



Pole kwadratu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kwadrat jest najbardziej regularnym czworokątem. Stykamy się z pojęciem kwadratu już na wczesnoszkolnym etapie nauczania i „wszyscy wiedzą”, że

pole kwadratu jest kwadratem długości boku kwadratu.

Warto jednak spytać, dlaczego tak właśnie wyznacza się pole kwadratu.

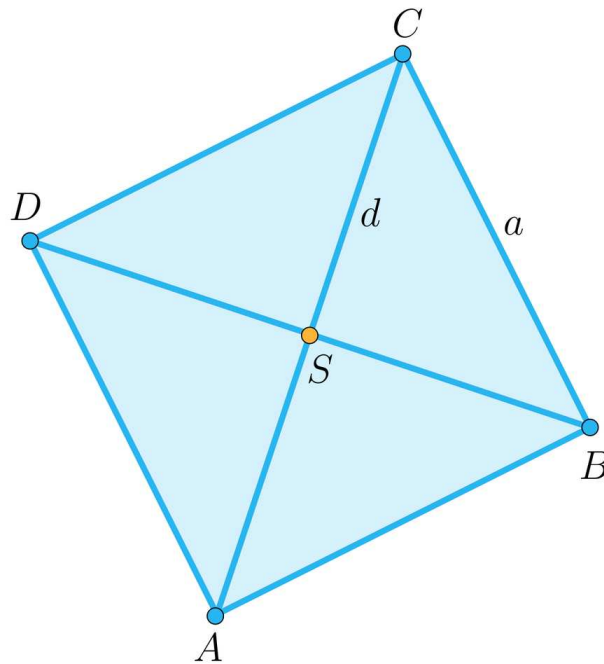
W tym materiale odpowiemy na to pytanie i przedstawimy inne sposoby wyznaczania pola kwadratu.

Twoje cele

- Zrozumiesz na czym polega problem mierzenia pól.
- Poznasz związki pola kwadratu z polami innych figur.
- Poznasz uzasadnienie, dlaczego pole kwadratu jest kwadratem jego boków.
- Poznasz związek pola kwadratu z jego przekątną.
- Będiesz liczył pola kwadratu, którego wierzchołki są punktami kratowymi.
- Zastosujesz pole kwadratu w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Kwadrat jest czworokątem, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste. Przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w połowie. W naszych rozważaniach będziemy stosowali oznaczenia przedstawione na rysunku.



Bok kwadratu $ABCD$ oznaczony jest symbolem a , który oznacza też długość tego boku. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych, d oznacza przekątną (i jej długość). Symbolem P oznaczamy pole kwadratu $ABCD$.

Na początek zajmiemy się problemem mierzenia. Problem mierzenia w starożytności był bardzo trudnym zadaniem, gdyż nie znano pojęcia liczb rzeczywistych, a co za tym idzie nie stosowano wzorów takich jak $P = a^2$. Problem zmierzenia pola figury sprowadzano do porównywania z figurami, których pole było znane.

Spróbujmy zastosować sposób myślenia starożytnych do wyznaczenia pola kwadratu. Przyjmujemy założenie, że pole kwadratu o boku długości równej jednej jednostce (czyli 1 j) jest równe 1 j^2 , czyli *jedna jednostka kwadratowa*. Pole to będziemy nazywali *polem jednostkowym* i będzie to wzorzec, do którego będziemy odnosić pozostałe wyliczenia.

Pokażemy, jak wyznaczać pole kwadratu w zależności od tego jaką liczbą jest długość boku kwadratu, począwszy od liczb naturalnych, potem odwrotności liczb naturalnych, następnie liczb wymiernych, by ostatecznie wyprowadzić wzór na pole kwadratu o boku długości rzeczywistej.

Dowody dotyczące pola figur opierają się na następujących własnościach pola.

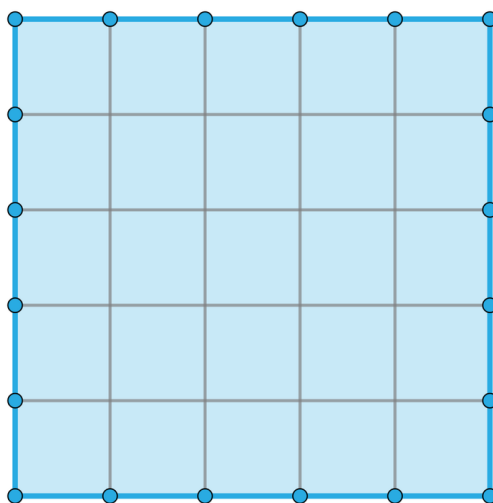
Własność: Własności pola

Niech P_F oznacza pole figury F . Wtedy:

1. figury przystające mają równe pola;
2. jeżeli figura F_1 jest zawarta w figurze F_2 to $P_{F_1} \leq P_{F_2}$;
3. jeżeli F_1, F_2 są rozłączne, to pole ich sumy jest równe sumie pól. Prawdziwa jest też ogólniejsza własność, że pole sumy figur jest równe sumie ich pól odjąć pole ich części wspólnej.

Pole kwadratu o boku długości n , gdzie n jest liczbą naturalną

Weźmy kwadrat o boku $a = n$ jednostek. Podzielmy dwa sąsiednie boki kwadratu na n równych odcinków. Zadanie to można wykonać konstrukcyjnie przy pomocy cyrkla i linijki bez podziałki. Łączymy punkty podziału boków odcinkami równoległymi do boków, tak jak na przykładowym rysunku dla $n = 5$.



Ponieważ odcinki poprowadzono równolegle do boków, to czworokąty otrzymane w ten sposób mają wszystkie kąty proste. Poza tym boki zostały podzielone na n równych odcinków to każdy z otrzymanych czworokątów ma wszystkie boki równe o długości 1 j. To oznacza, że kwadrat o boku n został podzielony na kwadraty o polu jednostkowym.

Do wyznaczenia pola P wystarczy policzyć, ile jest kwadratów jednostkowych.

Zauważamy, że w wyniku podziału jednego z boków kwadratu na n części otrzymujemy n rzędów, a w wyniku podziału drugiego boku na n równych części dostajemy n kwadratów jednostkowych w każdym rzędzie. Ostatecznie kwadrat został podzielony na $n \cdot n = n^2$

kwadratów jednostkowych, więc jego pole P jest sumą pól tych kwadratów i w efekcie $P = n^2$ jednostek kwadratowych.

Uwaga!

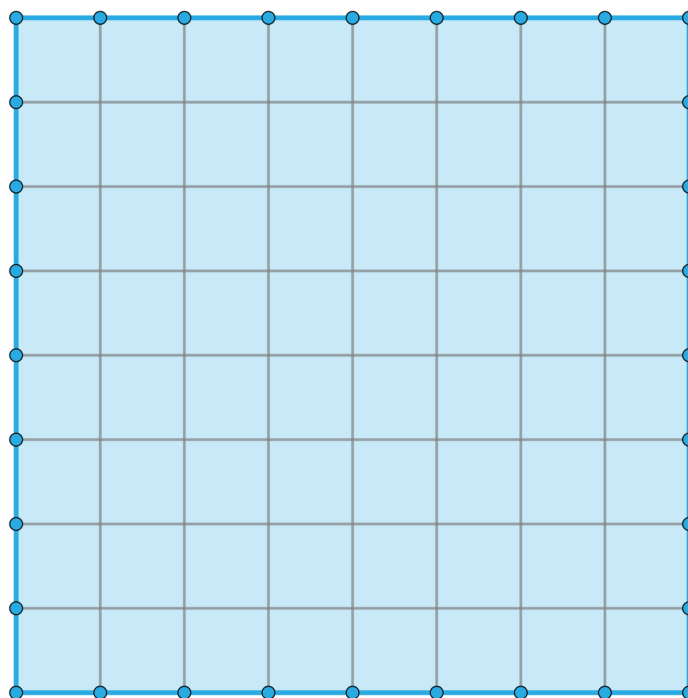
W dalszej części tego materiału będziemy zakładać, że jednostka jest ustalona i będziemy pomijać odniesienie jednostki tam, gdzie to nie prowadzi do nieporozumień.

Przykład 1

Wyznamy pole kwadratu o boku 8.

Rozwiązanie

Dzielimy kwadrat jak na poniższym rysunku.



Dostajemy 8 rzędów po 8 kwadratów w każdym, więc pole kwadratu o boku 8 jest równe 64 jednostki kwadratowe.

Zauważmy, że wzór na pole został już wyprowadzony, więc $P = 8^2 = 64$.

Pole kwadratu o boku długości $\frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną

Chcemy wyznaczyć pole kwadratu o boku $a = \frac{1}{n}$.

Podzielimy każdy bok kwadratu jednostkowego na n równych części, a następnie metodą opisaną wyżej na n^2 przystających kwadratów o boku $a = \frac{1}{n}$. Ponieważ pole kwadratu

jednostkowego jest równe 1, to pole każdego z tak uzyskanych kwadratów jest równe $a = \frac{1}{n^2}$.

Ostatecznie wzór na pole kwadratu o boku $a = \frac{1}{n}$ jest następujący:

$$P = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Przykład 2

Wyznamy pole kwadratu o boku $\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Po zastosowaniu wzoru pole kwadratu o boku $a = \frac{1}{n}$ mamy $P = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

Gdybyśmy chcieli sami wyznaczyć pole tego kwadratu bez odwoływania się do wzoru, to kwadrat jednostkowy należy podzielić na 9 przystających kwadratów metodą opisaną wyżej. Pole kwadratu o boku $\frac{1}{3}$ jest polem jednego z tych dziewięciu kwadratów, więc jest równe $\frac{1}{9}$.

Pole kwadratu o boku długości wymiernej

Chcemy wyznaczyć pole kwadratu o boku wymiernym, czyli $a = \frac{m}{n}$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi.

Metodą opisaną wyżej konstruujemy kwadrat o boku $\frac{1}{n}$. Jego pole jest równe $\frac{1}{n^2}$.

Układamy kwadraty o boku $\frac{1}{n}$ w m rzędach, po m kwadratów w każdym rzędzie.

W ten sposób powstał kwadrat o boku $\frac{m}{n}$. Składa się on z m^2 kwadratów o polu $\frac{1}{n^2}$.

Ostatecznie $P = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Pole kwadratu o boku długości niewymiernej – dla zainteresowanych

Chcemy wyznaczyć pole kwadratu o boku a , gdzie a jest liczbą niewymierną.

Każda liczba niewymierna ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne $a = c_0, c_1 c_2 c_3 \dots$

Jeżeli utniemy tę liczbę na n -tym miejscu po przecinku to dostaniemy $a_n = \frac{c_0 c_1 \dots c_n}{10^n}$.

Liczbę a_n nazywamy n -tym reduktom liczby a . Licznik n -tego reduktu $c_0 c_1 \dots c_n$ oznaczamy symbolem l_n .

Przykład 3

Wyznamy kilka początkowych reduktów liczby $a = \sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Rozwinięcie dziesiętne tej liczby jest postaci 1, 7320508.

Wtedy

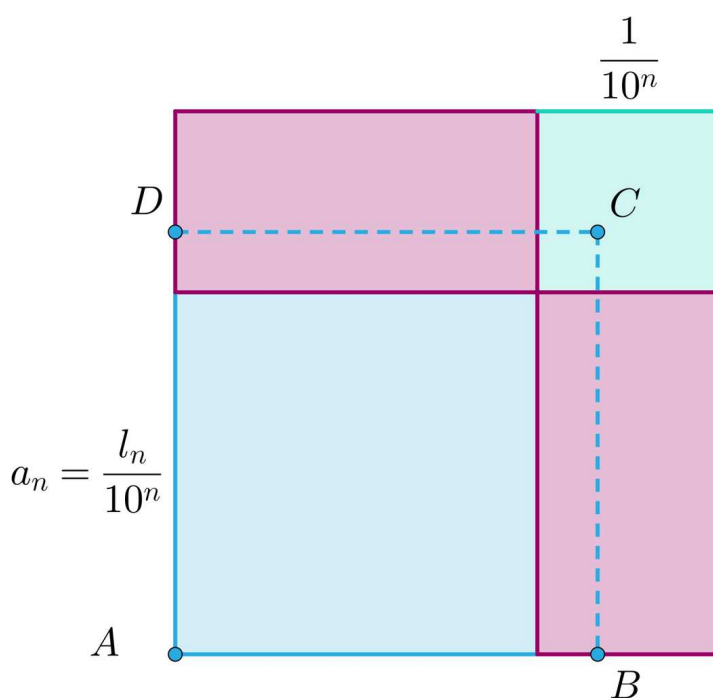
$$a_0 = 1, a_1 = \frac{17}{10}, a_2 = \frac{173}{100} = \frac{173}{10^2}, a_3 = \frac{1732}{10^3}, a_4 = \frac{17320}{10^4}, a_5 = \frac{173205}{10^5}, a_6 = \frac{1732050}{10^6}, \dots$$

$$l_0 = 1, l_1 = 17, l_2 = 173, l_3 = 1732, l_4 = 17320, l_5 = 173205, l_6 = 1732050, \dots$$

Własność: Ograniczenie liczby a przez jej redukt

Jeśli liczba a ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n < a < \frac{l_n+1}{10^n} = a_n + \frac{1}{10^n}$.

Wróćmy teraz do problemu wyznaczenia pola kwadratu o boku a .



Dla dowolnego n pole P kwadratu $ABCD$ jest większe od pola kwadratu o boku a_n oraz jest mniejsze od pola kwadratu o boku $a_n + \frac{1}{10^n}$.

Boki tych kwadratów są liczbami wymiernymi.

W ten sposób pole P wyznaczone jest w przybliżeniu. Dokładność tego przybliżenia jest różnicą między polami kwadratów ograniczających kwadrat $ABCD$.

Na rysunku widać, że różnica ta, to suma pól dwóch czerwonych (przystających) prostokątów o bokach a_n i $\frac{1}{10^n}$ oraz kwadratu o boku $\frac{1}{10^n}$.

Różowy prostokąt składa się z l_n kwadratów o boku $\frac{1}{10^n}$, więc pole różowego prostokąta jest równe $\frac{l_n}{10^{2n}}$.

Stąd dokładność przybliżenia wynosi $r_n = \frac{2l_n}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} = \frac{2a_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$.

Stąd w przybliżeniu pole P jest równe $P \approx a_n^2 + r_n$.

Teraz zauważmy, że przy n dążącym do nieskończoności a_n^2 zbiega do a^2 a r_n zbiega do zera.

Zatem w granicy dostajemy $P = a^2$.

Twierdzenie: o polu kwadratu

Pole kwadratu o boku a jest równe $P = a^2$.

Wykorzystanie podobieństwa kwadratów do wyznaczenia pola kwadratu o boku a

Innym sposobem wyznaczenia wzoru na pole kwadratu jest zastosowanie podobieństwa kwadratów. Ponieważ wszystkie kwadraty są do siebie podobne, to kwadrat o boku a jest podobny do kwadratu jednostkowego w skali $k = a$. Z własności pola figur podobnych wynika, że jego pole P jest równe $P = k^2 \cdot 1 = a^2$.

Przykład 4

Kwadrat K jest podobny do kwadratu jednostkowego w skali $k = \frac{3}{4}$ a kwadrat L jest podobny do kwadratu K w skali $l = 6$. Wyznamy bok i pole kwadratu K i kwadratu L .

Rozwiązanie

Z podobieństwa wynika, że bok kwadratu K jest równy $a = \frac{3}{4}$ a pole kwadratu K jest równe $k^2 \cdot 1 = \frac{9}{16}$.

Podobnie, bok kwadratu L jest równy $l \cdot a = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{9}{2}$. Po zastosowaniu wzoru na pole kwadratu dostajemy, że pole kwadratu L jest równe $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

Sprawdzimy teraz, czy nie popełniliśmy błędu w wyliczeniach wyznaczając pole kwadratu L w inny sposób – wykorzystując skalę podobieństwa.

Pole kwadratu L jest równe $l^2 \cdot P = 6^2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{36 \cdot 9}{16} = \frac{81}{4}$.

Dwa sposoby wyliczenia pola doprowadziły do tego samego wyniku.

Wzory skróconego mnożenia

Udowodnimy wzory na kwadrat sumy i różnicy wykorzystując pole kwadratu.

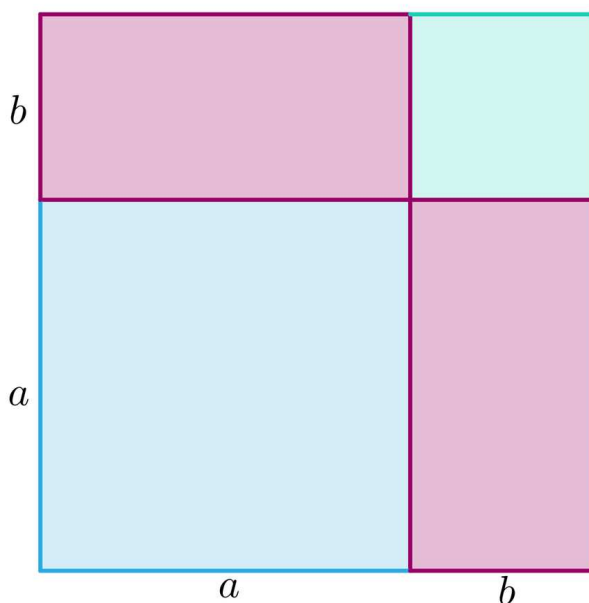
Twierdzenie: Wzory skróconego mnożenia

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dowód

1. Popatrzmy na rysunek, na którym przedstawiono kwadrat o boku $a + b$.

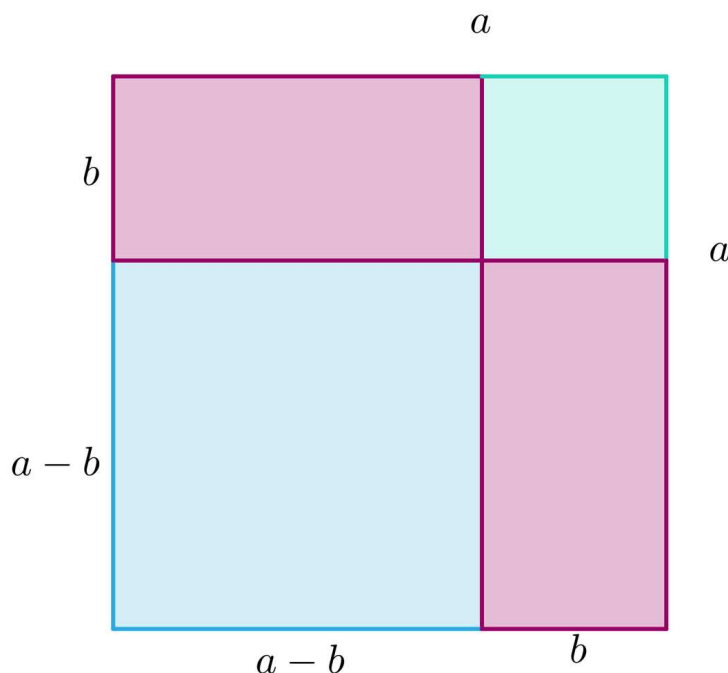


Prowadzimy linie równoległe do boków tego kwadratu, tak, żeby odciąć kwadrat o boku A .

Wtedy pole kwadratu P o boku $a + b$ jest równe sumie pól następujących czworokątów: niebieski kwadrat o boku a , zielony kwadrat o boku b i dwa różowe prostokąty o bokach a i b .

Stąd $P = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Do dowodu wzoru na kwadrat różnicy zakładamy, że $a > b$ i wykonujemy rysunek analogiczny do poprzedniego. Duży kwadrat ma bok a , niebieski kwadrat ma bok $a - b$, a zielony ma bok b . Bierzemy jeszcze pod uwagę dwa prostokąty o bokach a i b .



Aby dostać pole P kwadratu o boku $a - b$ odejmujemy od pola kwadratu o boku a pola dwóch prostokątów o bokach a i b , ale te prostokąty mają część wspólną – kwadrat o boku b , którego pole musimy dodać.

Stąd $P = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Pole kwadratu, którego wierzchołki mają całkowite współrzędne

Jeśli podane są współrzędne dwóch sąsiednich wierzchołków kwadratu $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ to długość boku AB jest równa $a = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}$.

Jeśli podane są współrzędne dwóch przeciwległych wierzchołków kwadratu $A = (a_x, a_y)$, $C = (c_x, c_y)$, to długość przekątnej AC jest równa $c = \sqrt{(a_x - c_x)^2 + (a_y - c_y)^2}$.

Pole kwadratu, którego dwa wierzchołki mają współrzędne (a_x, a_y) i (b_x, b_y) jest równe:

1. $P = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2$ jeśli wierzchołki te są wierzchołkami sąsiednimi;
2. $P = \frac{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}{2}$ jeśli wierzchołki te są wierzchołkami przeciwległymi.

Przykład 5

Dane są 3 wierzchołki kwadratu $K = (4, 6)$, $L = (-1, 5)$, $M = (0, 0)$. Wyznamy jego pole.

Rozwiązanie

Wystarczy wybrać parę wierzchołków, które są sąsiednie lub parę wierzchołków, które są przeciwległe i zastosować powyższe twierdzenie.

W tym celu wyznaczamy długości odcinków KL i LM . Jeśli długości są równe, to K, L są wierzchołkami sąsiednimi. Jeśli długości nie są równe, to wierzchołki krótszego są sąsiednie.

$$|KL| = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$|LM| = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

Stąd pole kwadratu jest równe $(\sqrt{26})^2 = 26$.

Twierdzenie: o polu kwadratu, którego dwa sąsiednie wierzchołki mają współrzędne całkowite

Jeśli współrzędne $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$ dwóch sąsiednich wierzchołków kwadratu są liczbami całkowitymi, to pole kwadratu jest też liczbą całkowitą. Własność ta nie zachodzi dla wierzchołków przeciwległych.

Dowód

$P = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2$ jeśli wierzchołki te są wierzchołkami sąsiednimi.

Korzystając z faktu, że suma i różnica oraz kwadrat liczb całkowitych są liczbami całkowitymi dostajemy, że P jest liczbą całkowitą.

Przykład 6

Pokażemy przykład dwóch przeciwległych wierzchołków kwadratu, które mają współrzędne całkowite, ale pole kwadratu nie jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Weźmy punkty $A = (2, 4)$ i $C = (5, 4)$, które są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wtedy $P = \frac{(2-5)^2 + (4-4)^2}{2} = \frac{9}{2}$.

Punktami kratowymi nazywamy punkty o współrzędnych całkowitych.

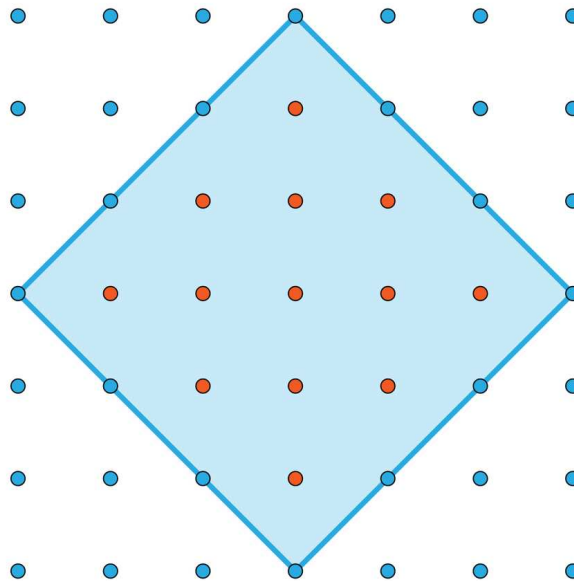
Prawdziwe jest twierdzenie Picka, które mówi o polu wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe.

Twierdzenie: Picka

Pole wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe jest równe $P = \omega + \frac{\delta}{2} - 1$, gdzie ω jest liczbą punktów kratowych należących do wnętrza wielokąta a δ jest liczbą punktów kratowych należących do brzegu wielokąta.

Przykład 7

Obliczymy pole kwadratu K przedstawionego na rysunku, stosując twierdzenie Picka oraz wyznaczając pole kwadratu z użyciem twierdzenia Pitagorasa potwierdzimy wynik.



Rozwiązanie

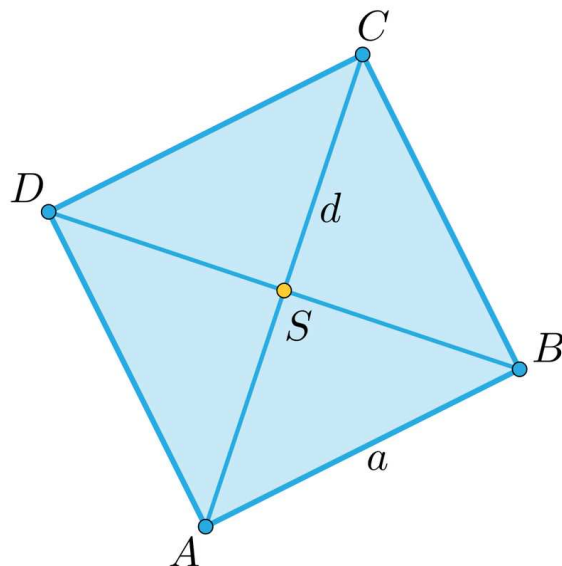
Wewnątrz kwadratu jest 13 punktów kratowych, a na brzegu jest 12 punktów kratowych. Stąd $P = 13 + \frac{12}{2} - 1 = 18$.

Policzymy teraz długość boku kwadratu K patrząc na punkty kratowe. Dla dowolnego boku kwadratu budujemy kwadrat, dla którego ten bok jest przekątną. Ten nowy kwadrat ma bok długości 3, więc jego przekątna ma długość $3\sqrt{2}$.

Stąd pole kwadratu $P = (3\sqrt{2})^2 = 18$. Obydwie metody doprowadziły do tego samego wyniku.

Wykorzystanie przekątnej do wyznaczania pola kwadratu

Długość d przekątnej kwadratu o boku a można wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa w następujący sposób:



$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{2 \cdot d^2}{4} = a^2$$

$$2d^2 = 4a^2$$

$$d = a\sqrt{2}.$$

Stąd też można wyznaczyć długość boku z długości przekątnej $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Twierdzenie: o polu kwadratu z wykorzystaniem przekątnej

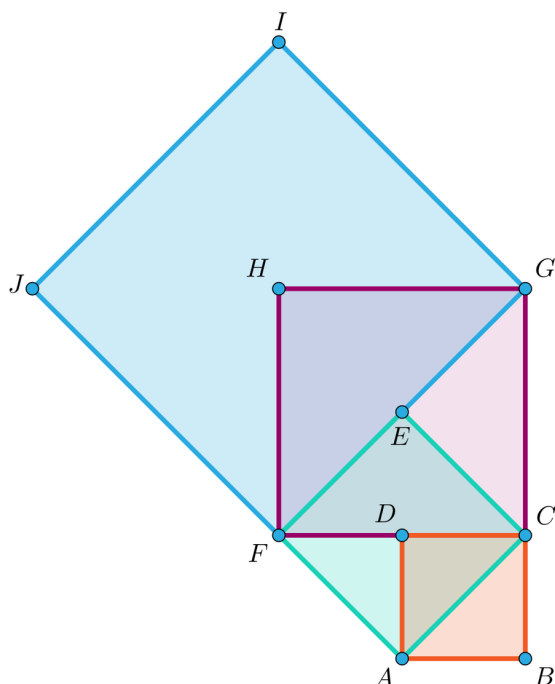
Pole kwadratu o przekątnej d jest równe $P = \frac{d^2}{2}$.

Dowód

$$P = a^2 = \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$$

Przykład 8

Na rysunku przekątna kwadratu $IJFG$ ma długość 8.



Wyznaczymy pola i długości boków wszystkich kwadratów na rysunku.

Rozwiązanie

$$P_{IJFG} = \frac{8^2}{2} = 32, |IJ| = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Bok kwadratu $IJFG$ jest przekątną kwadratu $CFHG$, więc $P_{CFHG} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{2} = 16$,
 $|HF| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$.

$$P_{ACEF} = \frac{4^2}{2} = 8, |FE| = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

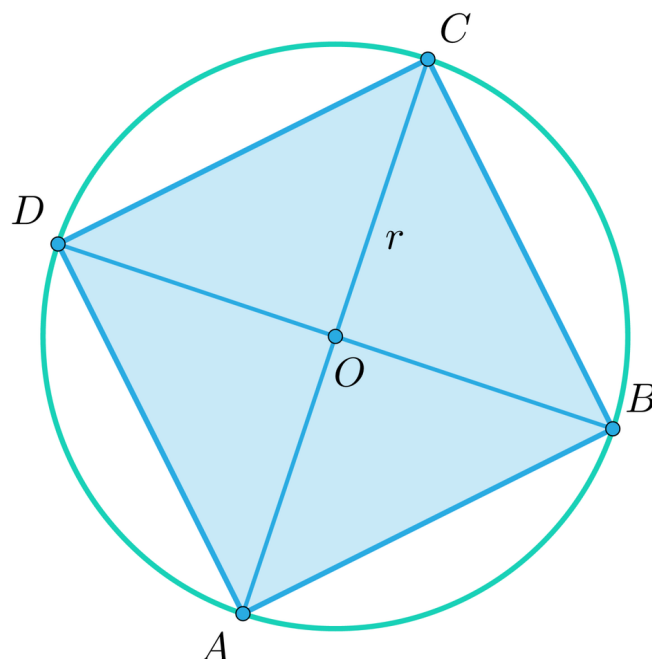
$$P_{ABCD} = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4, |AB| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

Zauważmy, że pole kolejnego kwadratu jest połową pola kwadratu poprzedniego. Stąd można wyznaczyć skalę podobieństwa kolejnego kwadratu do kwadratu poprzedniego

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Przykład 9

Wyznaczymy pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu r .

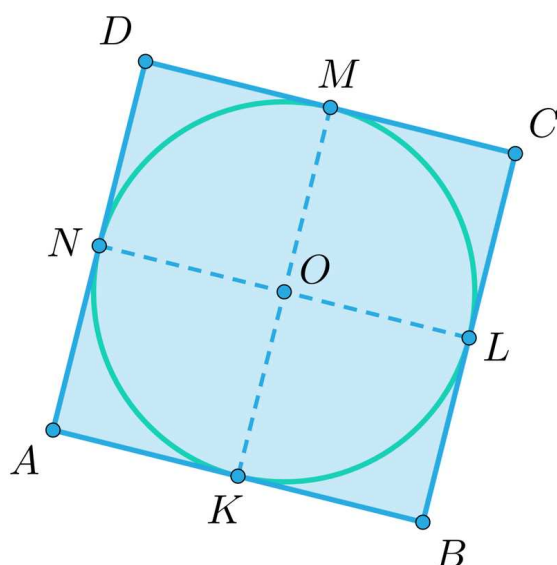


Rozwiązanie

Średnica okręgu jest przekątną kwadratu, bo w okręgu kąt oparty na średnicy jest kątem prostym. Stąd średnica kwadratu ma długość $d = 2r$. I stąd $P = \frac{d^2}{2} = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$.

Przykład 10

Wyznamy pole kwadratu opisanego na okręgu o promieniu r .



Rozwiązanie

Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z kwadratem jest prostopadły do boków kwadratu. Stąd mamy, że kąt KON jest prosty i odcinki KO i ON są równe. Stąd $AKON$ jest kwadratem.

To samo zachodzi dla pozostałych wierzchołków kwadratu $ABCD$, więc średnica okręgu ma długość równą długości boku kwadratu. Stąd $d = 2r$ i pole $P = (2r)^2 = 4r^2$.

Słownik

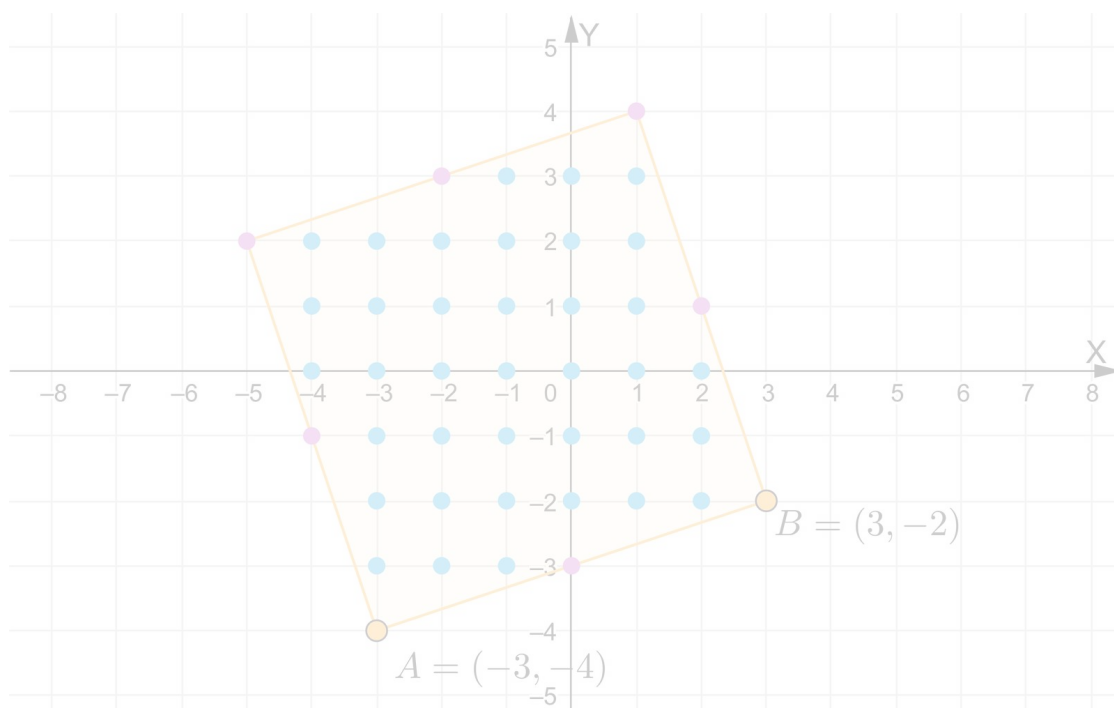
punkty kratowe

punkty o współrzędnych całkowitych

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

1. Na ekranie widać kwadrat, którego wierzchołki są liczbami całkowitymi oraz jego pole.
2. Możesz przesuwać zaznaczone punkty tworząc inne kwadraty, których wierzchołki są liczbami całkowitymi.
3. Wyznacz pole kwadratu z twierdzenia Picka oraz wyznaczając długości boków kwadratu. Sprawdź czy twoje wyliczenia są zgodne z wartością pola wyświetlaną przy kwadracie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1D2R7q4B>

Polecenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Jeżeli sąsiednie wierzchołki kwadratu $ABCD$ mają współrzędne $A = (2, 1)$, $B = (6, 4)$, to:

jego pole jest równe

☐ 16,

☐ 25,

☐ 26,

☐ 13,

Polecenie 3

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Jeżeli sąsiednie wierzchołki kwadratu $ABCD$ mają współrzędne $A = (-1, 1)$, $B = (5, 3)$, to:

jego pole jest równe

☐ 32,

☐ 40,

☐ 16,

☐ 36,

Polecenie 4

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Jeżeli sąsiednie wierzchołki kwadratu $ABCD$ mają współrzędne $A = (-4, -6)$, $B = (8, 0)$, to:

jego pole jest równe

☐ 225,

☐ $136\sqrt{2}$,

☐ 180,

☐ 144,

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Pole kwadratu wynosi 116 a jego wierzchołek ma współrzędne $(-2, 4)$. Wybierz punkty, które mogą być wierzchołkami tego kwadratu.

☐ $(-3, 2)$.

☐ $(12, 10)$.

☐ $(8, 0)$.

☐ $(4, 6)$.

Ćwiczenie 2



Pole kwadratu wynosi 116 a jego wierzchołek ma współrzędne $(-2, 4)$. Wybierz punkty, które mogą być przeciwległe do danego wierzchołka.

☐ $(14, 2)$

☐ $(12, 10)$

☐ $(8, 0)$

☐ $(-16, -2)$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij luki w zdaniach. Przeciągnij właściwe liczby we wskazane pola.

Sąsiednie wierzchołki kwadratu $ABCD$ mają współrzędne $A = (0, 1)$, $B = (4, 3)$. Wtedy liczba punktów kratowych wewnątrz kwadratu wynosi a na brzegu , więc ze wzoru Picka pole kwadratu jest równe .

Ćwiczenie 4



Ocen prawdziwość zdań, zaznaczając przy każdym stwierdzeniu prawdę lub fałsz.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Kwadrat o boku $\frac{28}{3}$ możemy pokryć 28 kwadratami o boku $\frac{1}{3}$.	☐	☐
Kwadrat o boku $\frac{91}{4}$ możemy pokryć 8281 kwadratami o boku $\frac{1}{4}$.	☐	☐
Jeżeli kwadrat K_1 ma pole 20, to kwadrat K_2 o polu 180 ma bok 3 razy dłuższy od boku kwadratu K_1 .	☐	☐
Przekątna kwadratu o boku 81 ma długość 9.	☐	☐
Pole kwadratu opisanego na okręgu jest 2 razy większe od pola kwadratu wpisanego w ten okrąg.	☐	☐

Ćwiczenie 5



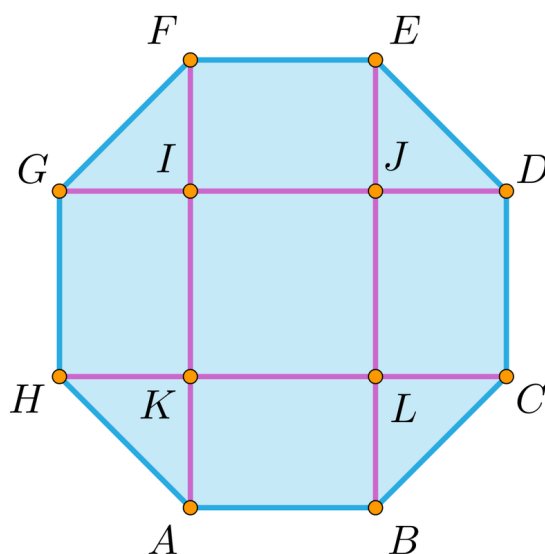
Na obszarze w kształcie kwadratu o powierzchni 1 ha organizowany jest koncert. Przyjmuje się, że na dany obszar można wpuścić tyle ludzi, że na każdego przypada 1 m^2 wolnej powierzchni. Jaki przychód z koncertu będą mieli organizatorzy, jeśli zostaną sprzedane wszystkie bilety, których cena wynosi 65 zł?

Jak zmieni się rozwiązanie zadania, gdy w dobie epidemii koronawirusa należy zachować dystans społeczny między osobami prowadzący do tego, że na jedną osobę przypada 3 metry kwadratowe? Jaka powinna być cena biletu (w pełnych złotych), żeby uzyskać co najmniej taki sam przychód?

Ćwiczenie 6



Wyznacz pole ośmiokąta foremnego wiedząc, że pole kwadratu $IJKL$ na rysunku jest równe 25 centymetrów kwadratowych.



Ćwiczenie 7



Kwadrat $A'B'C'D'$ jest obrazem kwadratu $ABCD$ w jednokładności w pewnej skali i o środku w środku kwadratu $ABCD$. Jeden z nich ma pole dwa razy mniejsze od drugiego. Wyznacz odległość między punktami A i A' , jeśli bok kwadratu $ABCD$ ma długość 20.

Ćwiczenie 8



Punkt O jest punktem wewnętrznym kwadratu $ABCD$.

Uzasadnij, że $P_{ABO} + P_{DCO} = P_{AOD} + P_{BOC}$.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole kwadratu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje kwadraty;
- wyprowadza wzór na pole kwadratu w sposób elementarny;
- zna zależność między bokiem, przekątną i polem kwadratu;

- zna zależność między boki kwadratu i promieniami okręgu opisanego i wpisanego;
- znajduje pole kwadratu przy podanych współrzędnych dwóch wierzchołków;
- znajduje pole kwadratu, którego sąsiednie wierzchołki mają całkowite współrzędne;
- wykorzystuje skalę podobieństwa do wyznaczania pól kwadratów;
- wykorzystuje własności pola kwadratu w rozwiązywaniu zadań i w problemach praktycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm;
- kognitywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka;
- interaktywna aplikacja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całej klasy.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przeprowadza pogadankę na temat mierzenia. Nawiązuje do antycznych sposobów mierzenia pola.
2. Uczniowie przypominają jak oblicza się pole kwadratu metodami elementarnymi.
3. Nauczyciel przedstawia temat lekcji, uczniowie określają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat przybliżana pola kwadratu o boku niewymiernym polami kwadratów o bokach wymiernych. (Przy realizacji trudniejszej wersji lekcji nauczyciel omawia rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej oraz granic).

2. Nauczyciel przedstawia związek między długością boku, przekątnej, pola kwadratu, promienia okręgu wpisanego w kwadrat i promienia okręgu opisanego na kwadracie. Uczniowie rozwiązują Przykład 9.
3. Nauczyciel przypomina wyprowadzenie wzorów skróconego mnożenia w sposób elementarny z wykorzystaniem pól kwadratów.
4. Uczniowie obliczają pola kwadratów gdy znana jest skala podobieństwa – Przykład 4.
5. Uczniowie w parach analizują Przykład 5 analizując metodę obliczania pola kwadratu w układzie współrzędnych.
6. Uczniowie poznają twierdzenia Picka, analizują przykład 7, następnie w parach sprawdzają w symulacji interaktywnej jak w obliczać pola kwadratów o całkowitych współrzędnych wierzchołków.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując ćwiczenia 6-8 w sekcji „Sprawdź się”.
2. Uczeń rozwiązuje zadania trudniejsze wykorzystujące wiedzę przedstawioną na lekcji w szerszym kontekście, również w zastosowaniach praktycznych.

Praca domowa:

- Narysuj kwadrat, opisz na nim okrąg, na tym okręgu opisz kwadrat. Powtórz to 3 razy. Wyznacz stosunek pola kwadratu wyjściowego do kwadratu uzyskanego w trzecim kroku. Jaki będzie stosunek pola kwadratu wyjściowego do kwadratu uzyskanego w n-ty kroku?
- Uczniowie wykonują ćwiczenia 1-5 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pole prostokąta i kwadratu](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać symulację interaktywną na lekcji o wielokątach w układzie współrzędnych.
- Analiza obliczania pola kwadratu w układzie współrzędnych na podstawie symulacji oraz wykonanie poleceń z nią związanych może być pracą domową.