Wielokąty - rodzaje

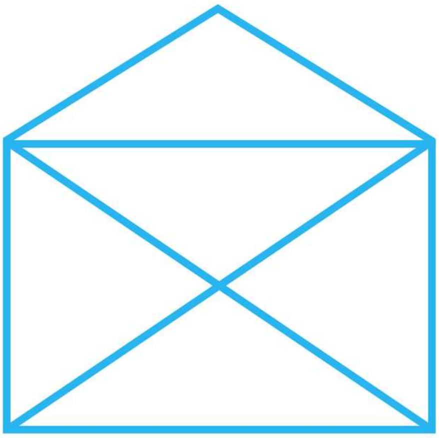
- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Gerd Altmann z Pixabay, domena publiczna.

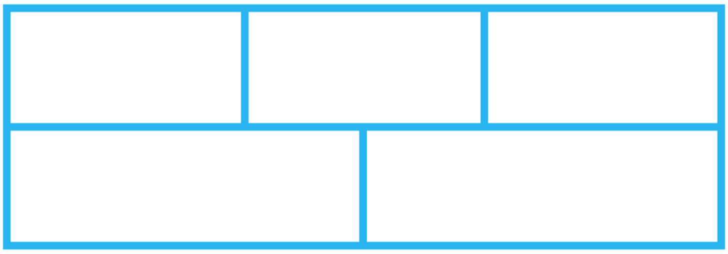
Czym są figury unikursalne?

Figury, które można nakreślić jednym pociągnięciem ołówka, nie prowadząc go nigdy po linii już nakreślonej, nazywają się unikursalnymi lub jednobieżnymi. Jeśli rzędem punktu nazwiemy liczbę linii, które wychodzą z tego punktu, to okazuje się, że figura jest unikursalna, gdy co najwyżej dwa punkty są rzędu nieparzystego.

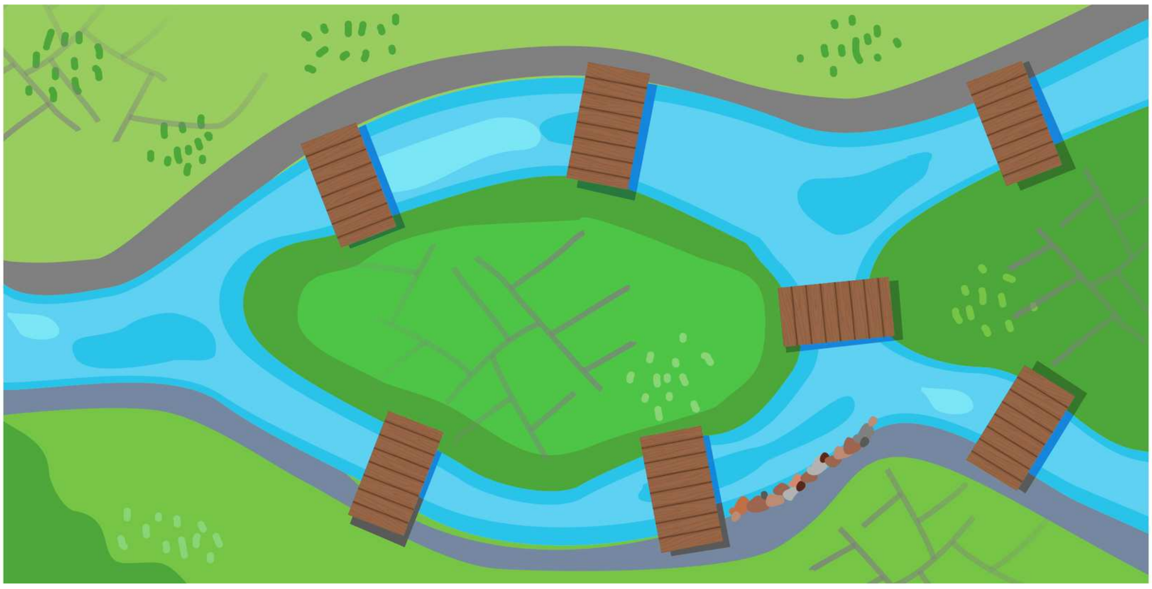
Łatwo zauważyć, że „klasyczna” zagadka związana z narysowaniem jednym pociągnięciem ołówka koperty, takiej jak na poniższym rysunku, ma rozwiązanie, ponieważ ma dokładnie dwa punkty rzędu 3, oba przy dolnej podstawie, a wszystkie pozostałe są rzędu parzystego.



Korzystając z podanego kryterium widzimy, że nie jest figurą unikursalną zbudowana z odcinków krzywa przedstawiona na poniższym rysunku.



Badanie takich figur i w szczególności wyznaczenie kryterium rozwiązalności takich problemów jest przedmiotem zainteresowania teorii grafów, podwaliny pod którą położył Leonard Euler, rozwiązując słynne zadanie o mostach królewieckich: Królewiec, który w XVII wieku stolicą Prus Książęcych, leżał nad rzeką Pregołą, a jego dzielnice, w tym leżące na śródrzecznych wyspach, łączyło siedem mostów, jak na rysunku.



Czy można przejść kolejno przez wszystkie mosty, nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż raz jeden?

Jak zobaczymy, zagadnienie figur jednobieżnych ma wiele wspólnego z pojęciem łamanej.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz pojęcie łamanej oraz ich rodzaje.
> - Usystematyzujesz wiadomości na temat wielokątów.
> - Poznasz czym jest zagadnienie izoperymetryczne i będziesz badał zależności między polem i obwodem wybranych wielokątów.
> - Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

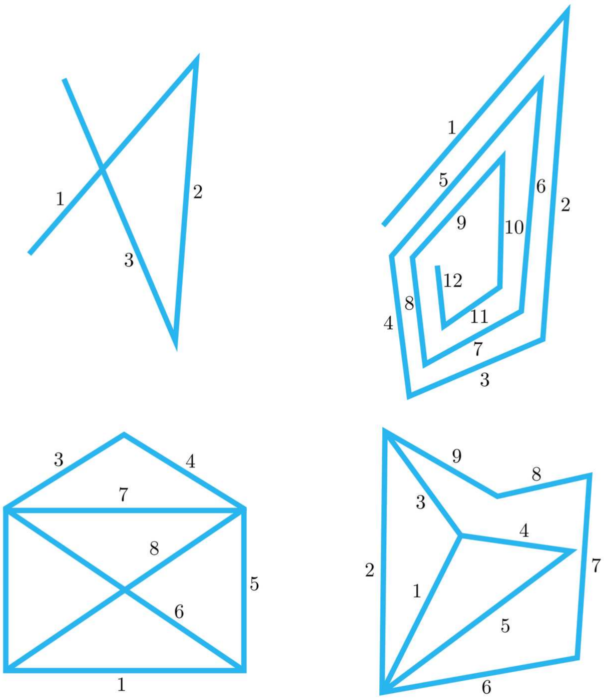
Pojęcie łamanej i jej rodzaje

Definicja: łamana

Łamaną nazywamy figurę geometryczną, którą można przedstawić jako sumę skończonej liczby odcinków, w taki sposób, że:

- dowolne dwa odcinki mogą mieć co najwyżej wspólny koniec (co najwyżej jeden punkt wspólny),
- odcinki można tak uporządkować (ponumerować), aby koniec jednego odcinka (oprócz ewentualnie ostatniego) był początkiem następnego.

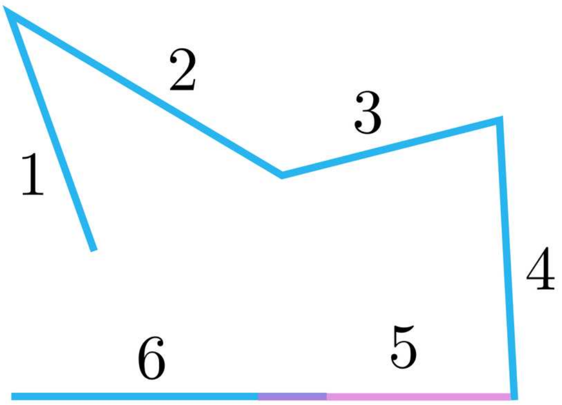
Wtedy odcinki tworzące łamaną nazywamy bokami tej łamanej, a końce tych odcinków nazywamy wierzchołkami łamanej.



przykłady łamanej

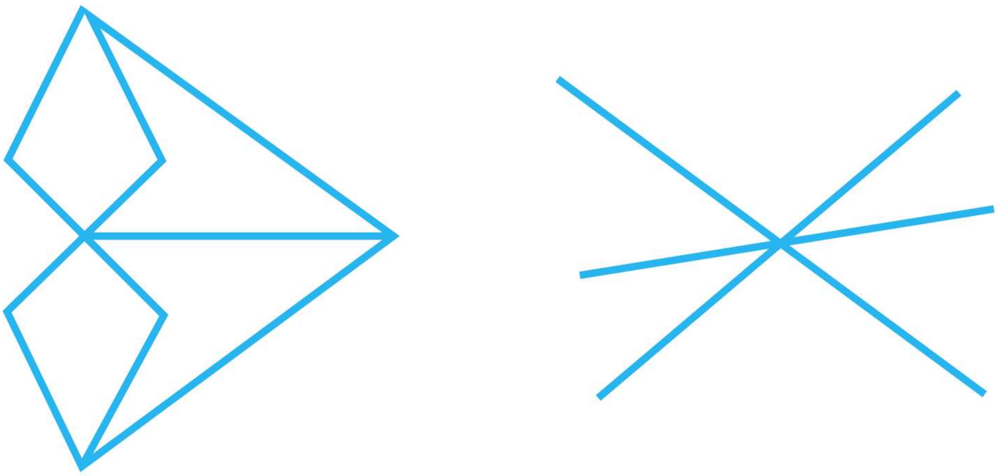
Zauważmy, że gdyby pierwszą z figur potraktować jako sumę mnogościową tylko trzech odcinków, to ta figura nie spełniałaby warunków opisanych w definicji łamanej. Musimy więc dostrzec podział dwóch spośród tych odcinków i mówić o łamanej składającej się z pięciu boków.

Zauważmy, że nie każdą figurę zbudowaną ze skończonej liczby odcinków nazwiemy łamaną. W szczególności, jeśli jakieś dwa kolejne odcinki w naszej figurze będą współliniowe i będą miały więcej niż jeden punkt wspólny, to taka figura nie będzie łamaną. Na rysunku poniżej odcinki o numerach 5 i 6 mają więcej niż jeden punkt wspólny.



Przykład figury, która jest skończona sumą uporządkowanych odcinków, ale nie jest łamaną

Zauważmy, że każdą łamaną, w szczególności ze względu na wymóg uporządkowania odcinków, da się narysować „bez odrywania” ołówka od kartki, czyli łamana jest figurą unikursalną. Tym samym, te figury, które są zbudowane ze skończonej liczby odcinków, ale których nie da się narysować „bez odrywania” ołówka od kartki, nie będą łamaną.



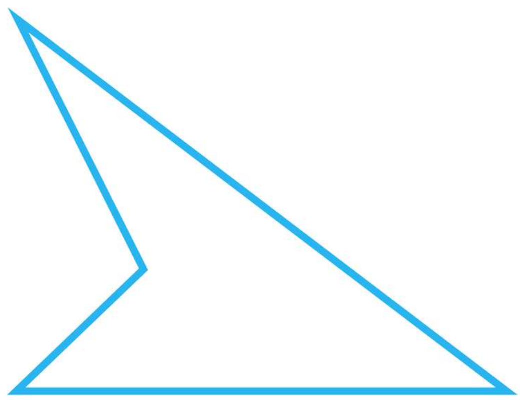
przykłady figur, które są skończoną sumą odcinków, ale nie są łamaną

Definicja: łamana zwyczajna

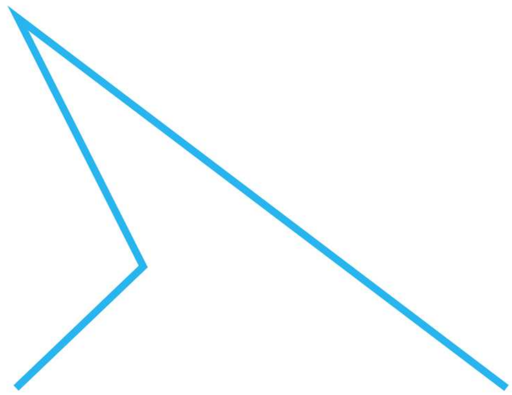
Łamana, której dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej oraz żaden punkt tej łamanej nie należy do więcej niż dwóch odcinków, nazywa się łamaną zwyczajną.

Definicja: łamana zamknięta

Łamana zwyczajna jest zamknięta, jeśli koniec ostatniego odcinka pokrywa się z początkiem pierwszego odcinka. W przeciwnym razie łamaną nazywa się otwartą.



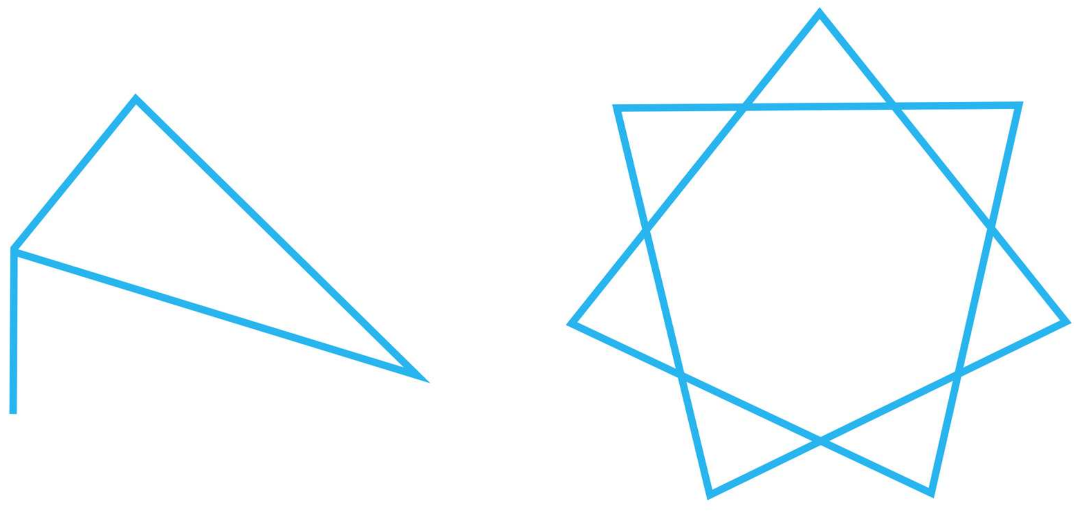
łamana zwyczajna zamknięta



łamana zwyczajna otwarta

Definicja: łamana wiązana

Łamaną nazywamy wiązaną, jeśli istnieje takie uporządkowanie (taki podział na sumę odcinków), przy którym ta łamana ma punkt należący do więcej niż dwóch odcinków.



przykłady łamanych wiązanych

Drugi z powyższych wielokątów jest przykładem wielokąta gwiaździstego - jest to jeden spośród dwóch siedmiokątów gwiaździstych.

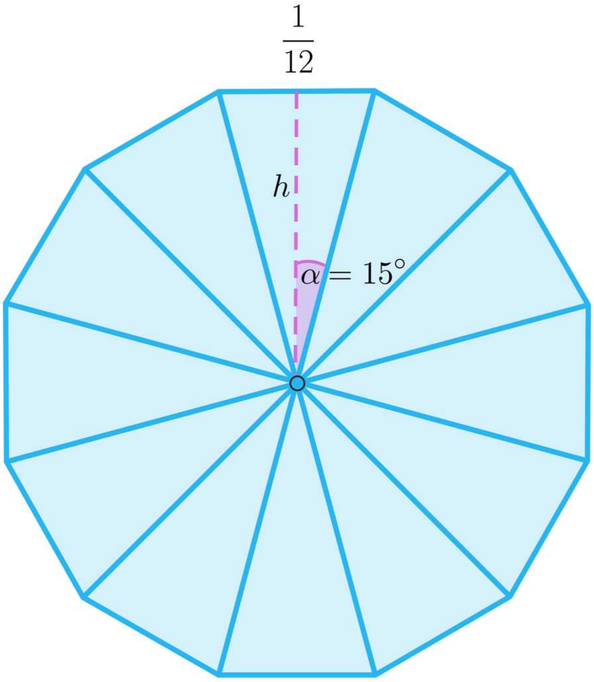
> **Definicja: wielokąt**
>
> Wielokątem (inaczej wielobokiem, n-kątem, n-bokiem) nazywamy płaska figurę geometryczną ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą o n bokach, gdzie $n \geqslant 3$, wraz z tą łamaną.

> **Definicja: wielokąt wypukły**
>
> Wielokątem, który jest figurą wypukłą nazywamy wielokątem wypukłym.

> **Twierdzenie: o wielokącie wypukłym**
>
> Wielokąt jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:
>
> - każde dwa punkty wielokąta można połączyć odcinkiem zawartym w tym wielokącie;
> - wszystkie kąty wewnętrzne wielokąta są wypukłe;
> - wielokąt zawiera wszystkie swoje przekątne.

Zagadnienie izoperymetryczne

Dla każdego wielokąta możemy obliczyć jego obwód, który jest sumą długości boków łamanej, która jest brzegiem danego wielokąta. Podobnie możemy obliczać pole każdego wielokąta, np. sprowadzając to zagadnienie do obliczenia sumy pól rozłącznych trójkątów, na które można podzielić każdy wielokąt (tzw. triangulacja). Rozważmy dwunastokąt foremny o obwodzie równym 1, taki jak na rysunku, którego triangulacja (podział na rozłączne trójkąty) została wyznaczona przez promienie okręgu opisanego na tym wielokącie.



Zauważmy, że $\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}}{h}$. Wtedy $h = \frac{\frac{1}{24}}{\operatorname{tg} 15^\circ}$ i pole dwunastokąta jest równe $p = 12\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot h\right) = 12\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{1}{24}}{\operatorname{tg} 15^\circ}\right) = \frac{1}{48\cdot\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{48\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}+2}{48} \approx 0,077751.$

Przechodząc do zagadnień izoperymetrycznych, zacznijmy od tego, że termin „izoperymetria” ma swój źródłosłów w przedrostku „izos” – równy, taki sam oraz „perimetros” – obwód. Klasyczne zagadnienie izoperymetryczne, przywołane m.in. przez Zenodora na przełomie III i II wieku p.n.e. głosi, że wśród wielokątów o ustalonym obwodzie i o jednakowej liczbie boków wielokąt foremny ma największe pole. Z kolei podstawowe twierdzenie izoperymetryczne głosi, że wśród wszystkich krzywych na płaszczyźnie o ustalonym obwodzie, figurę o największym polu ogranicza okrąg. Jako ciekawostkę warto wspomnieć, że ten aspekt przywołany został przez Adama Mickiewicza w IV księdze „Panu Tadeusza”, gdy wspomina o fortelu zastosowanym przez Dydonę – ta miała obiecane, że dostanie tyle ziemi, ile obejmie skóra wołu. Pocięła więc skórę na wąskie paski i utworzyła z nich okrąg, a na terenie w ten sposób wydzielonym miała powstać Byrsa – najstarsza dzielnica Kartaginy.

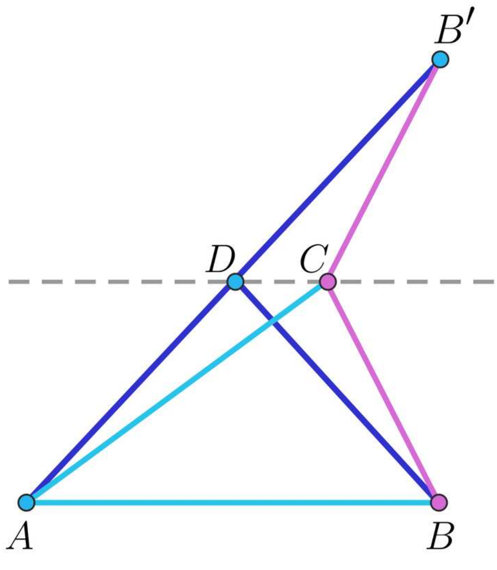
Okazuje się, że dla dowolnych figur o polu P i obwodzie L prawdziwa jest nierówność $\frac{4\pi\cdot P}{L^2} \leq 1$, a iloraz $Q = \frac{4\pi\cdot P}{L^2}$ zwany jest ilorazem izoperymetrycznym.

Zbadajmy iloraz izoperymetryczny dla koła. Mamy: $\frac{4\pi\cdot P}{L^2} = \frac{4\pi\cdot\left(\pi r^2\right)}{\left(2\pi r\right)^2} = 1$. Okazuje się, że jest to jedyna figura, dla której ten iloraz jest jedynką. Twierdzenie Zenodora można sformułować wykorzystując zdefiniowany wyżej iloraz.

Twierdzenie: o ilorazie izoperymetrycznym

> Spośród wszystkich wielokątów o danym obwodzie największy iloraz izoperymetryczny ma wielokąt foremny.

Przywołane wyżej twierdzenia przyjmiemy bez dowodu. Przyjrzymy się jednak zagadnieniom, które z tymi zależnościami są związane.

> **Twierdzenie: problem odwrotny izoperymetrii dla trójkąta**
>
> Ze wszystkich trójkątów o ustalonej podstawie i równych polach trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód.
>
> **Dowód**
>
> Rozważmy dowolny trójkąt ABC o różnych bokach. Poprowadźmy prostą równoległą do podstawy AB, przechodząca przez punkt C. Niech D będzie punktem wspólnym tej prostej i symetralnej odcinka AB, jak na rysunku.
>
> 
>
>
> Wtedy trójkąt ABD jest równoramienny i pola trójkątów ABC i ABD są równe. Niech B’ będzie obrazem punktu B w symetrii względem prostej CD.
>
> Wtedy $|BC| = |CB$’$|$, $|BD| = |DB$’$|$ oraz punkty A, D, B’ są współliniowe i $|AD| = |DB$’$|$. Rozważmy obwód trójkąta ABC: $|AB| + |BC| + |AC|$. Mamy wówczas $|AB| + |BC| + |AC| = |AB| + |CB$’$| + |AC|$. Z nierówności trójkąta wynika, że $|AC| + |CB$’$| \geq |AB$’$|$, ale $|AB$’$| = |AD| + |DB$’$|$. Zatem: $|AB| + |BC| + |AC| \geq |AB| + |BD| + |AD|$. Ale ostatnia suma opisuje obwód trójkąta równoramiennego ABD. Stąd teza.

Słownik

figura unikursalna

figura, którą można nakreślić jednym pociągnięciem ołówka (bez jego odrywania od kartki), nie prowadząc go nigdy po linii już nakreślonej

iloraz izoperymetryczny

ilorazem izoperymetrycznym figury płaskiej o polu P i obwodzie L nazywamy liczbę $\frac{4\pi \cdot P}{L^2}$

wielokąt foremny gwiaździsty

n-kątem foremnym gwiaździstym **nazywamy łamaną** zamkniętą o n wierzchołkach, utworzoną z tych przekątnych n-kąta foremnego, które mają równą długość

wielokąt foremny

wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary)

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną i następnie wykonaj polecenia poniżej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5fswvn8P

Polecenie 2

Rozważmy wszystkie trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej długości 12. Wyznacz obwód tego z trójkątów, który ma największe pole.

Polecenie 3

Rozważmy wszystkie trójkąty prostokątne o polu równym 18. Wyznacz długości boków tego z trójkątów, który ma najmniejszy obwód.

Polecenie 4

Korzystając z nierówności o średnich wykaż, że spośród trójkątów prostokątnych o polu równym P najmniejszy obwód ma trójkąt równoramienny i obwód ten jest równy $2\sqrt{2P} + 2\sqrt{P}$.

Sprawdź się

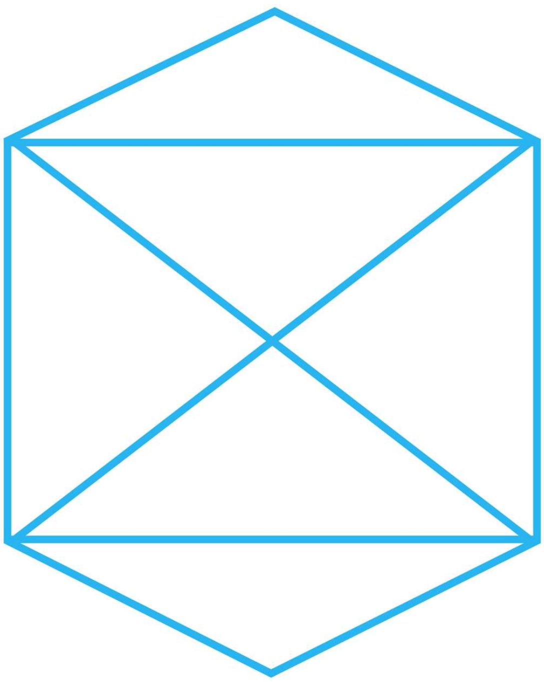
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Wykaż, że przedstawiona na rysunku figura jest łamaną, wprowadzając numerację kolejnych odcinków.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Wykaż, że iloraz izoporymetryczny figur podobnych jest sobie równy.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że spośród trapezów o danych podstawach i danej wysokości najmniejszy obwód ma trapez równoramienny.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Wielokąty – rodzaje.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3. rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
9. wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
12. przeprowadza dowody geometryczne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa łamane
- rozpoznaje figury będące sumą odcinków, które nie są łamaną
- oblicza iloraz izoperymetryczny wielokątów i porównuje obliczone ilorazy
- przeprowadza dowody geometryczne z zastosowaniem nierówności trójkąta

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna;
- gra dydaktyczna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca

1. Nauczyciel szkicuje na rysunku klasyczne problemy figur jednobieżnych, np. „otwartą kopertę”, czy graf „mostów królewieckich” i prosi uczniów o odpowiedź na pytanie, którą z nich można narysować jednym pociągnięciem ołówka. Wprowadza pojęcie figur jednobieżnych.
2. Nauczyciel podaje kryterium wykonalności krzywych unikursalnych i prosi o rozstrzygnięcie dotyczące wykonalności odpowiednich rysunków.
3. Nauczyciel przywołuje zagadnienie mostów królewieckich i postać Eulera oraz informuje o teorii grafów, jako dziedzinie matematyki.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel podaje definicję łamanej i prosi uczniów o narysowanie przykładowych łamanych. Jeśli uczniowie nie narysują wszystkich typów łamanej, to nauczyciel uzupełnia o odpowiedni rysunek.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładu figury, składającej się z odcinków, która nie jest łamaną, w sensie definicji (wskazane jest, by jednym z przykładów był graf, który nie ma cyklu Eulera – nie da się go narysować „bez odrywania ołówka od kartki”).
3. Nauczyciel wprowadza definicje łamanych różnych typów i za każdym razem prosi uczniów o podanie przykładu.
4. Nauczyciel wprowadza definicję wielokąta. W szczególności wskazuje na różnicę między wielokątem i jego brzegiem. Odwołując się do wiedzy ze szkoły podstawowej i wspominając pojęcie triangulacji, nauczyciel mówi o obwodzie i polu powierzchni wielokąta. Prosi uczniów o policzenie pola dwunastokąta foremnego. Omawia równoważność warunków wypukłości wielokąta.
5. Nauczyciel wprowadza pojęcie ilorazu izoperymetrycznego i omawia zagadnienie izoperymetryczne. Wskazuje, że w matematyce istotne jest również zagadnienie odwrotne.
6. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się ze schematem interaktywnym poświeconym klasycznemu zagadnieniu Zenodora, w ujęciu Steinera.

7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- Wielokąty, ich własności i rodzaje

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Materiał zawarty w prezentacji można zastosować jako powtórzenie przed sprawdzianem.