Trapez i jego własności

Źródło: Ivan Torres, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W bieżącym materiale przekonamy się jak dużo ciekawych własności geometrycznych można wywnioskować analizując czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.

Przedstawimy i udowodnimy warunek równoważny, związany z zagadnieniem pola, który opisuje trapez. Przeanalizujemy ważne zagadnienie nierówności między średnimi, wyznaczając długości odpowiednich odcinków równoległych do podstaw trapezu.

Materiał ten opierał się będzie głównie na wiadomościach szkoły podstawowej, co nie znaczy, że przedstawione przykłady i ćwiczenia będą łatwe.

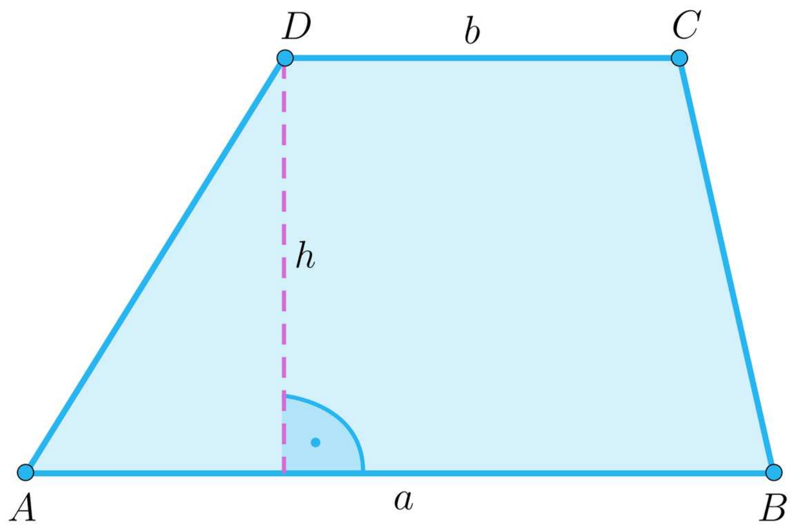
Twoje cele

- Poznasz warunek równoważny charakteryzujący trapez.
- Wykorzystasz trapez do pokazania nierówności między średnimi.
- Zastosujesz własności trapezu do rozwiązywania zadań geometrycznych.

Przeczytaj

Definicja: trapez

Czworokąt (wypukły) mający przynajmniej jedną parę boków równoległych.
Parę boków równoległych nazywa się podstawami, pozostałe boki noszą nazwę ramion, odległość między podstawami nazywa się wysokością trapezu.



Przypadki szczególne:

- **trapez równoramienny:** trapez o ramionach równej długości;
- **trapez prostokątny:** trapez, którego przynajmniej dwa kąty wewnętrzne są proste.

Teraz przytoczymy kilka własności trapezu.

Reguła: suma miar kątów wewnętrznych leżących przy tym samym ramieniu dowolnego trapezu jest równa 180°

Z powyższej własności wynika, że dwusieczne kątów wewnętrznych przy tym samym ramieniu są prostopadłe.

Już wiesz

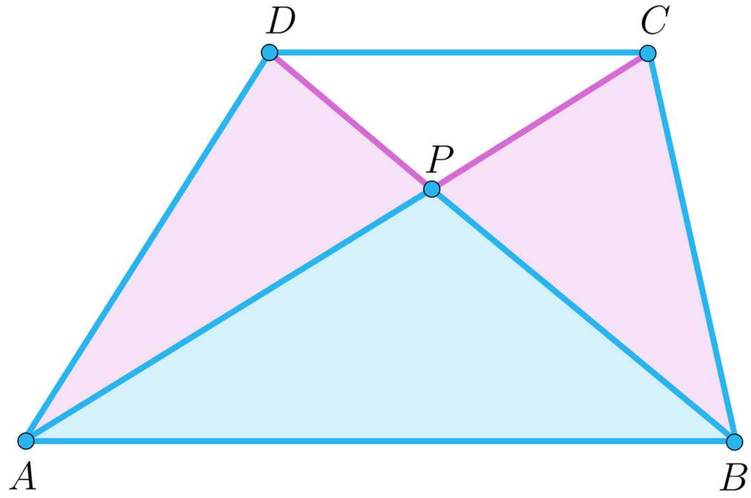
Pole trapezu to iloczyn połowy sumy długości podstaw oraz jego wysokości, zatem

$$P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h.$$

Załóżmy, że przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Udowodnimy, że można scharakteryzować trapez, dostrzegając równość pewnych pól powstałych trójkątów.

Przykład 1

Niech P oznacza punkt przecięcia przekątnych. Pokażemy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ADP i BCP mają równe pola.



Rozwiązanie

Przeanalizujmy poniższe zdania:

- $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD;
- odległości punktów C i D od prostej AB są równe;
- pola trójkątów ABC i ABD są równe;
- sumy pól trójkątów ABP i ADP oraz ABP i BCP są równe;
- pola trójkątów ADP i BCP są równe.

Równoważność powyższych zdań potwierdza przytoczoną wcześniej własność.

Przy okazji powyższego podziału na trójkąty warto zauważyć inną charakterystykę trapezu

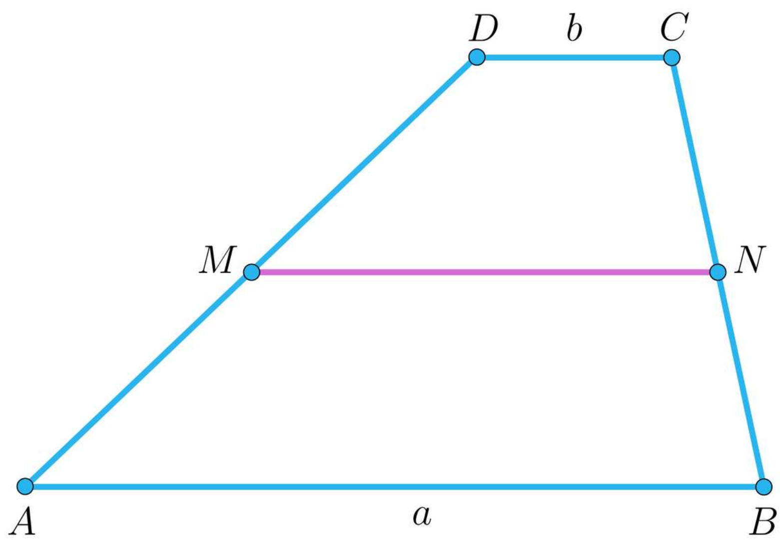
- trójkąty ABP i CDP są podobne. Wynika to wprost z twierdzenia Talesa.

Bardzo ciekawy wniosek otrzymamy po przeanalizowaniu długości pewnych odcinków równoległych do podstaw trapezu.

Na początek scharakteryzujmy, o jakie odcinki chodzi.
Przyjmijmy, że mamy dane długości podstaw trapezu $|AB| = a$, $|CD| = b$.

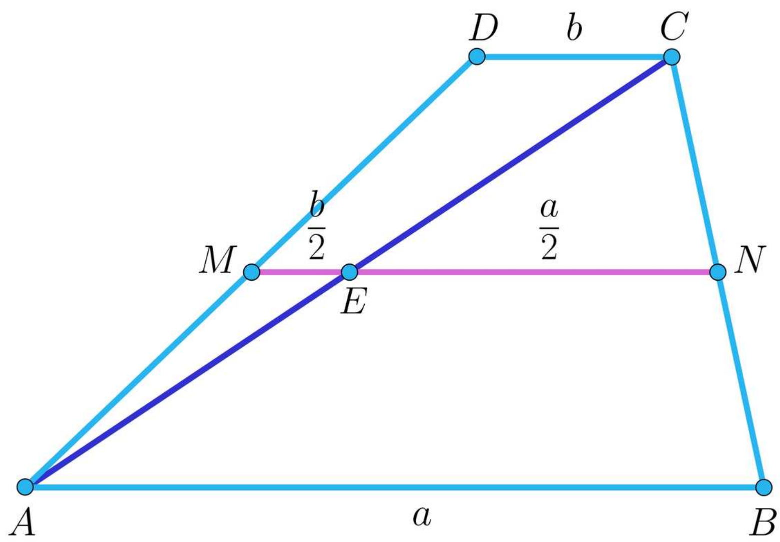
Przykład 2

Niech M będzie środkiem ramienia AD, N - środkiem ramienia BC.



Wyznaczymy długość odcinka MN.

Rozwiązanie



Przyjmijmy, że punkt E to środek przekątnej AC. Wtedy, korzystając z własności linii środkowej w trójkącie, $|EN| = \frac{a}{2}$ oraz $|ME| = \frac{b}{2}$.

Odcinki $|EN|$ i $|ME|$ są równoległe do podstaw, więc punkty M, E, N są współliniowe.

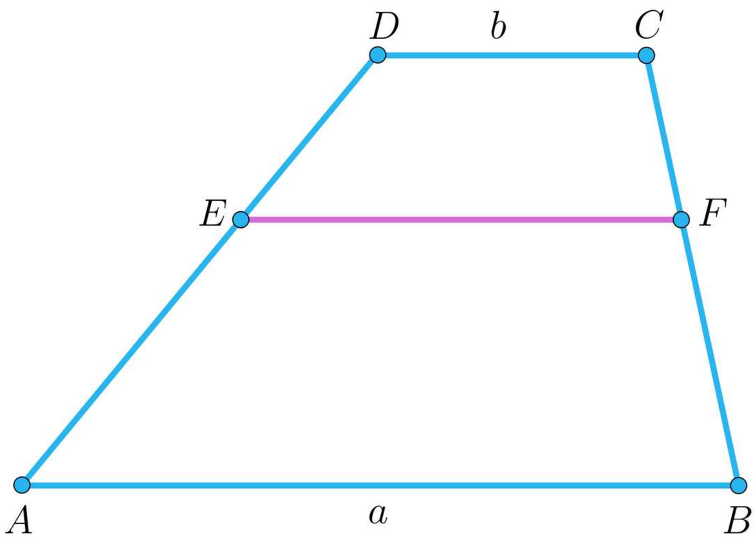
Możemy zatem obliczyć szukaną długość odcinka

$|MN| = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Przykład 3

Wyznaczymy długość odcinka EF, który jest równoległy do podstaw oraz dzieli trapez na dwa trapezy podobne.

Rozwiązanie



Ponieważ trapezy $ABFE$ i $EFCD$ są podobne, to zachodzi zależność:

$\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|EF|}{|CD|}$

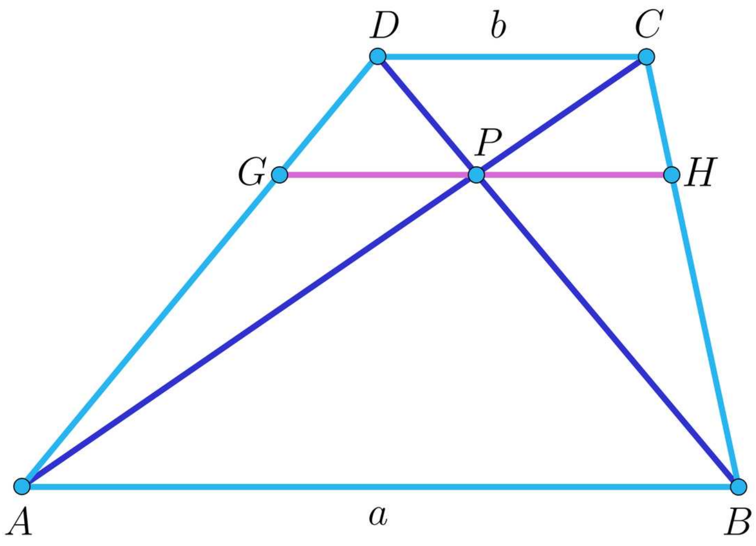
$|EF|^2 = |AB| \cdot |CD|.$

Szukana długość odcinka jest więc równa

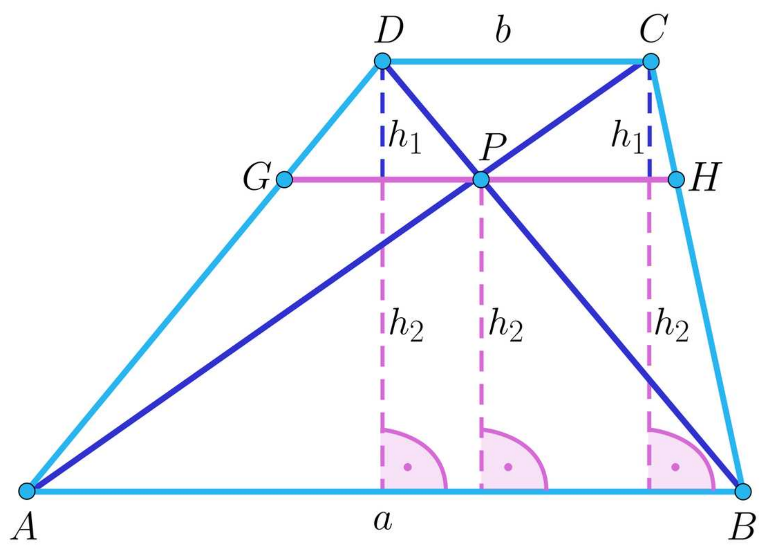
$|EF| = \sqrt{ab}.$

Przykład 4

Zastanówmy się, jaką długość ma odcinek GH, który jest równoległy do podstaw i przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu (rysunek).



Rozwiązanie



Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych trapezu.

Na początku pokażemy, że odcinki GP i PH mają równą długość.

Ponieważ trójkąty ABD i GPD są podobne (cecha kąt-kąt-kąt), to stosunki odpowiednich boków są równe stosunkom odpowiednich wysokości

$\frac{|GP|}{|AB|} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$.

Analogicznie, z podobieństwa trójkątów ABC i PHC (cecha kąt-kąt-kąt)

$\frac{|PH|}{|AB|} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$.

Ponieważ prawe strony powyższych proporcji są równe, otrzymujemy

$\frac{|GP|}{|AB|} = \frac{|PH|}{|AB|}$

$|GP| = |PH|$.

Teraz przejdźmy do wyznaczenia długości odcinka GH.

Z powyższej obserwacji wiemy, że wystarczy obliczyć długość GP. Zapiszemy jeszcze raz proporcję

$\frac{|GP|}{|AB|} = \frac{h_1}{h_1+h_2}$,

więc

$|GP| = \frac{h_1}{h_1+h_2} \cdot |AB| = \frac{h_1}{h_1+h_2} \cdot a$.

Zauważmy, że na podstawie podobieństwa trójkątów ABP i CDP (cecha kąt-kąt-kąt), możemy wyznaczyć proporcję

$\frac{b}{a} = \frac{h_1}{h_2}$.

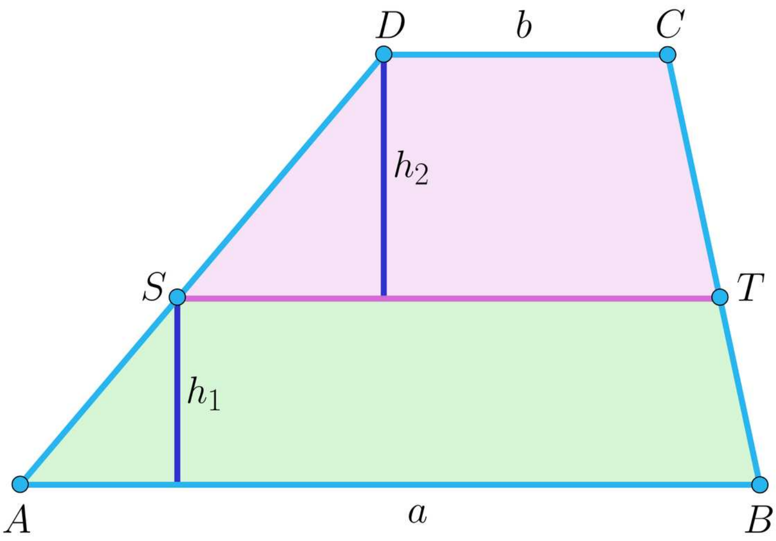
Ostatecznie otrzymujemy

$|GP| = \frac{h_1}{h_1+h_2}a = \frac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{h_1}{h_2}+\frac{h_2}{h_2}}a = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+1}a = \frac{ab}{a+b}$.

Przykład 5

Na koniec obliczymy długość odcinka ST równoległego do podstaw trapezu, który dzieli ten trapez na dwa trapezy o równych polach.

Rozwiązanie



Przyjmijmy $|ST| = x$ oraz wysokość trapezu $ABCD$ - h.

Pola trapezów $ABTS$ i $STCD$ są równe, więc ich wartość to połowa pola trapezu $ABCD$

$P_{ABTS} = \frac{1}{2}(a+x) \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2}h$,

analogicznie

$P_{STCD} = \frac{1}{2}(x+b) \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)}{2}h$.

Z powyższych równań wyznaczamy h_1 oraz h_2:

$h_1 = \frac{(a+b)}{2(a+x)}h$,

$h_2 = \frac{(a+b)}{2(b+x)}h$.

Wiemy ponadto, że $h_1 + h_2 = h$.

Zatem otrzymujemy równanie

$\frac{(a+b)}{2(a+x)}h + \frac{(a+b)}{2(b+x)}h = h,$

które po podzieleniu obustronnym przez h ma postać

$\frac{(a+b)}{2(a+x)} + \frac{(a+b)}{2(b+x)} = 1.$

Otrzymaliśmy już równanie z jedną niewiadomą x.

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

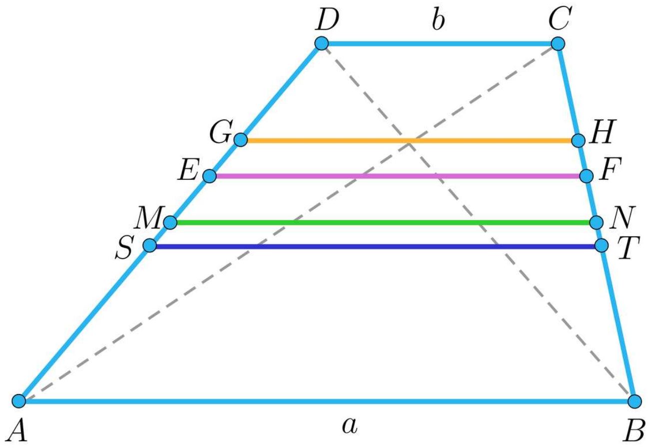
$(a+b)(b+x) + (a+b)(a+x) = 2(a+x)(b+x)$

$ab + ax + b^2 + bx + a^2 + ax + ab + bx = 2ab + 2ax + 2bx + 2x^2$

$a^2 + b^2 = 2x^2.$

Zatem długość odcinka ST jest równa $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Długości szukanych odcinków w trapezie okazały się być równe odpowiednim średnim podstaw. Podsumujmy więc powyższe przykłady.



$$|GH| = \frac{2ab}{a+b} \quad |EF| = \sqrt{ab} \quad |MN| = \frac{a+b}{2} \quad |ST| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Powyższy wniosek (nierówność) nazywamy nierównością między średnimi lub nierównością Cauchy’ego między średnimi.

Słownik

linia środkowa w trójkącie

odcinek łączący środki pewnych dwóch boków trójkąta; odcinek, który łączy środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest

równa połowie tego boku.
nierówność między średnimi

czasem nierówności Cauchy'ego między średnimi; nierówności porządkujące w ciąg nierosnący cztery średnie tj. średnią kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną wyznaczone dla tego samego układu liczb dodatnich

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

ich nazwa pochodzi od nazwiska Augustina Louisa Cauchy'ego, francuskiego matematyka

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Polecenie 2

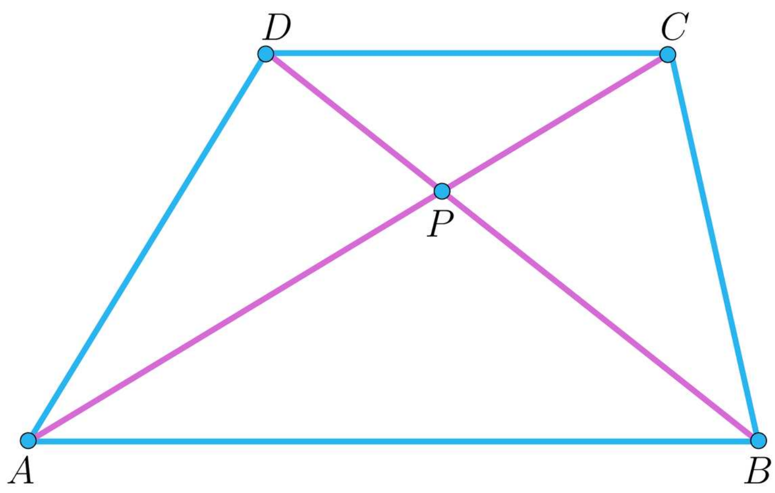
Jedno z ramion trapezu ma długość 3 a kąt przy tym ramieniu ma miarę 150°. Dwusieczna kąta dzieli trapez na dwie figury o takim samym polu. Oblicz długości podstaw trapezu jeśli ich stosunek to $3 : 5$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

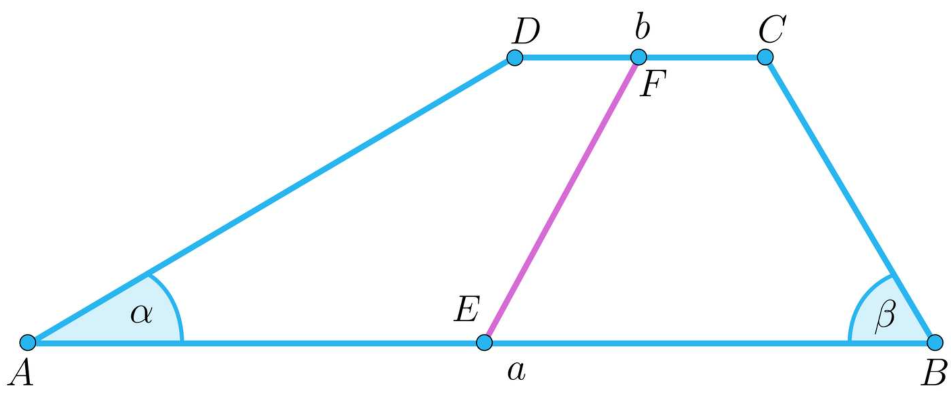
Ćwiczenie 1

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie P.



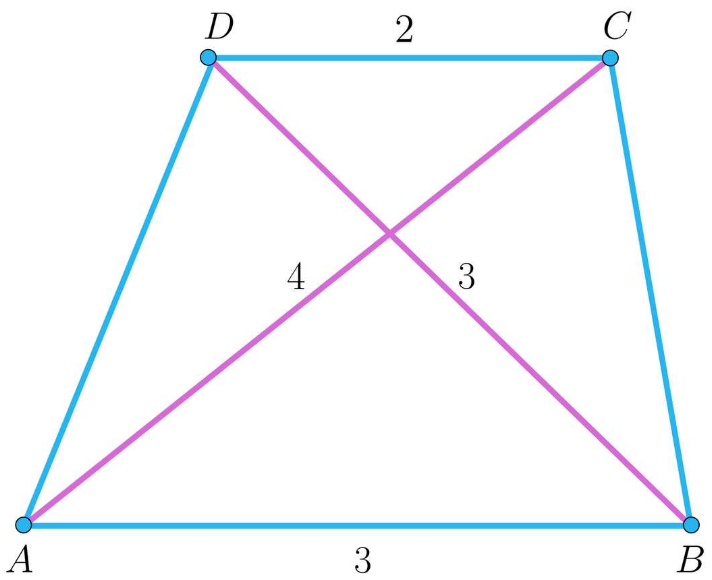
Ćwiczenie 2

Podstawy trapezu mają długości $|AB| = a$ i $|BC| = b$, $(a > b)$. Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi 90°. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.



Ćwiczenie 3

Dany jest trapez, którego podstawy mają długości 2 i 3, a przekątne długości 3 i 4.



Ćwiczenie 4

W trapezie prostokątnym $ABCD$ podstawy mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$ (gdzie $a > b$), a wysokość h. Oblicz odległość punktu przecięcia przekątnych trapezu od dłuższej podstawy.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD. Wykaż, że

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|AB| \cdot |DC|.$$

Ćwiczenie 8

W trapezie $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Niech pole trójkąta ABP będzie równe P_1, natomiast pole trójkąta CDP będzie równe P_2. Wyznacz pole trapezu $ABCD$.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Trapez i jego własności

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje warunek równoważny charakteryzujący trapez,
- wykorzystuje trapez do pokazania nierówności średnich,
- stosuje własności trapezu do rozwiązywania zadań geometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody pracy:

- pogadanka,
- sztafeta zadaniowa.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel wraz z uczniami w formie pogadanki przypomina definicję trapezu oraz poznane w szkole podstawowej wzory na obliczanie pola i obwodu trapezu.
- Nauczyciel formułuje temat i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel prezentuje przykłady z sekcji Przeczytaj, tłumaczy na co zwracać uwagę w zadaniach dotyczących własności trapezu oraz pokazuje sposoby na wyznaczanie długości odcinków zwracając uwagę na wykorzystanie ilustracji.
- Nauczyciel przedstawia twierdzenie o dwusiecznych kątów w trapezie. Uczniowie wykonują polecenie 2.
- Nauczyciel dzieli uczniów na 6-8 grup 4 osobowych. Każda z grup wykonuje ćwiczenie 1 z Sekcji Sprawdź się.
- Grupy prezentują nauczycielowi wykonane zadanie i jeśli zadanie jest wykonane prawidłowo, wykonują kolejne – jest to tzw. Sztafeta zadaniowa.
- Metodą świateł grupy sygnalizują nauczycielowi poziom zrozumienia danego zadania. Nauczyciel wspiera grupy, które mają problem z rozwiązaniem zadania.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel wraz z uczniami dokonują podsumowania sztafety. Wyłaniają zwycięzcę.
- Nauczyciel udziela każdej z grup informację zwrotną, zwracając szczególną uwagę na mocne strony i wskazując nad czym należy jeszcze popracować.

Praca domowa:

- Dokończyć ćwiczenia z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- Trapez i jego rodzaje

Wskazówki metodyczne:

Analiza prezentacji multimedialnej i wykonanie poleceń z nią związanych może być pracą domową.