



Równanie wysokości w trójkącie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wysokości w trójkącie

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

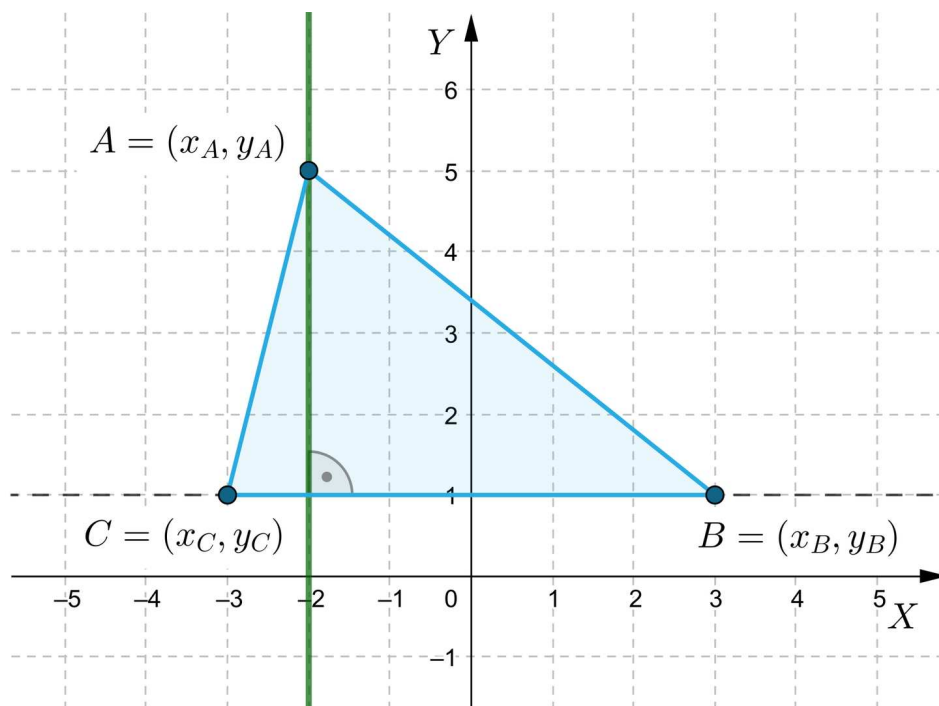
W tym materiale nauczysz się wyznaczać równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta. Wyprowadzimy też wzór ogólny na równanie takiej prostej oraz zastosujemy go przy rozwiązywaniu zadań.

Twoje cele

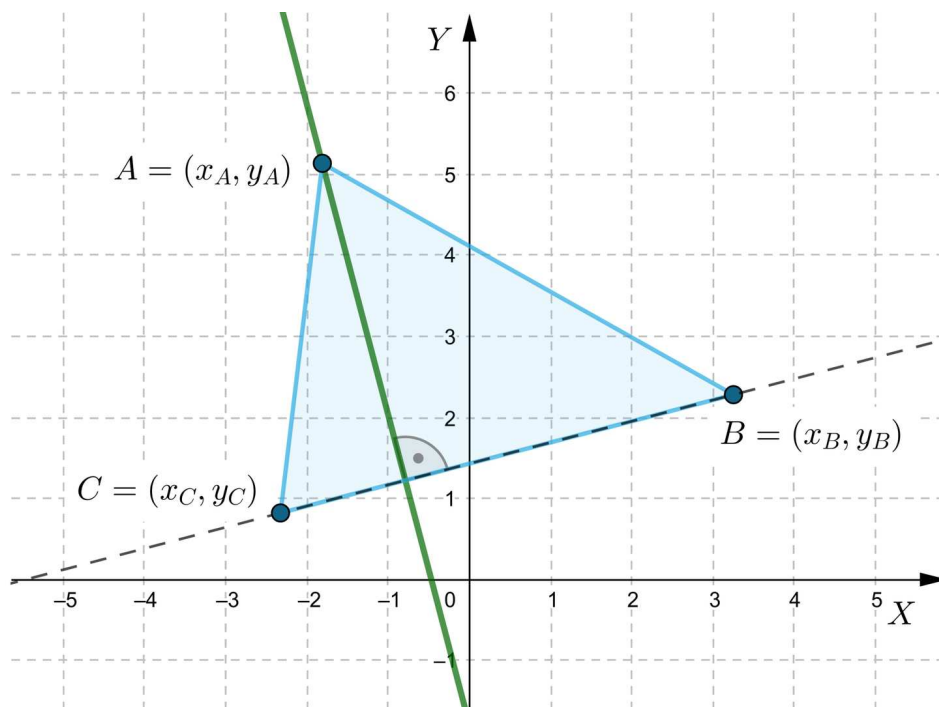
- Wyznaczysz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta.
- Zastosujesz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Przeczytaj

Rozważmy trójkąt o wierzchołkach w punktach $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$, $C = (x_C; y_C)$. Zauważmy, że jeśli odcinek BC jest równoległy do osi X , to równanie prostej przechodzącej przez wierzchołek A zawierającej wysokość tego trójkąta to $x = x_A$.



Jeśli odcinek BC nie jest równoległy do osi X , to współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy ilorazowi różnicy drugich współrzędnych punktów C i B przez różnicę pierwszych współrzędnych tych punktów (w tej samej kolejności), czyli $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.



Ponieważ prosta zawierająca wysokość poprowadzoną z punktu A jest prostopadła do prostej BC , więc jej współczynnik kierunkowy jest równy $-\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}$. Po zastosowaniu

wzoru na równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym przechodzącej przez dany punkt, otrzymujemy równanie prostej

$$y - y_A = -\frac{x_C - x_B}{y_C - y_B}(x - x_A),$$

co po przekształceniu daje równanie

$$(y_C - y_B)(y - y_A) = -(x_C - x_B)(x - x_A).$$

Sprawdźmy jeszcze otrzymany ostatecznie wzór obejmuje również przypadek, gdy odcinek BC jest równoległy do osi X . Wówczas $y_B = y_C$ i $x_B \neq x_C$ (w przeciwnym razie nie otrzymalibyśmy trójkąta), więc roważany wzór przyjmuje postać

$$(y_C - y_C)(y - y_A) = -(x_C - x_B)(x - x_A)$$

$$0 = -(x_C - x_B)(x - x_A)$$

$$x = x_A.$$

Zatem wzór

$$(y_C - y_B)(y - y_A) = -(x_C - x_B)(x - x_A)$$

opisuje prostą zawierającą **wysokość trójkąta** o wierzchołkach

$$A = (x_A; y_A), B = (x_B; y_B), C = (x_C; y_C)$$

przechodzącą przez punkt A niezależnie od położenia punktów A, B, C w prostokątnym układzie współrzędnych.

Przykład 1

Wyznamy równanie prostej zawierającej **wysokość trójkąta** o wierzchołkach

$A = (-1; -3), B = (8; 3), C = (2; 6)$ przechodzącej przez punkt A .

Możemy wykorzystać otrzymany wzór.

$$(y_C - y_B)(y - y_A) = -(x_C - x_B)(x - x_A)$$

$$(6 - 3)(y + 3) = -(2 - 8)(x + 1)$$

$$3(y + 3) = 6(x + 1)$$

$$3y + 9 = 6x + 6$$

$$y + 3 = 2x + 2$$

$$y = 2x - 1$$

Możemy też powtórzyć całą drogę, która doprowadziła nas do tego wzoru:

- współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy

$$\frac{6 - 3}{2 - 8} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2},$$

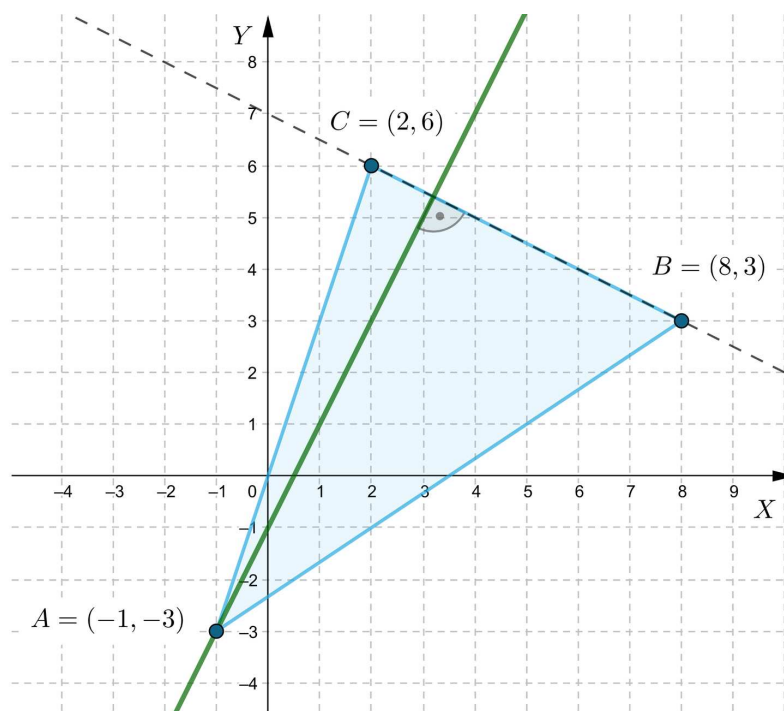
- współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną do boku BC jest równy 2,

- korzystając ze wzoru na równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym przechodzącej przez dany punkt, otrzymujemy równanie

$$y + 3 = 2(x + 1),$$

co po przekształceniu daje równanie

$$y = 2x - 1.$$



Przykład 2

Wyznamy współrzędne punktu przecięcia wysokości (tzw. ortocentrum) trójkąta o wierzchołkach $A = (-1; -3)$, $B = (8; 3)$, $C = (2; 6)$.

W poprzednim przykładzie wyznaczyliśmy równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka A : $y = 2x - 1$.

Wyznamy równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka B :

$$(6 - (-3))(y - 3) = -(2 - (-1))(x - 8)$$

$$9(y - 3) = -3(x - 8)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$$

Na mocy twierdzenia, które orzeka, że wszystkie trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, wystarczy, że wyznaczymy współrzędne punktu wspólnego dwóch z nich. W tym celu wystarczy rozwiązać układ złożony z równań dwóch prostych zawierających wysokości:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Z układu wynika równanie

$$-\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} = 2x - 1,$$

które można przekształcić następująco

$$-x + 17 = 6x - 3$$

$$-7x = -20$$

$$x = \frac{20}{7}$$

Dla $x = \frac{20}{7}$, mamy

$$y = 2 \cdot \frac{20}{7} - 1 = \frac{33}{7}.$$

Zatem **ortocentrum trójkąta** ABC ma współrzędne $\left(\frac{20}{7}; \frac{33}{7}\right)$.

Słownik

wysokość trójkąta

odcinek o jednym końcu w wierzchołku tego trójkąta o drugim końcu na prostej zawierającej przeciwległy bok prostopadły do tego boku

ortocentrum trójkąta

punkt przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta

Aplet

Polecenie 1

Zmieniając położenie punktów $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$, $C = (x_C; y_C)$ obserwuj, jak zmienia się równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC , poprowadzonej przez wierzchołek A .

Polecenie 2

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Pytania	Odpowiedzi	
Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (-1; 3)$, $B = (4; 2)$, $C = (-1; -2)$ przechodzącej przez punkt A to:	$-4y - 5x + 7 = 0$ ☐	$y = -1$ ☐
Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (0; 3)$, $B = (2; 2)$, $C = (-2; -1)$ przechodzącej przez punkt A to:	$y = -\frac{4}{3}x + 3$ ☐	$-4x - 3y + 9 = 0$ ☐
Współrzędne ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (0; 3)$, $B = (2; 2)$, $C = (-2; -1)$ to:	$(2; 2)$ ☐	$(0; 3)$ ☐
Współrzędne ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-1; 4)$, $B = (3; 1)$, $C = (-2; 1)$ to:	$\left(\frac{7}{3}; -1\right)$ ☐	$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$ ☐

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta o wierzchołkach $A = (4; 3)$, $B = (1; -4)$, $C = (-5; -2)$ poprowadzonej z wierzchołka A . Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie powyższego zadania.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $\frac{-4 - (-2)}{1 - (-5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. 

Po zastosowaniu równania prostej o danym współczynniku przechodzącej przez dany punkt otrzymujemy równanie $y - 3 = 3(x - 4)$. 

Zatem równanie prostej zawierającą wysokość poprowadzoną z wierzchołka A to $y = 3x - 9$. 

Ponieważ prosta zawierająca wysokość poprowadzoną z wierzchołka A jest prostopadła do boku BC , więc jej współczynnik kierunkowy jest równy 3. 

Ćwiczenie 2



Wyznacz równania prostych zawierających wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (4; 3)$, $B = (1; -4)$, $C = (-5; -2)$ poprowadzonych z wierzchołków B i C .

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3; 0)$, $B = (-2; 4)$, $C = (6; 2)$. Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC to	Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3; 0)$, $B = (-3; 3)$, $C = (3; 0)$. Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC to	Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1; 2)$, $B = (-2; 4)$, $C = (4; 2)$. Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC to	Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1; 2)$, $B = (-2; 4)$, $C = (4; 2)$. Równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC to
$y = 4x + 12$ ☐	$x = -3$ ☐	$y = 2x$ ☐	$y = -x + 1$ ☐
$y = -4,5x + 29$ ☐	$y = 0$ ☐	$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ ☐	$x = -2$ ☐
$y = -0,25x + 3,5$ ☐	$y = 2x + 5$ ☐	$y = 3x + 5$ ☐	$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{16}$ ☐

Ćwiczenie 5



Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-5; 2)$, $B = (1; 4)$, $C = (1; -2)$. Wyznacz współrzędne ortocentrum tego trójkąta. Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Zatem współczynnik kierunkowy szukanej prostej to -3 .



Równanie szukanej prostej to $y - (-2) = -3(x - 1)$, czyli $y = -3x + 1$.



Aby wyznaczyć równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C , potrzebny nam będzie współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$\frac{4 - 2}{1 - (-5)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$



Z powyższego układu wynika równanie $2 = -3x + 1$, którego rozwiązaniem jest $x = -\frac{1}{3}$.



Zacniemy od wyznaczenia równań prostych zawierających wysokości poprowadzone z wierzchołków A i C (w tej kolejności).



Aby wyznaczyć współrzędne ortocentrum trójkąta ABC , wystarczy rozwiązać układ równań $\begin{cases} y = 2 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$.



Łatwo zauważyć, że równanie prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka A to $y = 2$.



Zatem współrzędne ortocentrum są równe $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.



Ćwiczenie 6



Wyznacz ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-4; 2)$, $B = (2; 5)$, $C = (0; -1)$.

Ćwiczenie 7



Rozwiąż test.

Ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-4; 4),$ $B = (-6; 1),$ $C = (0; -3)$ ma współrzędne	Ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-1; 3),$ $B = (4; 1),$ $C = (-1; -4)$ ma współrzędne	Ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-2; 2),$ $B = (4; 0),$ $C = (-1; -5)$ ma współrzędne	Ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-3; 1),$ $B = (3; 3),$ $C = (-1; 0)$ ma współrzędne
$(-4; 4)$ ☐	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ☐	$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ☐	$(0; -3)$ ☐
$(-6; 1)$ ☐	$(1; 1)$ ☐	$\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ ☐	$(0; -4)$ ☐

Ćwiczenie 8



Punkty $A = (-1; 2)$ i $C = (2; 28)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego, w którym $|AC| = |BC|$. Prosta zawierająca wysokość opuszczoną z wierzchołka C ma równanie $2y + x = 58$. Oblicz pole trójkąta ABC . Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Zatem pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 22\sqrt{5} = 220$.

Korzystając ze wzoru na długość odcinka, otrzymujemy
 $|CD| = \sqrt{(10 - 2)^2 + (24 - 28)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka C przekształćmy do postaci kierunkowej $y = -\frac{1}{2}x + 29$. Równanie prostej AB możemy wyznaczyć, korzystając z zależności między prostymi prostopadłymi.

Współrzędne tego punktu możemy obliczyć, rozwiązując układ równań: prostej AB i prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka C .

Ponadto przechodzi ona przez punkt A , więc jej równanie to $y - 2 = 2(x + 1)$, czyli $y = 2x + 4$.

Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny, więc
 $|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{(10 - (-1))^2 + (24 - 2)^2} = 2\sqrt{11^2 + 22^2} = 22\sqrt{5}$.

Rozwiązaniem powyższego układu jest para liczb $x = 10$ i $y = 24$.

Zatem współrzędne punktu D możemy otrzymać, rozwiązując układ
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 29 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$
.

Zacniemy od wyznaczenia współrzędnych punktu D będącego spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C .

Możemy teraz wyznaczyć $|CD|$ i $|AB|$ (w tej kolejności).

Zatem współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy 2.



Zatem współrzędne punktu D są równe $(10; 24)$.



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wysokości w trójkącie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Wyznaczysz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta.
- Zastosujesz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ćwiczeń przedmiotowych;
- z użyciem komputera;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Aplet” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Aplet”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Równanie wysokości w trójkącie” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji: Równanie wysokości w trójkącie. Następnie prosi, by uczniowie pracowali w parach i opracowali swoje mapy myśli związane z tematem. Wybrana osoba z danej pary przedstawia swoje propozycje, ochotnik zapisuje je propozycje na tablicy. Pozostali uczniowie odnoszą się do tych sugestii, uzupełniając je o swoje propozycje

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 3, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką
2. Praca indywidualna – implementacja poznanej techniki do rozwiązywania problemów informatycznych – wykonywanie ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.
2. W jaki inny sposób możesz napisać wypracowanie na zadany temat? Zaproponuj alternatywną wersję wypracowania

Materiały pomocnicze:

[Trójkąty i ich własności](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie wysokości w trójkącie”.