



Co to znaczy, że ciąg jest rozbieżny?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W ciągu dotychczasowej nauki dowiedziałeś się, co to jest ciąg zbieżny, czyli ciąg posiadający granicę liczbową. Na tej lekcji przyjrzymy się ciągom, które nie posiadają granicy liczbowej; są to ciągi rozbieżne. Szczególnie interesować nas będą ciągi, których granicą jest $+\infty$ lub $-\infty$. Takie ciągi będziemy nazywali ciągami rozbieżnymi do nieskończoności.

Twoje cele

- Poznasz definicję granicy ciągu rozbieżnego.
- Poznasz przykłady ciągów rozbieżnych do $+\infty$ lub $-\infty$.

Przeczytaj

Najpierw przeczytaj w słowniku, co znaczą symbole: $\forall$ i $\exists$.

Przypomnijmy definicję granicy ciągu:

Definicja: ciągu zbieżnego

Niech g będzie liczbą rzeczywistą. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - g| < \varepsilon.$$

Definicję możemy przeczytać następująco:

Granica ciągu x_n jest liczbą rzeczywistą g wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby dodatniej ε można dobrać taką liczbę naturalną N , że dla dowolnej liczby n większej od N zachodzi nierówność: $|x_n - g| < \varepsilon$.

Można też powiedzieć następująco: w dowolnym otoczeniu liczby g znajdują się **prawie wszystkie wyrazy ciągu** x_n .

Czy każdy ciąg ma granicę?

Otóż nie. Podamy teraz przykład ciągu, który nie ma granicy.

Przykład 1

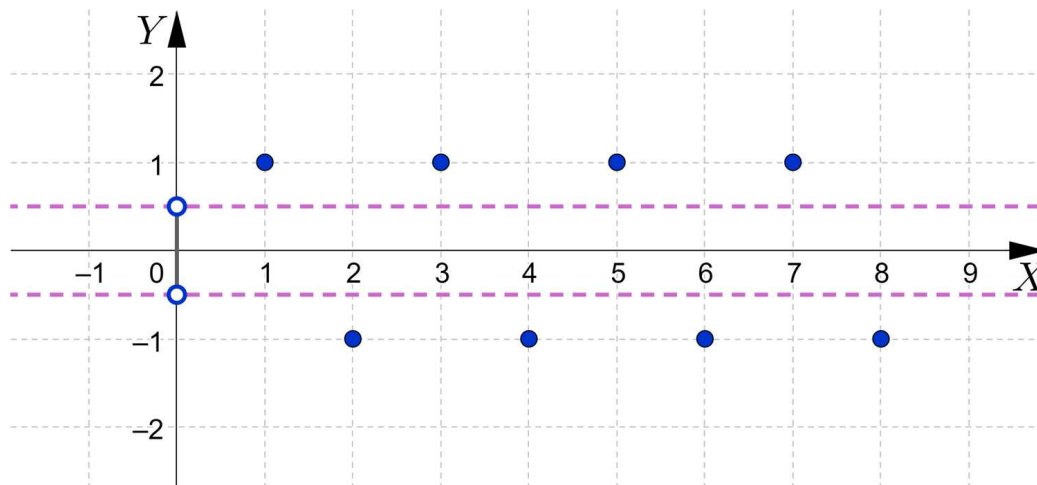
Niech dany będzie ciąg: $x_n = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ to liczba parzysta} \\ -1, & \text{gdy } n \text{ to liczba nieparzysta} \end{cases}$

Uzasadnimy, że żadna liczba rzeczywista nie może być granicą tego ciągu.

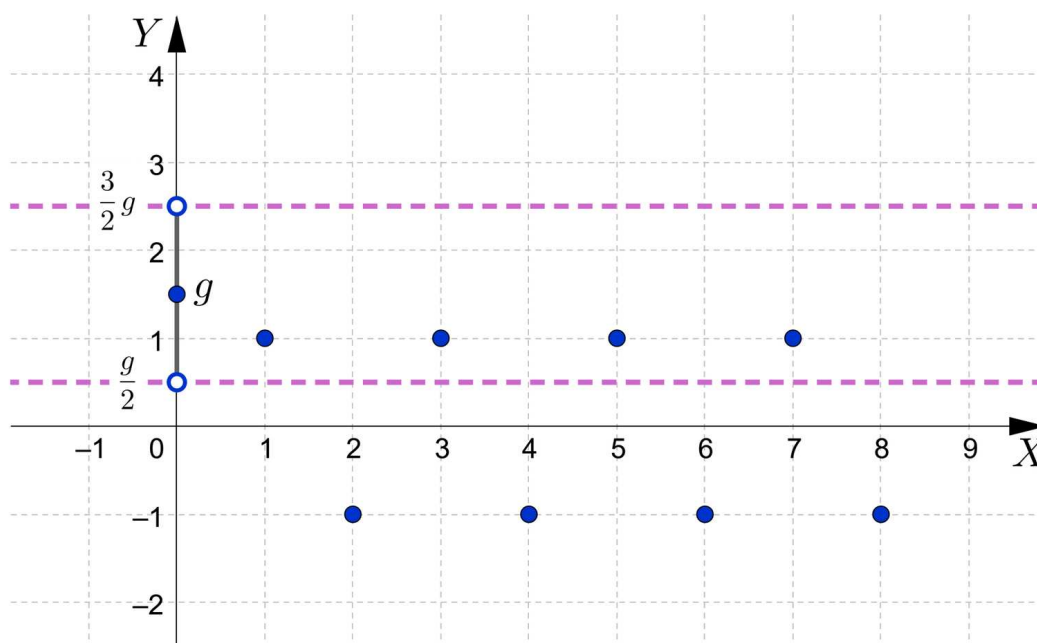
Zauważmy, że co drugi wyraz tego ciągu jest równy 1, a co drugi jest równy (-1) .

Gdyby 0 było granicą, to zgodnie z definicją np. w przedziale $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, który jest otoczeniem zera, powinny się znajdować prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) .

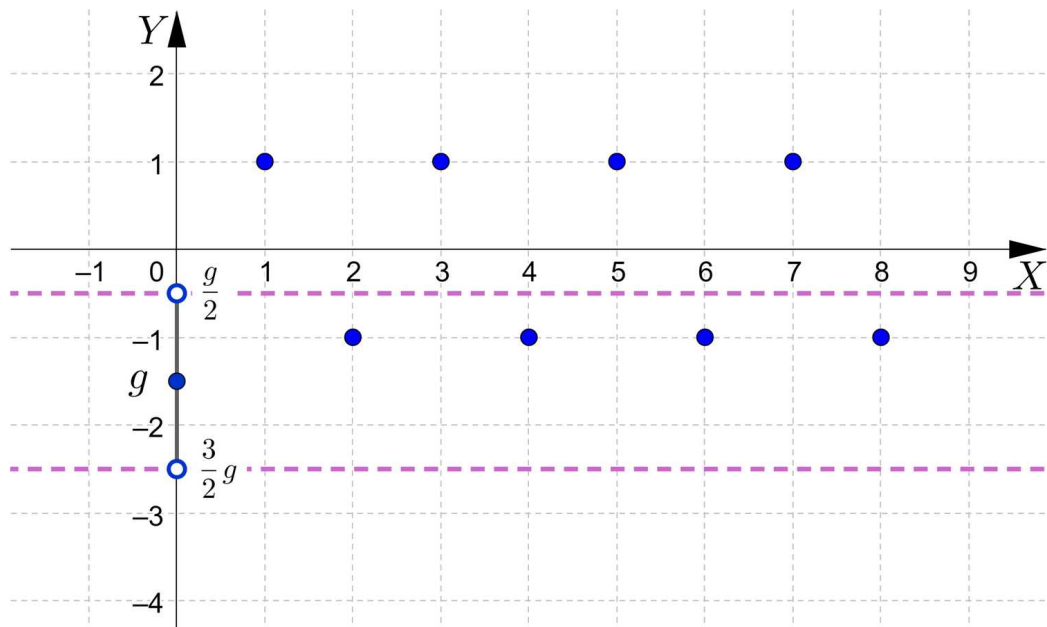
Tymczasem żaden wyraz ciągu (x_n) nie należy do tego przedziału. Zatem 0 nie jest granicą ciągu (x_n) .



Gdyby dodatnia liczba g była granicą, to np. w przedziale $\left(\frac{g}{2}, \frac{3g}{2}\right)$, który jest otoczeniem g , powinny się znajdować prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) . Tymczasem nieskończenie wiele wyrazów równych (-1) jest poza tym przedziałem, gdyż $\frac{g}{2} > 0$. Zatem $g > 0$ nie jest granicą ciągu (x_n) .



Gdyby ujemna liczba g była granicą, to np. w przedziale $\left(\frac{3g}{2}, \frac{g}{2}\right)$, który jest otoczeniem g , powinny się znajdować prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) . Tymczasem nieskończenie wiele wyrazów równych 1 jest poza tym przedziałem, gdyż $\frac{g}{2} < 0$. Zatem $g < 0$ nie jest granicą ciągu (x_n) .



Stąd wynika, że ciąg (x_n) nie posiada granicy liczbowej, czyli nie jest zbieżny. Taki ciąg będziemy nazywali ciągiem rozbieżnym.

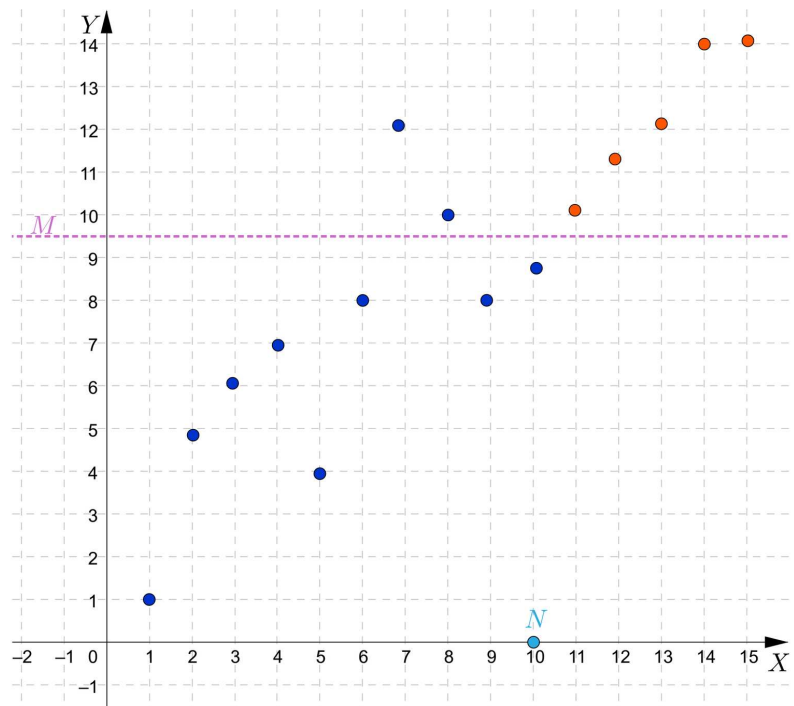
W tym materiale zajmiemy się szczególnym typem ciągów, które nie są zbieżne.

Zajmiemy się szczególnie ciągami, których granicą jest $+\infty$ lub $-\infty$. Takie ciągi nazwiemy, odpowiednio, ciągami rozbieżnymi do $+\infty$ lub $-\infty$.

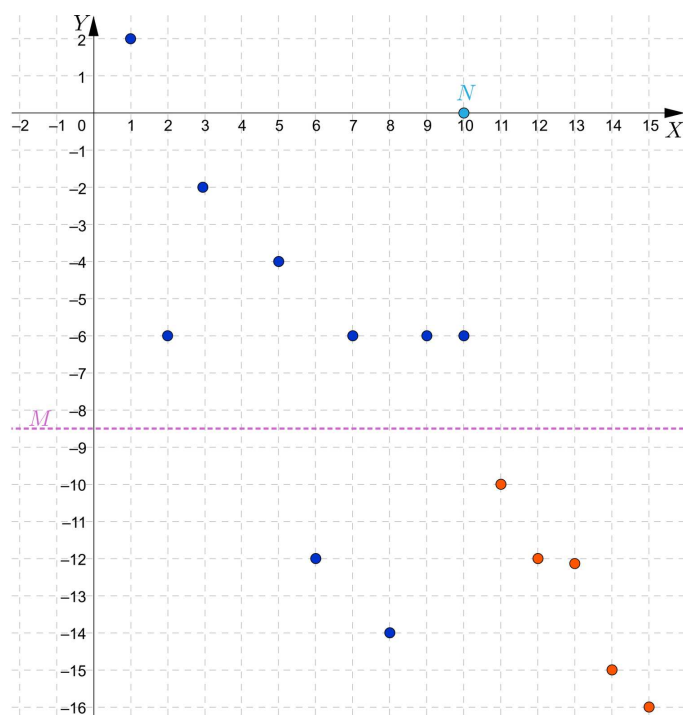
Podajmy zatem definicję ciągu rozbieżnego do $+\infty$ oraz $-\infty$. Będzie ona w swojej strukturze podobna do definicji granicy ciągu zbieżnego.

Definicja: ciągu rozbieżnego do nieskończoności

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ x_n > M$.



$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ x_n < M$.



Uwaga!

Możemy definicję ciągu rozbieżnego do $+\infty$ wypowiedzieć także w ten sposób: dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M . Mówiąc jeszcze inaczej: dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do przedziału $(M, +\infty)$.

Analogicznie:

Możemy definicję ciągu rozbieżnego do $-\infty$ wypowiedzieć także w ten sposób: dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M . Mówiąc jeszcze inaczej: dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu należą do przedziału $(-\infty, M)$.

Przykład 2

Udowodnimy, że ciąg $x_n = n$ jest ciągiem rozbieżnym do $+\infty$.

Dowód

Wyberzmy dowolną liczbę rzeczywistą M . Dla jakich wartości n , zachodzi nierówność $x_n > M$, czyli nierówność $n > M$?

Jeżeli $M \leq 0$, to nierówność $n > M$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n , czyli możemy przyjąć, że $N = 0$, gdyż dla $n > 0$ zachodzi nierówność $n > M$.

Jeżeli $M > 0$, to nierówność $n > M$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n > M$, czyli możemy przyjąć, że $N = M$, gdyż dla $n > N = M$ zachodzi nierówność $n > M$.

Zatem dla dowolnej wartości M dobraliśmy takie N , że dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność: $x_n = n > M$, a to oznacza, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Przykład 3

Udowodnimy, że ciąg $x_n = -n^2$ jest ciągiem rozbieżnym do $-\infty$.

Dowód

Wyberzmy dowolną liczbę rzeczywistą M . Dla jakich wartości n , zachodzi nierówność $x_n < M$, czyli nierówność $-n^2 < M$?

Jeżeli $M > 0$, to nierówność $-n^2 < M$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n , czyli możemy przyjąć, że $N = 0$, gdyż dla $n > 1$ zachodzi nierówność $-n^2 < M$.

Jeżeli $M \leq 0$, to nierówność $-n^2 < M$ zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n > \sqrt{-M}$, czyli możemy przyjąć, że $N = \left[\sqrt{-M} \right]$ (jest częścią całkowitą z $\sqrt{-M}$), gdyż dla $n > \left[\sqrt{-M} \right]$ zachodzi nierówność $-n^2 < M$.

Zatem dla dowolnej wartości M dobraliśmy takie N , że dla dowolnej liczby $n > N$ zachodzi nierówność: $-n^2 < M$, co oznacza, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$.

Przykład 4

Udowodnimy, że ciąg $x_n = n^2 - 3n$ jest ciągiem rozbieżnym do $+\infty$.

Dowód

Najpierw zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 3$ zachodzi nierówność:
 $n^2 - 3n \geq n$.

Jest tak dlatego, gdyż nierówność $n^2 - 3n \geq n$ jest równoważna nierówności
 $n(n - 4) \geq 0$, która zachodzi dla każdej liczby naturalnej n większej od 3.

Mamy udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba naturalna N , że dla dowolnej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi nierówność $x_n > M$.

Jeżeli $M \leq 0$, to nierówności $n^2 - 3n \geq n > M$ zachodzą dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych $n > 3$, czyli możemy przyjąć, że $N = 3$.

Jeżeli $M > 0$, to nierówności $n^2 - 3n \geq n > M$ zachodzą dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n spełniających dwa warunki: $n > 3$ i $n > M$, czyli możemy przyjąć, że $N = \max(4, M)$.

Zatem dla dowolnej wartości M dobraliśmy takie N , że dla dowolnej liczby $n > N$ zachodzi nierówność: $n^2 - 3n > M$, a to oznacza, że ciąg $x_n = n^2 - 3n$ jest ciągiem rozbieżnym do $+\infty$.

Uwaga!

Ostatni przykład pokazuje, jak prowadzimy dowód w przypadku bardziej skomplikowanych wzorów ciągów.

Taki ciąg (x_n) staramy się oszacować przez ciąg (y_n) o prostym wzorze, dla którego łatwiej sprawdzić, dla jakich wartości n spełniona jest nierówność $y_n > M$. Przy czym pilnujemy, aby nierówność $x_n > y_n$ zachodziła dla prawie wszystkich liczb naturalnych (czyli by zachodziła od pewnego argumentu).

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem skończonej liczby wyrazów

kwantyfikator ogólny

symbol ten czytamy: dla każdego

kwantyfikator szczegółowy

symbol ten czytamy: istnieje

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z infografiką. Na podstawie rozumowania w niej przedstawionego wykonaj polecenie następane.

Polecenie 2

Korzystając z definicji, uzasadnij, że ciąg $a_n = \frac{2n^2+2}{-n-1}$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż przedział, do którego należą prawie wszystkie wyrazy ciągu $a_n = 3n^3 - 2n^2$.

☐ $(-10^{10^{10}}, 10^{10^{10}})$

☐ $(-\infty, 10^{10^{10}})$

☐ $(10^{10^{10}}, +\infty)$

☐ $(1, 10^{10^{10}})$

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że granicą ciągu a_n jest $+\infty$. Do jakiego przedziału należą prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(1, 9999999999999999)$

☐ $(-\infty, 9999999999999999)$

☐ $(100\pi, +\infty)$

☐ $(10^{10^{10}}, +\infty)$

☐ $(-\infty, 2^{2^{2^{2^2}}})$

☐ $(-\infty, +\infty)$

☐ $(10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}})$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij definicję granicy ciągu rozbieżnego do minus nieskończoności. Uzupełnij luki podanymi wartościami.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n =$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{n > N}$

☐ $\forall_{M \in \mathbb{R}}$

☐ $\exists_{M \in \mathbb{R}}$

☐ $\exists_{n > N}$

☐ $\forall_{N \in \mathbb{N}}$

☐ $-\infty$

☐ $\exists_{N \in \mathbb{N}}$

☐ $+\infty$

☐ $x_n < M$

Ćwiczenie 4



Dany jest ciąg $a_n = 9n - n^2$. Wyznacz taką liczbę naturalną N , że dla każdej liczby naturalnej $n > N$, dla której zachodzi $a_n < 14$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 7

☐ 5

☐ 1

☐ 9

☐ 3

Ćwiczenie 5



Dany jest ciąg $a_n = n^2 - 14n$. Wyznacz taką liczbę naturalną N , że dla każdej liczby naturalnej $n > N$, dla której zachodzi $a_n > -45$. Zaznacz poprawne odpowiedzi.

☐ 3☐ 10☐ 8☐ 1☐ 14☐ 45☐ 9☐ 2☐ 4

Ćwiczenie 6



Dany jest ciąg $a_n = \frac{n^2+1}{n^2+19}$. Czy istnieje taka liczba naturalna N , że dla każdej liczby naturalnej $n > N$, dla której zachodzi $a_n > 99999$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ NIE☐ TAK

Ćwiczenie 7



Każdemu ciągowi przyporządkuj przedział, do którego należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

$(100, +\infty)$

$$a_n = n^2 - 2n^4 + 1$$

$$a_n = \frac{n^2-3}{n+3}$$

$$a_n = -\sqrt{n} + 17$$

$(-\infty, -1000)$

$$a_n = \frac{1-n^2}{n+7}$$

$$a_n = n^4 - 2n^2 + 1$$

$$a_n = \frac{1}{n^{10}}$$

$$a_n = \sqrt{n} + 7$$

$(-1000, 1000)$

$$a_n = \frac{n^2+100}{n^2+10}$$

Ćwiczenie 8



Każdy ciąg przyporządkuj do jego granicy. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

$+\infty$

$$a_n = 9 - \sqrt{n}$$

$$a_n = n^3 - 1000n^2$$

$$a_n = 7n^2 - n^3$$

$-\infty$

$$a_n = -n^3 + 3$$

$$a_n = n^3 - 3$$

$$a_n = \sqrt{n}$$

Dla nauczyciela

Autor: Karol Nowakowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to znaczy, że ciąg jest rozbieżny?

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje granicę ciągu rozbieżnego.
- podaje przykłady ciągów rozbieżnych do $+\infty$ lub $-\infty$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- liga zadaniowa;
- metoda tekstu przewodniego;

- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Co to znaczy, że ciąg jest rozbieżny?” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Infografika” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

[Ciągi – własności ciągów arytmetycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Co to znaczy, że ciąg jest rozbieżny?”.