$A \cup B = \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = 1$

Uzyskane liczby wstawiamy do wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$1 = 0,6 + 0,8 - P(A \cap B)$

Wyznaczamy $P(A \cap B)$.

$1 = 1,4 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0,4$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że maturzysta uzyska 40 punktów jest równe $0,4$.

Przykład 5

Niech A i B będą zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych takimi, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Obliczymy $P(B \setminus A)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, więc do wyznaczenia prawdopodobieństwa $P(B \setminus A)$, będzie potrzebna znajomość liczby $P(B)$.

Do wyznaczenia tego prawdopodobieństwa, skorzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{13}{24}$

Zatem

$P(B \setminus A) = \frac{13}{24} - \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

Odpowiedź:

> Liczba $P(B \setminus A)$ jest równa $\frac{3}{8}$.

Twierdzenie o sumie zdarzeń, które się nie wykluczają, można uogólnić. Poniżej wersja dla trzech zdarzeń.

> **Twierdzenie: Prawdopodobieństwo sumy trzech zdarzeń**
>
> Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$, wówczas:
>
> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) +$
>
> $-P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Słownik

> **prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń rozłącznych**
>
> niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas jeśli zdarzenia A i B wykluczają się, czyli $A \cap B = \emptyset$, to:
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

> **prawdopodobieństwo sumy zdarzeń**
>
> niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych, a P niech będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, wówczas
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, która przybliży Ci jedno z kluczowych twierdzeń klasycznego modelu rachunku prawdopodobieństwa – twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń. Zwróć uwagę na założenia, które są bardzo istotne przy wyborze odpowiedniego wzoru.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5i9yzt7A

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej prawdopodobieństwa sumy zdarzeń.

Polecenie 2

Wykaż, że

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) +$$

$$-P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że jeżeli suma zdarzeń A i B jest zdarzeniem pewnym i zdarzenia A, B są niezależne, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym.

Ćwiczenie 8

Niech A i B będą zdarzeniami tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych takimi, że $P(A \cup B) = 0,8$ i $P(A') = 0,4$ i $P(B') = 0,3$. Oblicz $P(A \cap B)$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa czy dane zdarzenia są rozłączne, czy nie
- oblicza prawdopodobieństwo sumy zdarzeń rozłącznych
- oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, które nie są rozłączne
- udowodnia proste zależności probabilistyczne
- dobiera odpowiedni model matematyczny do sytuacji z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analogie
- praca z ekspertem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Jeden z wybranych wcześniej uczniów, przypomina poznane wcześniej działania na zbiorach i odpowiednie prawa działań.
2. Uczniowie przypominają wiadomości związane z klasycznym modelem prawdopodobieństwa.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Praca w grupach – zadaniem uczniów jest, posługując się analogiami, wynikającymi z rachunku zbiorów, sformułować i udowodnić twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy. Nauczyciel, pełniąc rolę wspierającą, powinien sugerować takie rozwiązania, aby uczniowie uwzględnili dwie wersje twierdzenia – gdy zdarzenia się wykluczają i gdy nie są rozłączne.
2. Po prezentacji prac grup, uczniowie wspólnie ustalają i zapisują w zeszytach odpowiednie twierdzenie.
3. Uczniowie pracują w 4 grupach. Zadaniem 1 i 2 grupy jest zapoznanie się z materiałem w sekcji „Przeczytaj", dotyczącym przykładów obliczania sumy zdarzeń wykluczających się, a grup 2 i 4 – sumy zdarzeń, które nie są rozłączne.
4. Po kilku minutach grupy łączą się – 1 z 3, 2 z 4. Teraz każda z grup, musi przekazać uzyskane informacje grupie, z którą się połączyła. Po wymianie wiadomości, grupy rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Liderzy grup krótko komentują strategie obrane przez daną grupę, pozwalającą na szybkie udowodnienie sformułowanego twierdzenia.
2. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie zapoznanie się z animacją i wykonanie Polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wstępem do zajęć lub jego podsumowaniem.