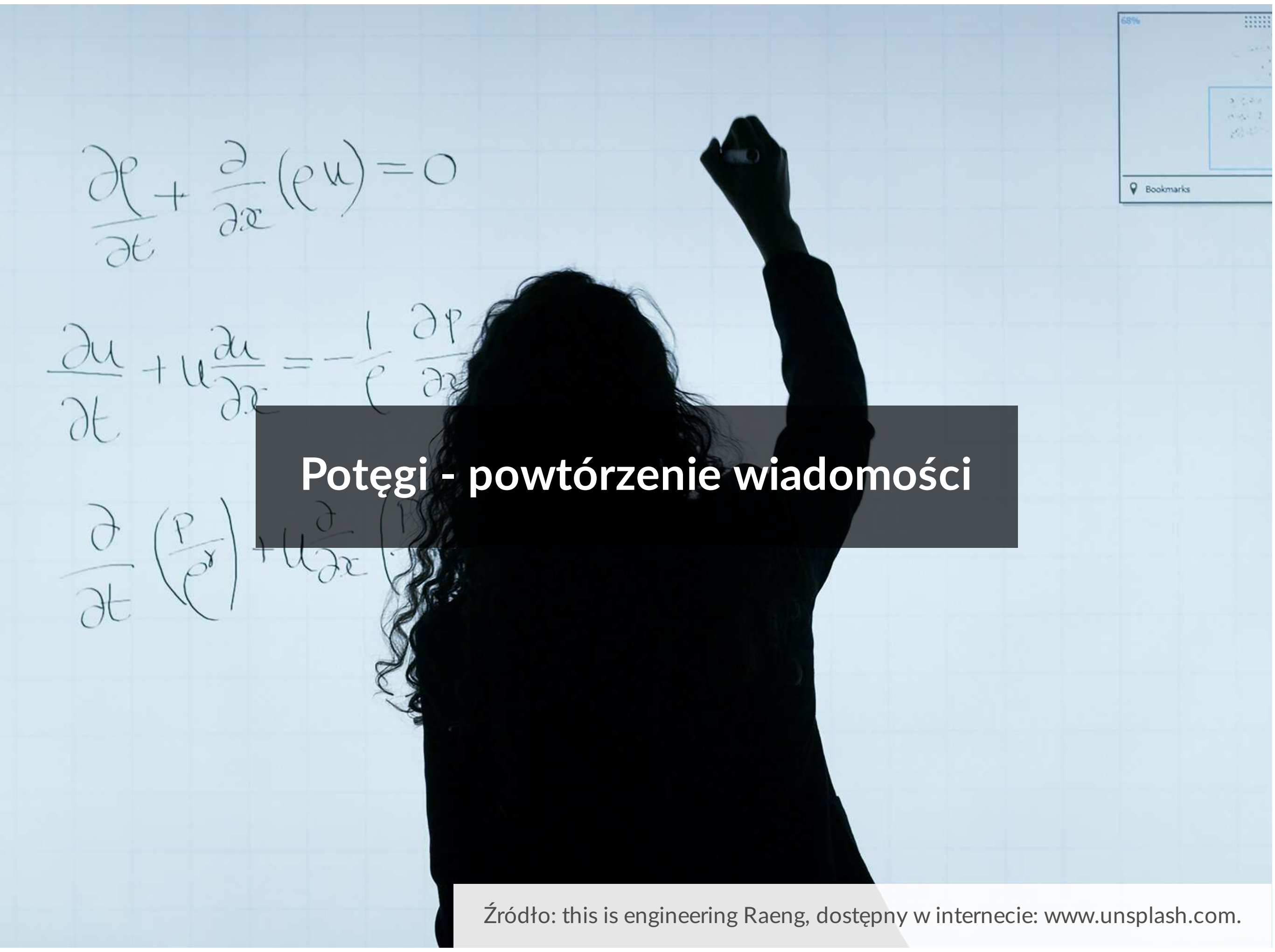
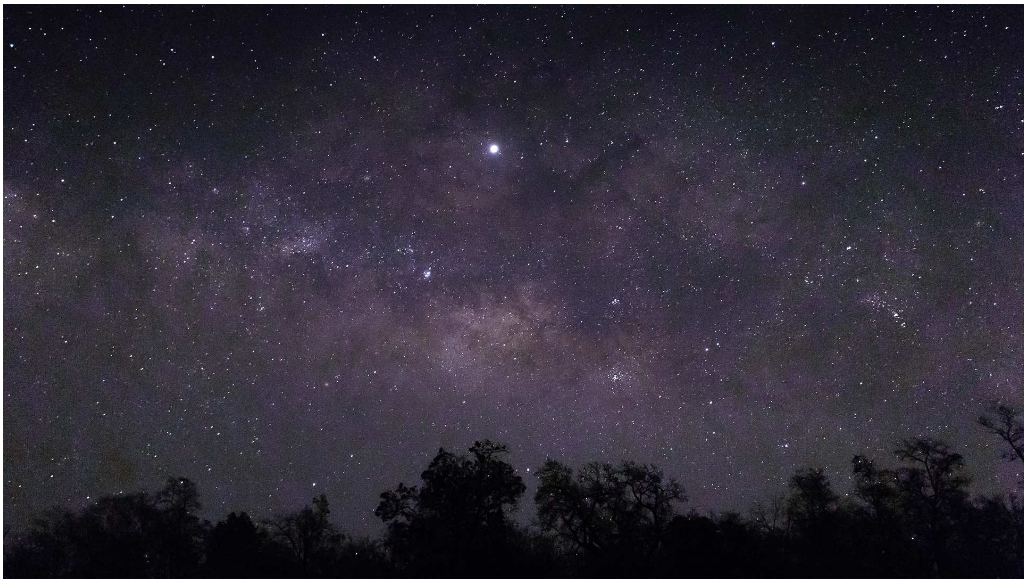
Potęgi - powtórzenie wiadomości

Potęgi - powtórzenie wiadomości



Źródło: this is engineering Raeng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Przez wiele wieków ludziom wydawało się, że nasz świat jest co prawda duży, ale i tak wszelkie w nim odległości - nawet te do gwiazd - nie są dużo większe od tych, jakie spotykamy na Ziemi. Okazało się jednak, że żyjemy we Wszechświecie, którego wielkość i budowa musi być opisywana z użyciem naprawdę wielkich liczb.



W naszej Galaktyce jest około 100 miliardów gwiazd

Źródło: dostępny w internecie: freepik.com.

Jak widzimy, zapisywanie wielkich liczb w tradycyjnej notacji dziesiętnej jest uciążliwe. Szybko bowiem możemy stracić rozeznanie w ich wielkości i, chcąc się przekonać jak są one duże, skłonni bylibyśmy liczyć w nich zera.

W takich przypadkach wygodniej jest posługiwać się liczbami zapisanymi w postaci potęgi - zazwyczaj używamy w tym celu potęgi liczby 10.

Twoje cele

- Obliczysz wartości potęg o wykładnikach całkowitych.
- Zastosujesz w obliczeniach wzory na iloczyn i iloraz potęg o tych samych podstawach oraz wzór na potęgowanie potęgi.
- Rozwiążesz zadania dotyczące porównywania wielkości występujących w przyrodzie.
- Zapiszesz liczby w notacji wykładniczej.

Przeczytaj

Na wstępie przypomnimy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

Definicja: potęga o wykładniku naturalnym

Potęgą liczby rzeczywistej a o **wykładniku naturalnym** $n \geq 2$ nazywamy liczbę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}.$$

Liczbę a nazywamy podstawą potęgi. Ponadto przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej:

$$a^1 = a$$

oraz dla $a \neq 0$:

$$a^0 = 1.$$

Konwencja, według której dla $a \neq 0$ liczba a^0 jest równa 1, w tym momencie może się jeszcze wydawać nieco sztuczna. Uzasadnimy ją w trakcie dalszej nauki.

Przykład 1

a. $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$
b. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$
c. $8^1 = 8$ oraz $(-1)^1 = -1$
d. $7^0 = 1$ oraz $(-2)^0 = 1$

W kolejnych przykładach przypomnimy, jak wykonujemy działania na potęgach o tej samej podstawie.

Przykład 2

Pomnożymy liczby 10^4 oraz 10^7.

Korzystając z definicji potęgi o wykładniku naturalnym, mamy:

$$10^4 \cdot 10^7 = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{4 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{7 \text{ czynników}} = 10^{4+7} = 10^{11}.$$

Przykład 3

Podzielimy:

a. liczbę 5^7 przez 5^3
b. liczbę 7^{1410} przez 7^{2025}

Ponownie korzystamy z definicji potęgi o wykładniku naturalnym, skąd dostajemy:

a. $\frac{5^7}{5^3} = \frac{5^3 \cdot 5^4}{5^3} = 5^4$
b. $\frac{7^{1410}}{7^{2025}} = \frac{7^{1410}}{7^{1410} \cdot 7^{615}} = \frac{1}{7^{615}}$

Przykład 4

Podniesiemy liczbę 2^5 do potęgi trzeciej.

Znów, korzystając z definicji potęgi o wykładniku naturalnym, otrzymujemy:

$$\left(2^5\right)^3 = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}.$$

W następnych przykładach przypomnimy, jak przekształcać wyrażenia, które dadzą się zapisać w postaci iloczynu lub ilorazu potęg o tych samych wykładnikach (tym razem podstawy potęg nie muszą być równe).

Przykład 5

Obliczymy, ile cyfr ma zapis dziesiętny iloczynu $4^5 \cdot 5^{10}$.

Doprowadzimy podany iloczyn do postaci potęgi liczby 10:

$$4^5 \cdot 5^{10} = \left(2^2\right)^5 \cdot 5^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 10^{10} = 10000000000.$$

Zatem zapis dziesiętny iloczynu $4^5 \cdot 5^{10}$ ma 11 cyfr.

Przykład 6

Wykażemy, że iloraz $\left(12\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{7}{6}\right)^{10}$ jest liczbą całkowitą.

Przekształcamy zadany iloraz wykorzystując własności działań na potęgach:

$$\left(12\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{7}{6}\right)^{10} = \left(\frac{49}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10} = \frac{49^5}{4^5} \cdot \frac{6^{10}}{7^{10}} = \frac{\left(7^2\right)^5}{\left(2^2\right)^5} \cdot \frac{(2 \cdot 3)^{10}}{7^{10}} =$$

$$= \frac{7^{10}}{2^{10}} \cdot \frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{7^{10}} = 3^{10}.$$

Otrzymana liczba jest, oczywiście, całkowita (a jej zapis dziesiętny to 59049).

Uogólniając rozumowania z powyższych przykładów, można uzasadnić wzory podane poniżej.

Ważne!

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych dodatnich liczb całkowitych m i n prawdziwe są wzory:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n \geq m,$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n < m,$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \text{ gdzie } b \neq 0.$$

Zapis wielkich liczb z wykorzystaniem potęg liczby 10 jest wygodny, ponieważ od razu informuje nas o tym, iloma zerami zakończony jest zapis dziesiętny danej liczby. W ten sposób możemy zapisać np. liczby używane w fizyce:

a. w szklance wody jest około 10^{25} cząsteczek
b. widoczna część Wszechświata ma objętość około 10^{80} kilometrów sześciennych

Ponieważ podstawowym systemem, w którym przeprowadzamy obliczenia jest system dziesiętny, więc do oszacowania rzędu obliczanych wielkości również stosuje się zapis z wykorzystaniem potęg liczby 10 - jest to tzw. notacja wykładnicza.

Definicja: notacja wykładnicza

Jeśli liczba x jest zapisana w postaci:

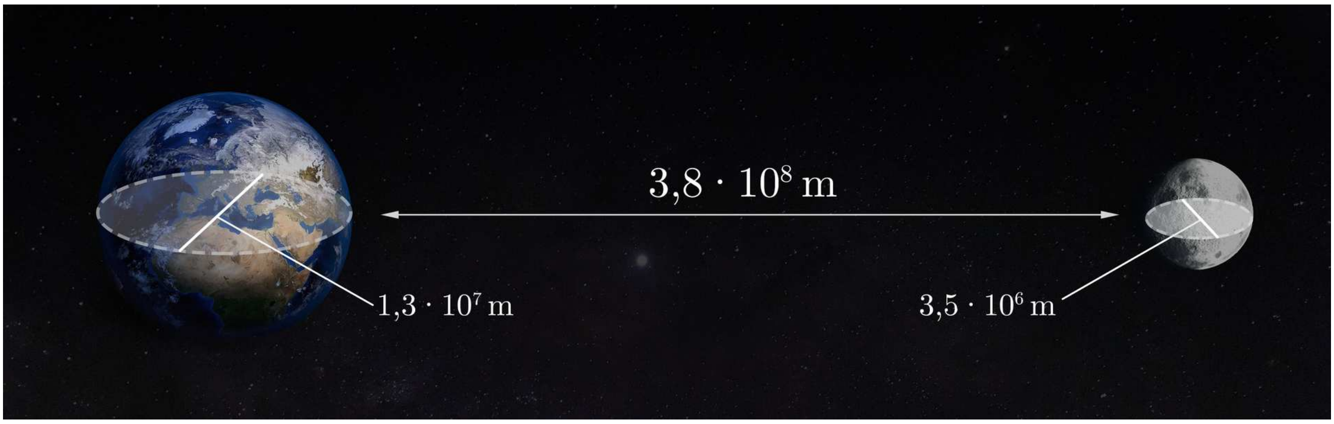
$$x = m \cdot 10^k,$$

gdzie m jest liczbą spełniającą nierówność $1 \leq m < 10$, natomiast k jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba x jest zapisana w **notacji wykładniczej**.

Mówimy wtedy, że liczba x jest **rzędu** 10^k.

Przykład 7

Magda tworzy model Układu Słonecznego, w którym Ziemia jest wielkości grejpfruta o średnicy 15 cm. Jak duża powinna być w modelu Magdy kulka przedstawiająca Księżyc?



Obliczmy, ile razy średnica Ziemi jest większa od średnicy Księżyca:

$\frac{1{,}3 \cdot 10^7}{3{,}5 \cdot 10^6} = \frac{1{,}3}{3{,}5} \cdot \frac{10^7}{10^6} = \frac{13}{35} \cdot 10 = \frac{130}{35} \approx 3,7.$

Zatem aby proporcje w modelu zostały zachowane, średnica kulki będącej modelem Księżyca musi być $3,7$ razy mniejsza od średnicy grejpfruta, to znaczy powinna mieć około 4 cm. Wobec tego model Księżyca powinien być wielkości piłeczki do ping-ponga.

Przykład 8

Wiedząc, że w modelu Magdy kulka przedstawiająca Ziemię jest wielkości grejpfruta obliczymy, w jakiej odległości od niej powinna znajdować się kulka wielkości piłeczki pingpongowej, która jest modelem Księżyca.

Obliczmy, ile razy odległość Ziemi od Księżyca jest większa od średnicy Ziemi:

$\frac{3{,}8 \cdot 10^8}{1{,}3 \cdot 10^7} = \frac{380\,000\,000}{13\,000\,000} = \frac{380}{13} \approx 29.$

A zatem piłeczka pingpongowa powinna być odległa od grejpfruta obrazującego Ziemię o około $29 \cdot 15 = 435$ cm, tj. niemal o $4,5$ m.

Astronomowie do opisywania odległości obiektów, zwłaszcza tych, które znajdują się w przestrzeni międzygwiezdnej, używają jednostki nazywanej **parsekiem** (w skrócie oznaczanym pc). Przyjęto, że 1 parsek to około $31 \cdot 10^{12}$ km.

Przykład 9

Proxima Centauri, gwiazda najbliższa Słońcu, jest od niego oddalona o $1,3$ parseka. Obliczymy, w jakiej odległości od kuli przedstawiającej Słońce powinien znajdować się w modelu Magdy model tej gwiazdy.

Obliczmy, ile razy odległość Słońca od Proximy Centauri jest większa od średnicy Ziemi:

$\frac{1{,}3 \cdot 31 \cdot 10^{12} \cdot 10^3}{1{,}3 \cdot 10^7} = 31 \cdot 10^8.$

Oznacza to, że gdyby Magda próbowała odnieść swój model do odległości obiektów z przestrzeni międzygwiezdnej, to odległość między Słońcem i Proximą Centauri byłaby wtedy w przybliżeniu równa

$31 \cdot 10^8 \cdot 15 \text{ cm} = 465 \cdot 10^8 \text{ cm} = 465 \cdot 10^6 \text{ m} = 465 \cdot 10^3 \text{ km},$

czyli około 465000 km.

Otrzymana odległość jest ponad 11 razy większa od długości równika Ziemi.

Odnotujmy na zakończenie ważne twierdzenie, z którego często korzystamy przy porównywaniu liczb rzeczywistych.

Twierdzenie: o porównywaniu potęg liczb rzeczywistych o tych samych wykładnikach

Dane są dwie liczby rzeczywiste $a \geq 0$ i $b \geq 0$ oraz liczba naturalna $n \geq 1$. Wówczas:

$a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^n < b^n$.

Przykład 10

Porównamy liczby 3^{20} i 2^{30}.

Mamy:

$3^{20} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10}$ i $2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}$,

a ponieważ $9 > 8$, więc

$3^{20} = \left(3^2\right)^{10} = 9^{10} > 2^{30} = \left(2^3\right)^{10} = 8^{10}.$

Przykład 11

Wykażemy, że liczba $\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}}$ jest większa od 360 i mniejsza od 361.

Mamy wykazać, że prawdziwe są dwie nierówności:

(1) $\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}} < 361,$

(2) $\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}} > 360.$

Przekształcamy równoważnie pierwszą nierówność:

$\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}} < 361$

$\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}} < 361 = 19^2$

$19^{27} + 8^{27} < 19^2 \cdot \left(19^{25} + 8^{25}\right)$

$19^{27} + 8^{27} < 19^{27} + 19^2 \cdot 8^{25}$

$8^{27} < 19^2 \cdot 8^{25}$

$8^2 < 19^2$

$64 < 361.$

Wynika stąd, że pierwsza nierównosc jest prawdziwa.

Teraz przekształcamy równoważnie drugą nierówność:

$\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}} > 360 \; 19^{27} + 8^{27} > 360 \cdot \left(19^{25} + 8^{25}\right)$

$19^{27} - 360 \cdot 19^{25} > 360 \cdot 8^{25} - 8^{27}$

$19^{25} \cdot \left(19^2 - 360\right) > 8^{25} \cdot \left(360 - 8^2\right)$

$19^{25} \cdot (361 - 360) > 8^{25} \cdot (360 - 64)$

$19^{25} \cdot 1 > 8^{25} \cdot 296$

$\frac{19^{25}}{8^{25}} > 296$

$\left(\frac{19}{8}\right)^{25} > 296.$

Na podstawie powyższego twierdzenia o porównywaniu potęg stwierdzamy, że:

- ponieważ $\frac{19}{8} = 2\frac{3}{8} > 2$, więc $\left(\frac{19}{8}\right)^{25} > 2^{25}$,
- ponieważ $2 > 1$, więc $2^{16} > 1^{16} = 1$; ponadto $2^9 > 512 > 296$, co oznacza, że $2^{25} > 296.$

Wobec tego

$\left(\frac{19}{8}\right)^{25} > 2^{25} > 296,$

czyli prawdziwa jest także druga nierówność.

W ten sposób udowodniliśmy, że liczba $\frac{19^{27}+8^{27}}{19^{25}+8^{25}}$ jest większa od 360 i mniejsza od 361.

Słownik

potęga liczby rzeczywistej o wykładniku naturalnym

potęgą liczby rzeczywistej a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ nazywamy liczbę $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$.
Liczbę a nazywamy podstawą potęgi. Ponadto przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej $a^1 = a$ oraz dla $a \neq 0$: $a^0 = 1$

notacja wykładnicza

jeśli liczba x jest zapisana w postaci $x = m \cdot 10^k$, gdzie m jest liczbą spełniającą nierówność $1 \leq m < 10$, natomiast k jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba x jest zapisana w notacji wykładniczej.
Mówimy też wtedy, że liczba x jest rzędu 10^k

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, a następnie odpowiedz na pytanie z Polecenia 2 i 3.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EUA7RdN

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Co waży więcej: 6 tysięcy kotów o wadze $4,3 \text{ kg}$ czy 8 słoni o wadze $3,7 \cdot 10^3 \text{ kg}$?

Polecenie 3

Odległość z Ziemi do Księżyca nie jest stała, wynosi bowiem od 365000 km do 406000 km. W pewnym dniu wynosiła 384000 km. Ile to metrów? Wynik podaj w notacji wykładniczej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n suma $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3} + 5^{n+4} + 5^{n+5} + 5^{n+6} + 5^{n+7}$ dzieli się przez iloczyn $\left(1 + 5^2\right) \cdot \left(1 + 5^4\right)$.

Ćwiczenie 11

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Potęgi - powtórzenie wiadomości

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach; 5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- oblicza wartości potęg o wykładnikach całkowitych,
- stosuje w obliczeniach wzory na iloczyn i iloraz potęg o tych samych podstawach oraz wzór na potęgowanie potęgi,
- rozwiązuje zadania dotyczące porównywania wielkości występujących w przyrodzie,
- zapisuje liczby w notacji wykładniczej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji - „Potęgi część 1” i prosi uczniów o sformułowanie celów i kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Film edukacyjny”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do

nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak…”.

Praca domowa:

Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Potęgi część 1”).

Materiały pomocnicze:

- Działania na potęgach

Wskazówki metodyczne:

Film może być wykorzystany na zajęciach poświęconych wykonywaniu działań na liczbach rzeczywistych.