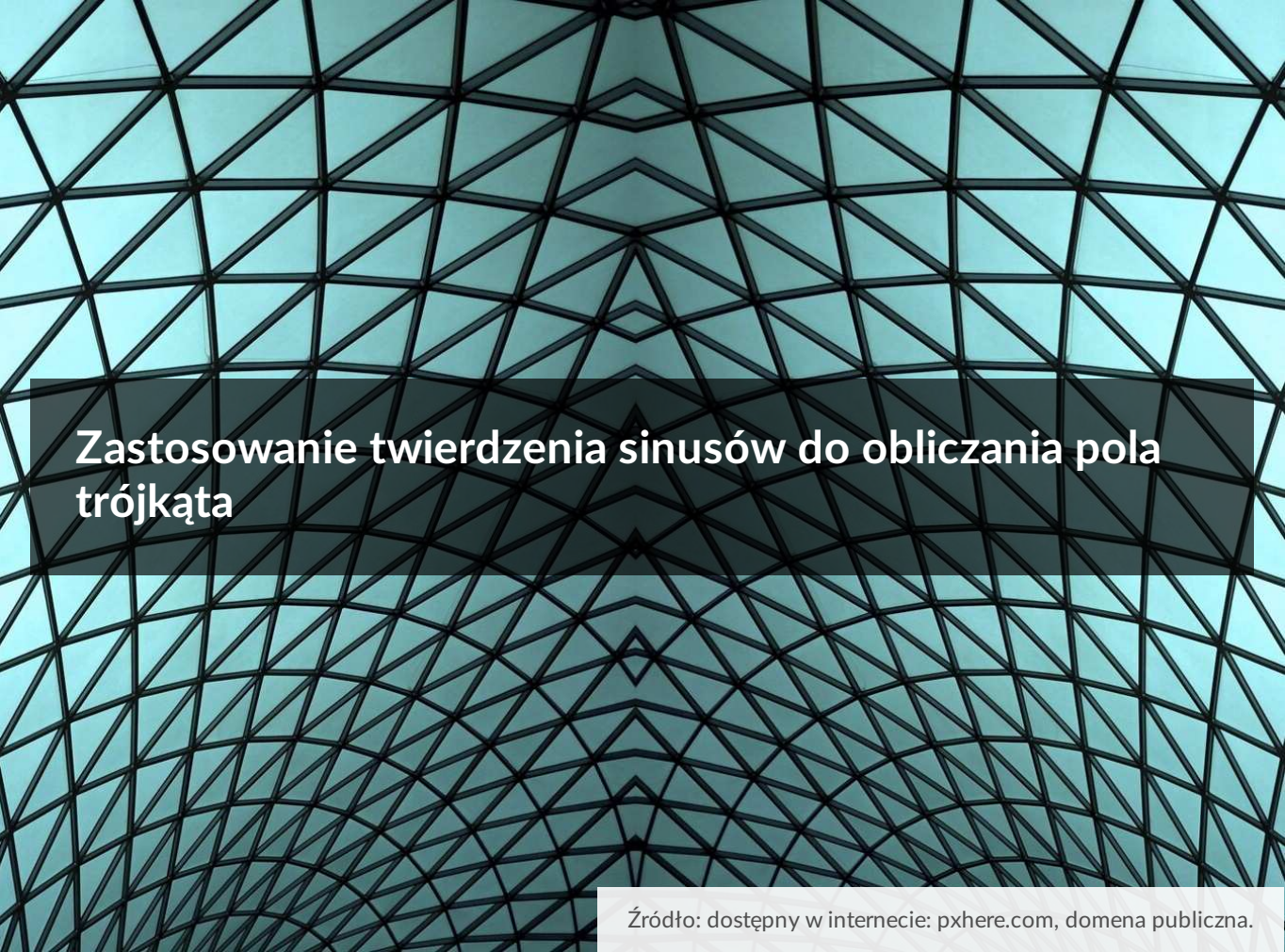




Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

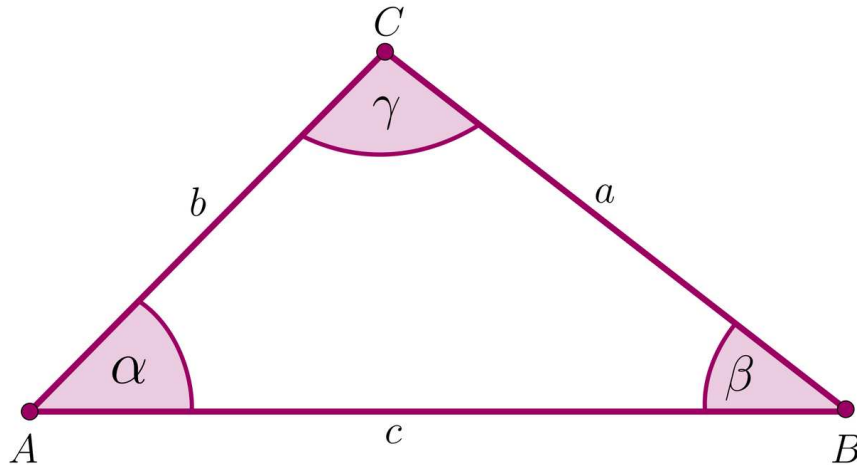
W tym materiale omówimy wiadomości dotyczące obliczania pola trójkąta, z wykorzystaniem twierdzenia sinusów. Przekonamy się, że w wielu przypadkach zastosowanie tego twierdzenia pozwala na łatwe wyznaczenie szukanych wielkości. Będziemy również rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

Twoje cele

- Zastosujesz zależność pomiędzy promieniem okręgu opisanego na trójkącie, a polem tego trójkąta.
- Dobierzesz odpowiedni wzór na pole trójkąta, w zależności od treści zadania.
- Obliczysz pola trójkątów z wykorzystaniem twierdzenia sinusów.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Jeżeli mamy dany trójkąt, z oznaczeniami długości boków i miar kątów, jak na poniższym rysunku, to jego pole możemy wyznaczyć za pomocą różnych wzorów.



Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a , b , c – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A , B , C ,

$2p = a + b + c$ – obwód trójkąta,

α , β , γ – miary kątów przy wierzchołkach A , B , C ,

h_a , h_b , h_c – wysokości opuszczone z wierzchołków A , B , C

R , r – promienie okręgów opisanego i wpisanego.

Zatem:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

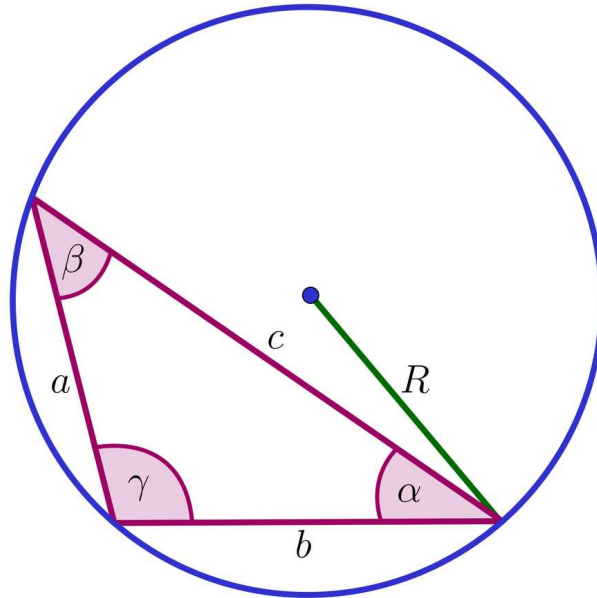
$$P = r \cdot p$$

Przypomnijmy sformułowanie **twierdzenia sinusów**.

Twierdzenie: Twierdzenie sinusów (twierdzenie Snelliusa)

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunki długości boków do sinusów przeciwległych kątów są równe i równają się średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Jak zastosować twierdzenie sinusów do obliczania pola trójkąta?

- Jeżeli wiadomo, że $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, to **pole trójkąta** możemy wyrazić za pomocą wzoru:

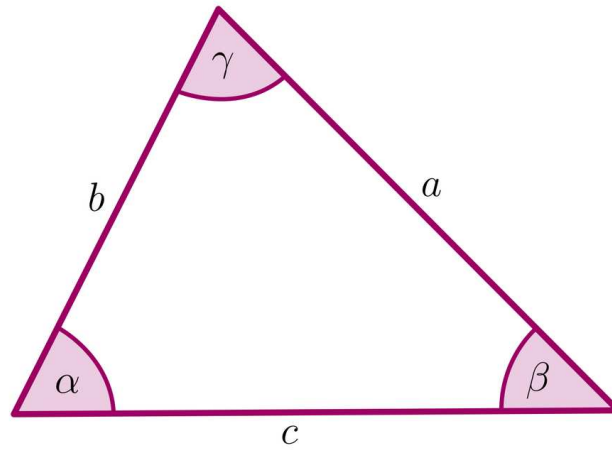
$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

- Jeżeli skorzystamy z zależności $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, to pole trójkąta można wyrazić za pomocą wzoru:

$$P = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

- Jeżeli skorzystamy z zależności $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, to pole trójkąta możemy opisać za pomocą wzoru:

$$P = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$



Pole trójkąta z rysunku obliczamy także za pomocą wzorów:

$$P = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$$

$$P = \frac{a^2}{4} \cdot \left(\sin 2\beta + \frac{1 - \cos 2\beta}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

Przykład 1

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, w którym pole jest równe 24, a iloczyn sinusów kątów wewnętrznych tego trójkąta wynosi $\frac{3}{8}$.

Rozwiązanie:

Niech α, β, γ będą miarami kątów wewnętrznych w trójkącie.

Z warunków z zadania mamy, że:

$$P = 24,$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{3}{8}$$

Do wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego wykorzystamy wzór $P = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

Wobec tego:

$$24 = 2R^2 \cdot \frac{3}{8}$$

$$R^2 = \frac{96}{3}, \text{ czyli } R = \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$$

Przykład 2

Obliczymy pole trójkąta, gdy dane są wielkości $c = 8, \alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$.

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia wartości pola wykorzystamy wzór $P = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$.

Zatem

$$P = \frac{8^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}$$

$$\begin{aligned} P &= 32 \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 32 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}} = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 32 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \\ &= 32 \cdot \frac{3\sqrt{3} - 3}{6} = 32 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 16\sqrt{3} - 16 \end{aligned}$$

Przykład 3

Obliczymy miarę kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku trójkąta, w którym boki mają długości $a = 8$, $b = 10$, $c = 12$.

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia miary szukanego kąta obliczymy najpierw długość promienia okręgu opisanego na trójkącie. W tym celu użyjemy wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$.

Pole trójkąta obliczymy, korzystając ze wzoru Herona.

$$\text{Zatem } p = \frac{8+10+12}{2} = 15.$$

Wobec tego pole trójkąta wynosi:

$$P = \sqrt{15 \cdot (15 - 8) \cdot (15 - 10) \cdot (15 - 12)} = \sqrt{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = 15\sqrt{7}$$

Zatem do wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego rozwiązujemy równanie:

$$15\sqrt{7} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot R}$$

Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi:

$$R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

Do wyznaczenia miary kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku użyjemy twierdzenia sinusów.

Wobec tego:

$$\frac{8}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{4\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

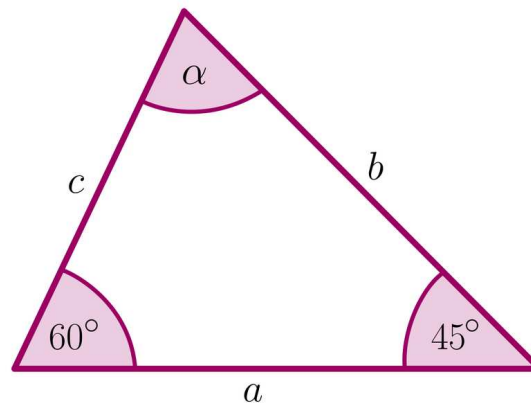
Jeżeli wykorzystujemy tablice wartości funkcji trygonometrycznych, to $\alpha \approx 42^\circ$.

Przykład 4

Obliczmy pole trójkąta, w którym najdłuższy bok ma długość 12, a dwa kąty tego trójkąta mają miary 60° i 45° .

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Z warunków zadania wynika, że $\alpha = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$, zatem $a = 12$.

Do wyznaczenia pola trójkąta użyjemy wzoru $P = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

W celu wyznaczenia wielkości $\sin 75^\circ$ użyjemy wzoru na sinus sumy kątów.

Zatem

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Wobec tego pole trójkąta wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \frac{\sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = 72 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$P = 108 - 36\sqrt{3}$$

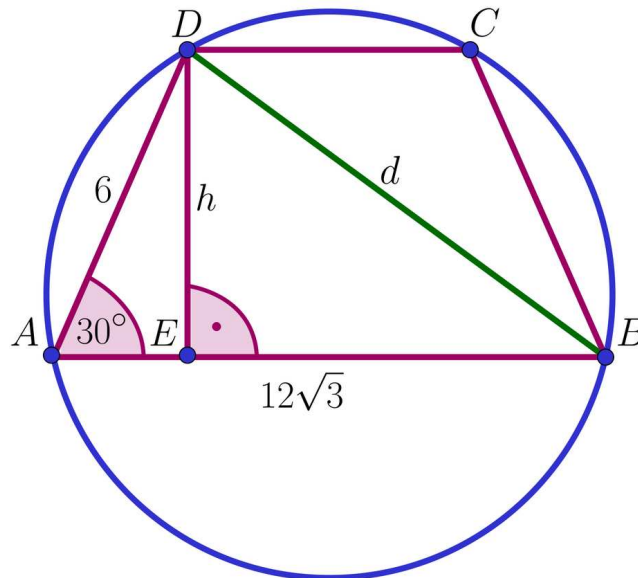
Przykład 5

Kąt przy podstawie trapezu ma miarę 30° , dłuższa podstawa jest równa $12\sqrt{3}$, a ramię trapezu ma długość 6. Obliczmy długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie.

Rozwiązanie:

Wiadomo, że okrąg można opisać na trapezie równoramiennym.

Narysujmy okrąg opisany na trapezie i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Zauważmy, że długość promienia okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest taka sama, jak długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABD .

Z trójkąta o kątach 90° , 60° , 30° mamy $h = 3$ oraz $|AE| = 3\sqrt{3}$.

Zatem $|EB| = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$(9\sqrt{3})^2 + h^2 = d^2$$

$$(9\sqrt{3})^2 + 3^2 = d^2$$

$$243 + 9 = d^2, \text{ czyli } d = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$$

Niech R będzie długością promienia okręgu opisanego na tym trapezie.

Pole trójkąta ABD obliczamy za pomocą wzorów:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |ED|$$

$$P = \frac{|AB| \cdot |AD| \cdot |BD|}{4 \cdot R}$$

Zatem do wyznaczenia wartości R rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{7}}{4 \cdot R}$$

Wobec tego $R = 6\sqrt{7}$.

Słownik

pole trójkąta

miara przyporządkowująca trójkątowi pewną liczbę, która charakteryzuje jej rozmiar

twierdzenie sinusów

w dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie

Animacja

Polecenie 1

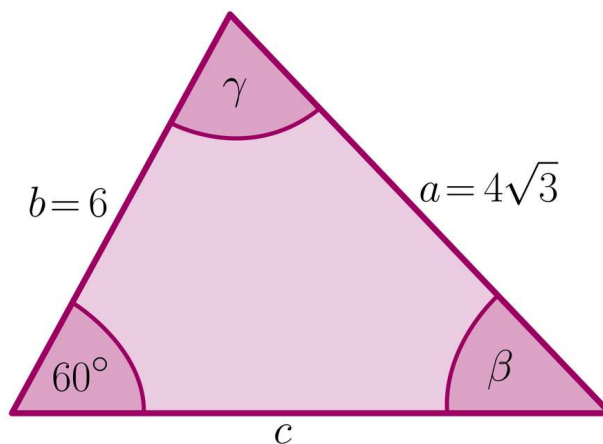
Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym obliczania pola trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia sinusów, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14nQxel6>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego zastosowania twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta.

Polecenie 2

Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeżeli R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie o polu P , w którym kąty wewnętrzne mają miary α, β, γ , to:

☐ $R = \sqrt{\frac{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{P}}$

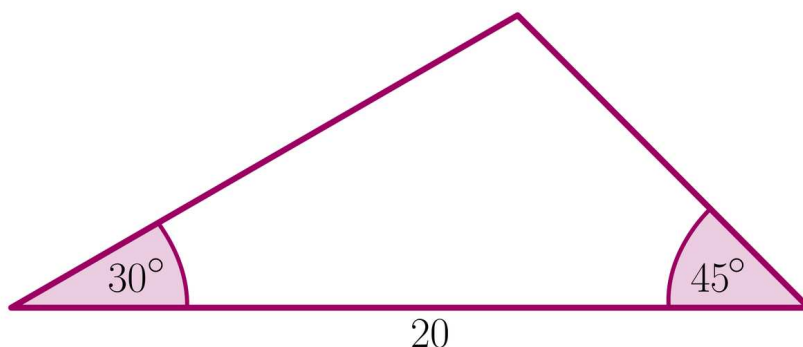
☐ $R = 2\sqrt{\frac{P}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}$

☐ $R = \sqrt{\frac{P}{2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}}$

Ćwiczenie 2



Na podstawie rysunku zaznacz zdania, które są prawdziwe.



- ☐ Pole trójkąta z rysunku jest równe $100\sqrt{3} - 100$.
- ☐ Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $10\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$.
- ☐ Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 40.
- ☐ Pole trójkąta z rysunku jest równe $70\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 3



Wstaw w tekst odpowiednie liczby lub tekst.

Dany jest trójkąt o boku $c = 4$ oraz kątach $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

Długość boku a jest równa długości .

Pole tego trójkąta jest równe .

Długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa .

promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Wykaż, że jeżeli R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach a, b, c i kątach α, β, γ , to długość promienia wyraża się wzorem $R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}}$

Ćwiczenie 6



Oblicz pole trójkąta, w którym najkrótszy bok ma długość 6, a dwa kąty tego trójkąta mają miary 30° i 45° .

Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeśli boki trójkąta mają długości a, b, c , a kąty odpowiednio α, β, γ , to pole trójkąta możemy obliczyć za pomocą wzoru $P = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ dla $\alpha \neq \beta \neq 90^\circ$.

Ćwiczenie 8



Oblicz pole trójkąta, w którym promień okręgu na nim opisanego ma długość $R = 18$ oraz dane są miary dwóch kątów wewnętrznych tego trójkąta $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 15^\circ$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania - wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje zależność pomiędzy promieniem okręgu opisanego na trójkącie, a polem tego trójkąta;
- dobiera odpowiedni wzór na pole trójkąta, w zależności od treści zadania;
- oblicza pola trójkątów z wykorzystaniem twierdzenia sinusów;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda stolików eksperckich;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3–5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łam się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta”).

Materiały pomocnicze:

- [Pole trójkąta](#)

Wskazówki metodyczne:

- „Film samouczek” można wykorzystać jako zadanie domowe lub w realizacji tematu „Praktyczne zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi”.