


## Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny

Źródło: dostępny w internecie: [Free-Photos z Pixabay](#), domena publiczna.

Wyobraźmy sobie, że w czworościanie  $ABCD$  wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku  $A$  są proste. Mamy wykazać, że rzut prostokątny wierzchołka  $A$  na płaszczyznę  $BCD$  jest ortocentrum trójkąta  $BCD$ . W tym materiale zaprezentujemy twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny, dzięki któremu można przeprowadzić dowód powyższego twierdzenia.

Część materiału wykracza poza podstawę programową, ale jest jej ciekawym uzupełnieniem.

### Twoje cele

- Sformułujesz twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny.
- Zastosujesz je w najprostszycy sytuacjach geometrycznych.

# Przeczytaj

---

Rozpocznijmy od podania następującej definicji.

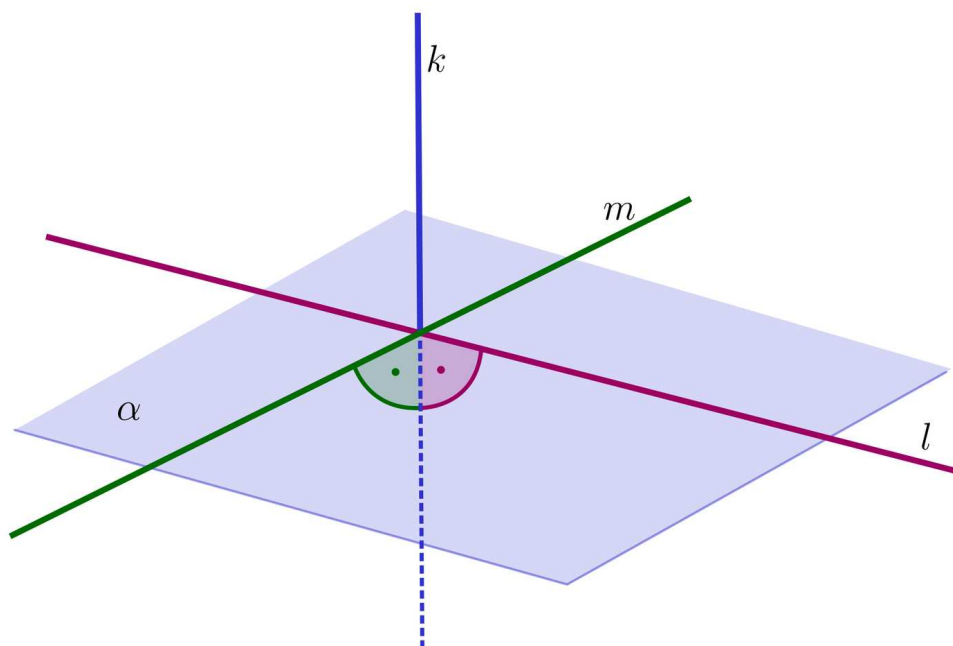
## Definicja: prosta prostopadła do płaszczyzny

Mówimy, że **prosta  $k$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$**  (co zapisujemy symbolicznie w postaci  $k \perp \alpha$ ), jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$ .

Prawdziwe jest następujące **twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny**.

## Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny

Prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.



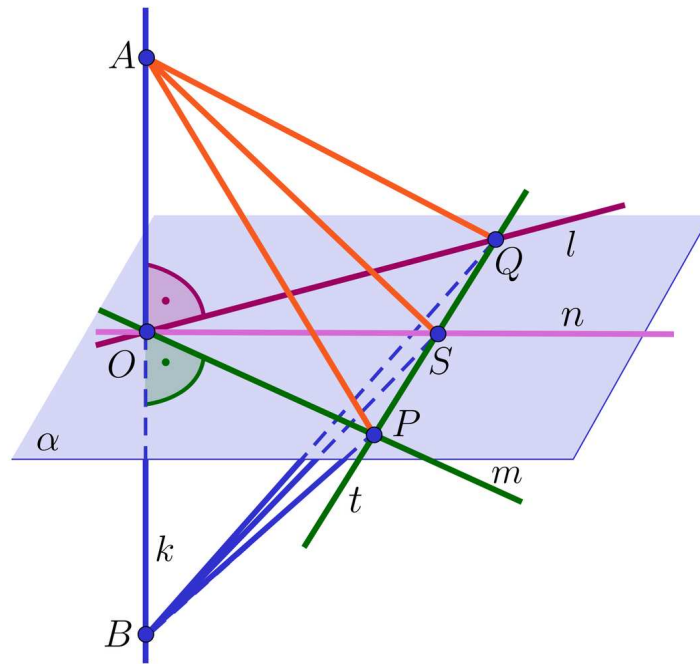
## Dowód

---

Skoro prosta  $k$  jest prostopadła do prostych  $m$  i  $l$ , to jest również prostopadła do każdej prostej równoległej do którejś z tych prostych.

Wystarczy zatem wykazać, że prosta  $k$  jest prostopadła do dowolnej prostej przechodzącej przez punkt  $O$  przecięcia prostych  $m$  i  $l$ . Oznaczmy tę prostą przez  $n$ .

Poprowadźmy również prostą  $t$  przecinającą proste  $m$ ,  $l$  i  $n$  odpowiednio w punktach  $P$ ,  $Q$  i  $S$ . Na prostej  $k$  obierzmy punkty  $A$  i  $B$ , aby punkt  $O$  był środkiem odcinka  $AB$ .



Zauważmy, że proste  $m$  i  $l$  są symetralnymi odcinka  $AB$ . Zatem:  $|PA| = |PB|$  oraz  $|QA| = |QB|$ . Stąd  $\triangle PAQ \equiv \triangle PBQ$  (cecha  $bbb$ ). To daje:  $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle BPQ|$ .

Z równości wskazanych odcinków i kątów wynika, że  $\triangle APS \equiv \triangle BPS$  (cecha  $bkb$ ). Zatem  $|SA| = |SB|$ , czyli punkt  $S$  leży na symetralnej  $n$  odcinka  $AB$ .

Ostatecznie  $k \perp n$ , co kończy dowód.

### Wniosek 1

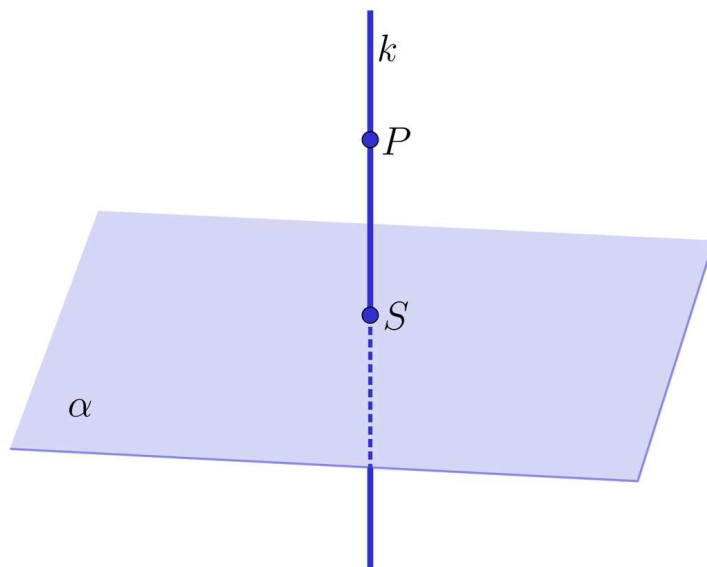
Niech  $A$  będzie punktem wspólnym prostej  $k$  i płaszczyzny  $\alpha$ .

Aby stwierdzić, że **prosta  $k$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$** , wystarczy wskazać dwie proste leżące na tej płaszczyźnie i przechodzące przez punkt  $A$ , do których prosta  $k$  jest prostopadła.

#### Definicja: rzut prostokątny punktu

Rzutem prostokątnym punktu  $P$  na płaszczyznę  $\alpha$  nazywamy punkt  $S$ , w którym prosta  $k$  przechodząca przez punkt  $P$  i prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$  przecina tę płaszczyznę.

Długość odcinka  $PS$  jest odległością punktu  $P$  od płaszczyzny  $\alpha$ .



### Definicja: rzut prostokątny figury

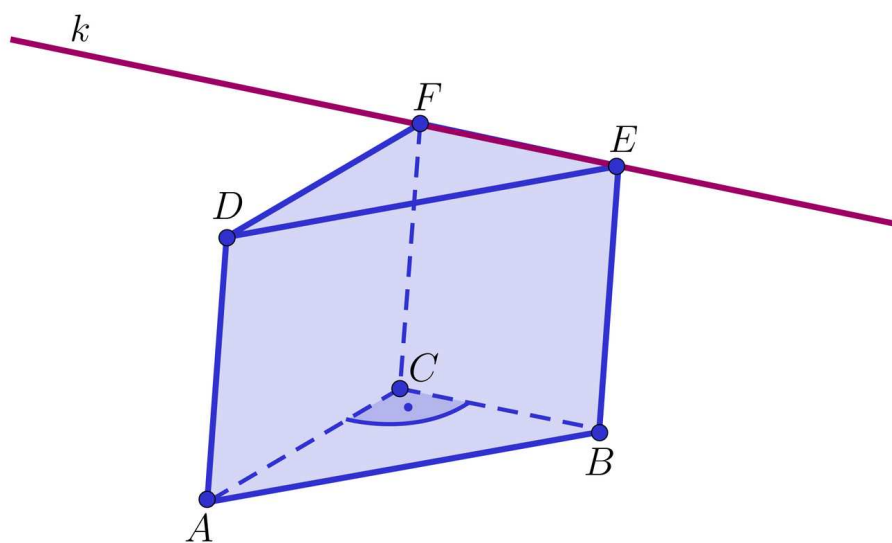
Rzudem prostokątnym figury  $F$  na płaszczyznę nazywamy figurę wyznaczoną przez **rzuty prostokątne wszystkich punktów** należących do tej figury.

### Definicja: punkt symetryczny do punktu A

Punktem symetrycznym do punktu  $A$  względem płaszczyzny  $\alpha$  nazywamy punkt  $A'$  taki, że punkty  $A$  i  $A'$  leżą na prostej prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , w równych odległościach od płaszczyzny  $\alpha$  i po jej przeciwnych stronach.

### Przykład 1

Rozważmy graniastosłup prosty  $ABCDEF$ , którego podstawą jest trójkąt prostokątny  $ABC$ .



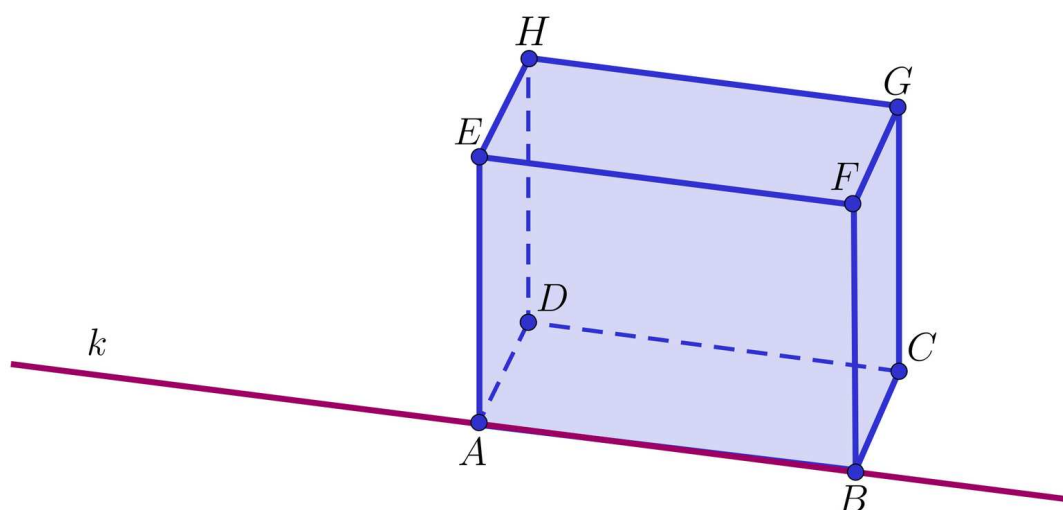
Uzasadnimy, że prosta  $k$  przechodząca przez punkty  $E$  i  $F$  jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę  $ACFD$ .

### Rozwiązanie

Prosta  $k$  jest prostopadła do dwóch prostych  $DF$  i  $FC$  przecinających się w punkcie  $F$ . Zatem na mocy twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny otrzymujemy, że prosta  $k$  przechodząca przez punkty  $E$  i  $F$  jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę  $ACFD$ .

### Przykład 2

Rozważmy prostopadłościan  $ABCDEFGH$ .



Uzasadnimy, że prosta  $k$  przechodząca przez punkty  $A$  i  $B$  jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę  $BCGF$ .

### Rozwiązanie

Prosta  $k$  jest prostopadła do dwóch prostych  $BC$  i  $BF$  przecinających się w punkcie  $B$ . Zatem na mocy twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny otrzymujemy, że prosta  $k$  przechodząca przez punkty  $A$  i  $B$  jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę  $BCGF$ .

Poniższy materiał wykracza poza wymagania podstawy programowej, ale jest ciekawym uzupełnieniem tej tematyki o ujęcie analityczne.

### Twierdzenie: o równaniu prostej

a) Prosta  $p$  w przestrzeni przechodząca przez punkt  $M(x_0, y_0, z_0)$  i równoległa do wektora  $\vec{a} = [l, m, n]$  (zwanego jej wektorem kierunkowym) może być przedstawiona

w postaci parametrycznej:

$$p : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + ht \end{cases}$$

$t$  nazywamy parametrem w równaniu prostej.

Równanie to może mieć postać  $X = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (l, m, n)$ ,

lub, jeżeli  $l, m, n \neq 0$ , może być wyznaczone przez równania kanoniczne (równania kierunkowe):

$$p : \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

b) Przedstawienie parametryczne prostej  $p$  w przestrzeni przechodzącej przez dwa dane punkty  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  jest postaci:

$$p : \begin{cases} x - x_1 = t \cdot (x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t \cdot (y_2 - y_1), t \in \mathbb{R} \\ z - z_1 = t \cdot (z_2 - z_1) \end{cases}$$

natomiast równania kanoniczne (kierunkowe) tej prostej są postaci:

$$p : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

### Twierdzenie: o ogólnym układzie współrzędnych kartezjańskich

a) W ogólnym układzie współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni każda płaszczyzna  $\alpha$  określona jest równaniem postaci:

$$Ax + By + Cz = 0,$$

gdzie liczby rzeczywiste  $A, B, C$  nie zerują się jednocześnie (tzn.  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ ).

I na odwrót, każde takie równanie określa płaszczyznę i nazywa się jej równaniem ogólnym.

Wektor  $\vec{v} = [A, B, C]$  nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny  $\alpha$

Wektor normalny  $\vec{v}$  jest prostopadły do płaszczyzny  $\alpha$ .

b) Równanie płaszczyzny  $\alpha$  przechodzącej przez trzy punkty  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  nie leżące na jednej prostej ma postać parametryczną.

$$\alpha : \begin{cases} x = x_1 + u \cdot (x_2 - x_1) + v \cdot (x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u \cdot (y_2 - y_1) + v \cdot (y_3 - y_1), t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + u \cdot (z_2 - z_1) + v \cdot (z_3 - z_1) \end{cases}$$

( $u, v$  są parametrami, w tym równaniu płaszczyzny)

### Twierdzenie: o równoległości płaszczyzn

a) Na to, aby dwie płaszczyzny  $\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\beta :$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  były równoległe potrzeba i wystarcza, aby odpowiednie współczynniki przy  $x, y, z$  były proporcjonalne:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda \cdot A_1 \\ B_2 = \lambda \cdot B_1, \text{ przy czym } D_2 \neq \lambda \cdot D_1 \\ C_2 = \lambda \cdot C_1 \end{cases}$$

b) Na to, aby dwie płaszczyzny  $\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\beta :$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  pokrywały się potrzeba i wystarcza, aby odpowiednie współczynniki ich równań ogólnych były proporcjonalne, tzn.

$$\begin{cases} A_2 = \lambda \cdot A_1 \\ B_2 = \lambda \cdot B_1 \\ C_2 = \lambda \cdot C_1 \\ D_2 = \lambda \cdot D_1 \end{cases}, \text{ gdzie } \lambda \neq 0$$

czyli  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \equiv \lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)$ , gdzie  $\lambda \neq 0$  (tożsamość ze względu na  $x, y, z$ ).

### Twierdzenie: o przecinaniu się płaszczyzn nierównoległych do siebie

Każde dwie płaszczyzny nierównoległe do siebie w przestrzeni przecinają się wzdłuż prostej.

Prosta w przestrzeni może więc być przedstawiona przez podanie dowolnych dwóch różnych płaszczyzn przecinających się wzdłuż prostej.

Wypisując równania ogólne tych płaszczyzn otrzymujemy tzw. równanie krawędziowe prostej  $p$  w przestrzeni postaci:

$$p : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

### Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny w kartezjańskim układzie współrzędnych

Niech  $p$  będzie prostą w przestrzeni równoległą do wektora  $\vec{a} = [l, m, n]$ .

Niech  $Ax + By + Cz + D = 0$  będzie równaniem ogólnym płaszczyzny  $\alpha$ .

Na to, aby prosta  $p$  była prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$  (w kartezjańskim układzie współrzędnych w przestrzeni) potrzeba i wystarcza, aby:

$$\begin{cases} A = \lambda \cdot l \\ B = \lambda \cdot m, \text{ gdzie } \lambda \neq 0 \\ C = \lambda \cdot n \end{cases}$$

### Przykład 3

Wyznamy równania rzutu prostej

$$p : \begin{cases} 2x + y - 2z + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

na płaszczyznę  $O_{xz}$

### Rozwiązanie

Wyznamy najpierw równanie parametryczne prostej  $p$ .

Z treści zadania mamy, że równanie krawędziowe prostej  $p$  jest postaci:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Niech  $x = t$ .

Wtedy dostajemy:

$$\begin{cases} 2t + y - z + 4 = 0 \\ t + y = 0 \end{cases}$$

$$y = (-t)$$

Dalej mamy:

$$2t - t - z + 4 = 0$$

$$t - z + 4 = 0$$

$$z = t + 4$$

Dlatego równanie parametryczne prostej  $p$  jest postaci:

$$p : \begin{cases} x = t \\ y = (-t), t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Płaszczyzna  $O_{xz}$  jest opisana równaniem ogólnym  $y = 0$ .

Rzutem prostej  $p$  na płaszczyźnie  $O_{xz}$  jest prosta leżąca w tej płaszczyźnie, tzn. spełniającej warunek  $y = 0$ .

Dlatego równanie parametryczne tego rzutu jest postaci:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$$

#### Przykład 4

Napiżemy równania prostej  $p$  przechodzącej przez punkt  $M(x_0, y_0, z_0)$  i prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ .

#### Rozwiązanie

Wektorem normalnym płaszczyzny  $\alpha$  jest  $\vec{v} = [A, B, C]$

Niech  $p$  będzie szukaną prostą w przestrzeni równoległą do wektora  $\vec{a} = [l, m, n]$ .

Wtedy na mocy twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny w kartezjańskim układzie współrzędnych dostajemy, że prosta  $p$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} A = \lambda \cdot l \\ B = \lambda \cdot m, \text{ gdzie } \lambda \neq 0 \\ C = \lambda \cdot n \end{cases}$$

Przyjmijmy  $\lambda = 1$

Wtedy:

$$\begin{cases} l = A \\ m = B \\ n = C \end{cases}$$

Czyli  $\vec{a} = \vec{v} = [A, B, C]$

Dlatego równanie parametryczne prostej  $p$  jest postaci

$$p : \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + Ct \end{cases}$$

## Słownik

### **prosta prostopadła do płaszczyzny**

prosta prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie

### **twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny**

jeżeli prosta  $k$  jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych  $l$  i  $n$ , to prosta  $k$  jest prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  wyznaczonej przez te proste

### **rzut prostokątny punktu na płaszczyznę**

rzutem prostokątnym punktu  $P$  na płaszczyznę nazywamy punkt przecięcia tej płaszczyzny z prostą przechodzącą przez punkt  $P$  i prostopadłą do tej płaszczyzny

# Aplet

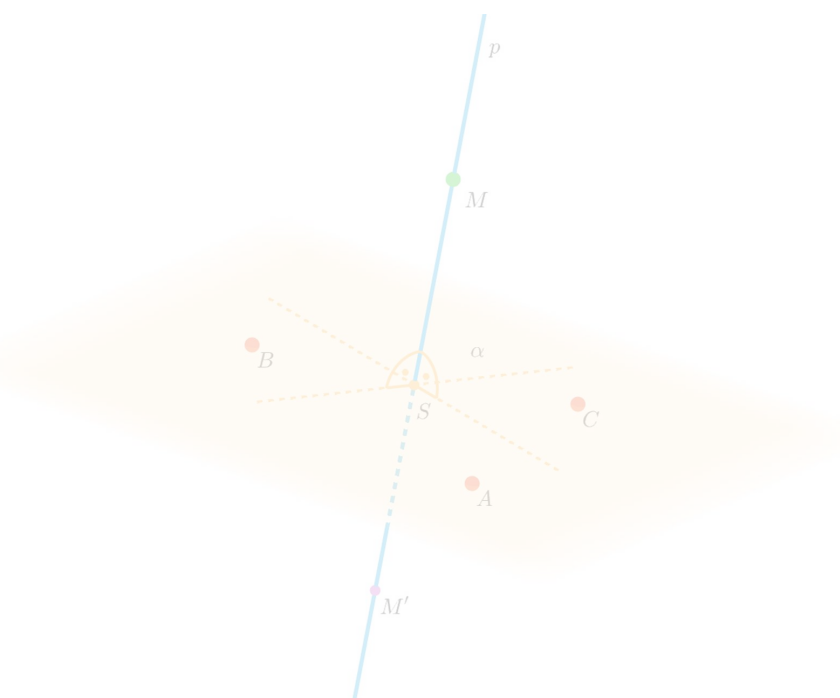
## Polecenie 1

Aplet pozwala wyznaczyć:

- prostą  $p$  przechodzącą przez punkt  $M$  i prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$
- rzut prostokątny  $S$  punktu  $M$  na płaszczyznę  $\alpha$
- punkt symetryczny  $M'$  do punktu  $M$  względem płaszczyzny  $\alpha$

Zmieniaj położenie punktu  $M$  (przez który przechodzi szukana prosta  $p$ ) oraz punktów  $A, B, C$  wyznaczających płaszczyznę  $\alpha$  (pamiętaj, że punkty  $A, B, C$  nie mogą leżeć na jednej prostej) i obserwuj, jak zmienia się:

- położenie rzutu  $S$
- położenie punktu symetrycznego  $M'$






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcKUKYZYZ>

## Polecenie 2

Rozwiąż test. Możesz wykorzystać aplet. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

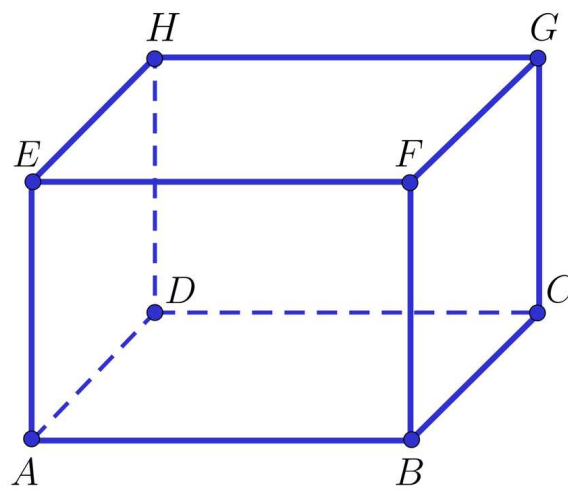
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Rozważmy prostopadłościan  $ABCDEFGH$ .



## Ćwiczenie 2



Prosta  $k$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $X$ .

Punkt  $Y$  należy do prostej  $k$ , a punkt  $Y'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $Y$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

Oblicz długość odcinka  $XY$ , jeżeli wiadomo, że  $|XY'| = 20$  i  $|YY'| = 16$

### Ćwiczenie 3



Prosta  $k$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $A$ .

Punkt  $B$  należy do prostej  $k$ .

Zakładając, że podane są:

- długość odcinka  $|AB|$
- odległość punktu  $B$  od płaszczyzny  $\alpha$

Oblicz długość odcinka będącego rzutem prostokątnym odcinka  $AB$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

### Ćwiczenie 4



Rozważmy trójkąt  $XYZ$  taki, że  $|XY| = a$ ,  $|YZ| = b$ ,  $|XZ| = c$ .

Punkty  $X$  i  $Y$  należą do płaszczyzny  $\alpha$ , a punkt  $Z$  jest oddalony od płaszczyzny  $\alpha$  o  $d$ .

Wyznacz długości boków trójkąta, który jest rzutem prostokątnym trójkąta  $XYZ$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

### Ćwiczenie 5



Prosta  $k$  przebija płaszczyznę  $\alpha$  w punkcie  $A$  i jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem  $\varphi = 30^\circ$ .

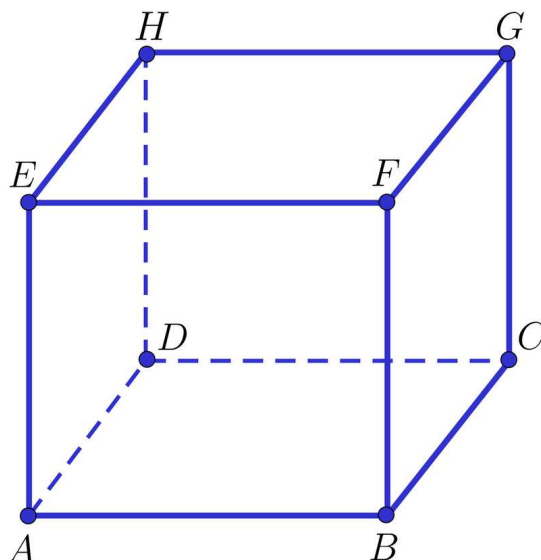
Punkt  $B$  należy do prostej  $k$  oraz  $|AB| = 18$ .

Oblicz długości odcinków  $AC$  i  $BC$ , gdzie  $C$  jest rzutem prostokątnym punktu  $B$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

### Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiono prostopadłościan  $ABCDEFGH$ .



### Ćwiczenie 7



Rzutem punktu  $A = (1, 2, 3)$  na pewną płaszczyznę  $\alpha$  jest punkt  $B = (5, 6, 7)$ .

Wyznacz współrzędne punktu  $A'$  symetrycznego do punktu  $A$  względem płaszczyzny  $\alpha$ .

### Ćwiczenie 8



Punktem symetrycznym do punktu  $A = (1, 0, -2)$  względem pewnej płaszczyzny  $\alpha$  jest punkt  $A' = (-3, 4, 6)$ .

Wyznacz współrzędne rzutu prostokątnego  $B$  punktu  $A$  na płaszczyznę  $\alpha$ .

### Ćwiczenie 9



Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $M(3, -2, 4)$  i prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha : 5x + 3y - 7z + 1 = 0$ .

### Ćwiczenie 10

Wyznacz rzut punktu  $M(1, 2, -3)$  na płaszczyznę  $\alpha : 6x - y + 3z - 41 = 0$ .

## Ćwiczenie 11



Wyznacz punkt symetryczny do punktu  $M(2, 7, 1)$  względem płaszczyzny

$$\alpha : x - 4y + z + 7 = 0.$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Mariusz Plaszczyk

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- formułuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny,
- stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny w najprostszych sytuacjach geometrycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;

- metoda tekstu przewodniego;
- liga zadaniowa.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Uczniowie zapoznają się z apletem, nauczyciel omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem. Uczniowie rozwiązują test.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-6 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 7-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia 9-11 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Proste i odcinki prostopadłe i równoległe
- Proste równoległe, proste prostopadłe

**Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą wykorzystać aplet do pracy przed lekcją. Zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc pracować samodzielnie. Nauczyciel może wykorzystać aplet na lekcji, na której będzie omawiana odległość punktu od płaszczyzny, rzut prostokątny na płaszczyznę.