



## Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

A wooden ruler and an orange pencil are positioned diagonally across a bright yellow background. The ruler is light-colored wood with black markings and numbers from 1 to 15. The pencil is a vibrant orange color. A dark grey semi-transparent box is overlaid on the ruler, containing white text.

## Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Źródło: Markus Spiske, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Ten materiał w całości poświęcony jest sposobom obliczania długości boków oraz miar kątów w trójkątach. Podstawowym narzędziem, jakie będziemy wykorzystywać, będzie twierdzenie cosinusów, choć niekiedy wykorzystywać będziemy również inne twierdzenia geometrii albo znane fakty z trygonometrii.

### Twoje cele

- Obliczysz długość boku trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków oraz jeden z jego kątów lub stwierdzisz, że taki trójkąt nie istnieje.
- Rozstrzygniesz, kiedy, przy danych dwóch odcinkach i kącie wypukłym istnieje trójkąt o takich bokach oraz takim kącie.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do obliczania miary kąta trójkąta.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do rozwiązywania problemów geometrycznych.

# Przeczytaj

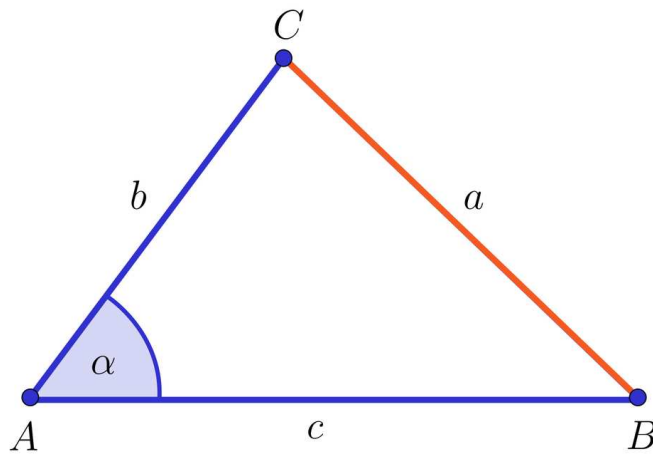
---

Na początku przedstawimy 2 modele obliczania długości trzeciego boku trójkąta przy danych dwóch bokach oraz jednym kącie tego trójkąta.

## Rozwiązywanie trójkątów (model 1)

Obliczanie długości trzeciego boku trójkąta, gdy dane są:

- długości dwóch boków tego trójkąta oraz
- kąt między tymi bokami.



Z twierdzenia cosinusów dla boku  $a$  i kąta  $\alpha$  otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Stąd:

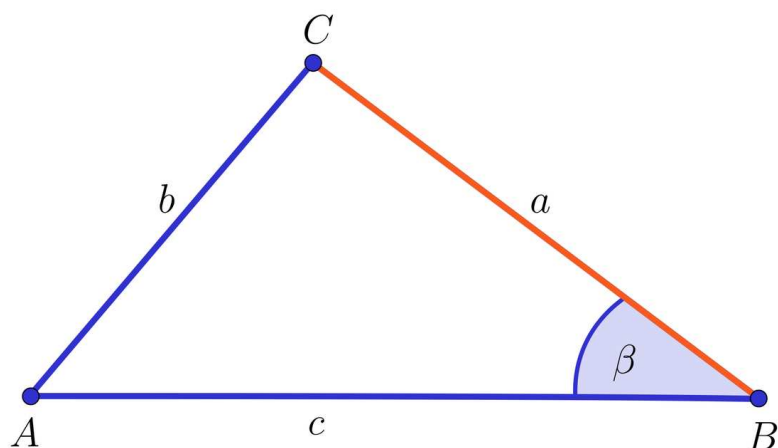
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

W tym przypadku otrzymujemy jedną wartość  $a$ .

## Rozwiązywanie trójkątów (model 2)

Obliczanie długości trzeciego boku trójkąta, gdy dane są:

- długości dwóch boków tego trójkąta oraz
- kąt między jednym z tych boków i bokiem szukanym.



### Krok 1.

Z twierdzenia cosinusów dla boku  $b$  i kąta  $\beta$  mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - (2c \cos \beta)a + (c^2 - b^2) = 0,$$

### Krok 2.

Obliczamy wyróżnik tego równania.

$$\Delta = (-2c \cos \beta)^2 - 4(c^2 - b^2)$$

### Krok 3.

Analizujemy rozwiązania tego równania.

Gdy równanie:

1. nie ma rozwiązań rzeczywistych ( $\Delta < 0$ ), to szukany trójkąt nie istnieje;
2. ma rozwiązania rzeczywiste  $a_1, a_2$ , ale żadne z nich nie jest dodatnie ( $\Delta > 0$ ;  $a_1 + a_2 = 2c \cos \beta \leq 0$ ;  $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 \geq 0$ ), to szukany trójkąt nie istnieje;
3. ma dwa rozwiązania rzeczywiste  $a_1, a_2$ , z których tylko jedno jest dodatnie ( $\Delta > 0$ ;  $a_1 + a_2 = 2c \cos \beta > 0$ ;  $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 \leq 0$ ), to istnieje tylko jeden taki trójkąt i szukany bok trójkąta ma wtedy długość  $a = c \cos \beta + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}$ ;
4. ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest nim liczba dodatnia ( $\Delta = 0$ ;  $a_0 = c \cos \beta > 0$ ), to istnieje tylko jeden taki trójkąt i szukany bok trójkąta ma wtedy długość  $a = c \cos \beta$ ;

5. ma dwa rozwiązania rzeczywiste  $a_1, a_2$  i każde z nich jest dodatnie ( $\Delta > 0$ ;  $a_1 + a_2 = 2c \cos \beta > 0$ ;  $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 > 0$ ), to istnieją dwa takie trójkąty, a szukany bok trójkąta ma wtedy długość  $a = c \cos \beta + \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}$  lub  $a = c \cos \beta - \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 \beta}$ .

### Przykład 1

Obliczymy długość boku  $a$  trójkąta, w którym dane są:  $b = 4$ ,  $c = 5$  oraz  $\alpha = 45^\circ$ .

### Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 1:  $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ .

Stąd:

$$a = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$a = \sqrt{16 + 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}} \approx 3,57.$$

### Przykład 2

Obliczymy długość boku  $a$  trójkąta, w którym dane są:  $b = 5$ ,  $c = 8$  oraz  $\beta = 60^\circ$ .

### Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku  $b$  i kąta  $\beta$  mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ + 8^2 - 5^2 = 0$$

$$a^2 - 8a + 39 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 39 < 0$$

Zatem taki trójkąt nie istnieje.

### Przykład 3

Obliczymy długość boku  $a$  trójkąta, w którym dane są:  $b = 10$ ,  $c = 21$  oraz  $\cos \beta = \frac{15}{17}$ .

### Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku  $b$  i kąta  $\beta$  mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 21 \cdot \frac{15}{17} + 21^2 - 10^2 = 0$$

$$17a^2 - 630a + 5797 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$$\Delta = 396900 - 4 \cdot 17 \cdot 5797 = 396900 - 394196 = 2704$$

$$a_1 = \frac{630-52}{34} \text{ lub } a_2 = \frac{630+52}{34}$$

Odpowiedź:

$$a = 17 \text{ lub } a = 20\frac{1}{17}.$$

#### Przykład 4

Obliczymy długość boku  $a$  trójkąta, w którym dane są:  $b = 4$ ,  $c = 7$  oraz  $\gamma = 120^\circ$ .

#### Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku  $c$  i kąta  $\gamma$  mamy:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ + 4^2 - 7^2 = 0$$

$$a^2 + 4a - 33 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-33) = 148$$

$$a_1 = \frac{-4-2\sqrt{37}}{2} < 0 \text{ lub } a_2 = \frac{-4+2\sqrt{37}}{2}$$

Odpowiedź

$$a = \sqrt{37} - 2 \approx 4,08.$$

#### Przykład 5

Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 6, a kąt między tymi bokami ma miarę  $15^\circ$ . Obliczymy długość trzeciego boku.

#### Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 1. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 15^\circ = 52 - 48 \cdot \cos 15^\circ$ , gdzie  $a$  oznacza długość trzeciego boku trójkąta. Zatem  $a = \sqrt{52 - 48 \cdot \cos 15^\circ}$ .

Pozostaje obliczyć  $\cos 15^\circ$ . Możemy oczywiście odczytać przybliżoną wartość  $\cos 15^\circ$  z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, ale wtedy otrzymamy również przybliżoną wartość  $a$ .

Obliczymy jednak dokładną wartość  $\cos 15^\circ$ . Wartość tę można uzyskać na wiele sposobów.

Pokażemy cztery sposoby.

W pierwszym wykorzystamy tożsamość trygonometryczną – wzór na cosinus podwojonego kąta, w drugim – wzór na cosinus różnicy kątów. W trzecim i czwartym sposobie wykorzystamy jedynie geometrię.

**Pierwszy sposób** obliczenia wartości  $\cos 15^\circ$ .

Wzór na cosinus podwojonego kąta ma postać  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ .

Dla  $\alpha = 15^\circ$  przybiera on postać  $\cos(2 \cdot 15^\circ) = 2 \cos^2 15^\circ - 1$ , skąd  $\cos^2 15^\circ = \frac{\cos 30^\circ + 1}{2}$ .

Ponieważ  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , a kąt  $15^\circ$  jest ostry, więc

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}.$$

**Drugi sposób** obliczenia wartości  $\cos 15^\circ$ .

Tym razem wykorzystamy wzór na cosinus różnicy kątów

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Ponieważ  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ , więc

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Może nieco dziwić otrzymany wynik, gdyż na pierwszy rzut oka jest on inny niż uzyskany w pierwszym sposobie. Tak jednak nie jest. Wystarczy zauważyć, że

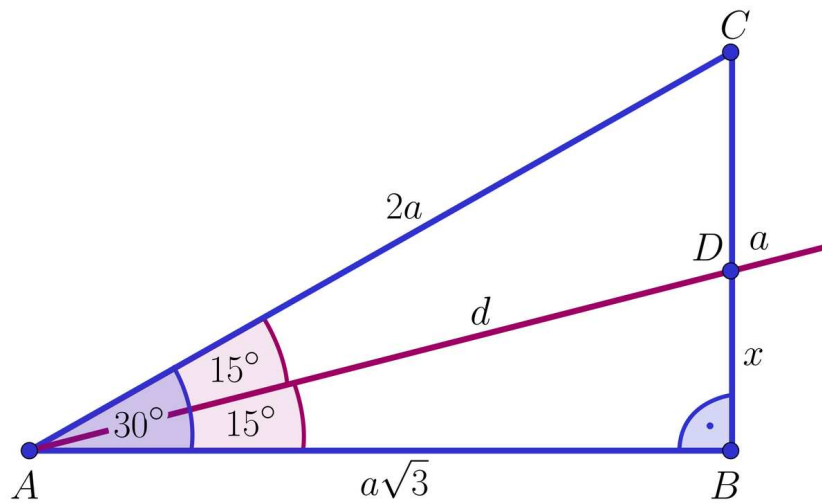
$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 2}{16}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3} + 8}{16}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}.$$

**Trzeci sposób** obliczenia wartości  $\cos 15^\circ$ .

Narysujmy trójkąt prostokątny  $ABC$  o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .

Poprowadźmy też dwusieczną  $AD$  kąta  $30^\circ$ .

Niech  $|AC| = 2a$ ,  $|BD| = x$  i  $|AD| = d$ , jak na rysunku.



Wtedy  $|BC| = a$  oraz  $|AB| = a\sqrt{3}$ , więc  $|CD| = a - x$ . Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta otrzymujemy  $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ , czyli  $\frac{x}{a-x} = \frac{a\sqrt{3}}{2a}$ .

Stąd wyznaczamy kolejno  $2x = a\sqrt{3} - x\sqrt{3}$ ,  $2x + x\sqrt{3} = a\sqrt{3}$ ,  $(2 + \sqrt{3})x = a\sqrt{3}$ .

Mnożąc obie strony tej równości przez  $2 - \sqrt{3}$  otrzymujemy  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})x = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ , czyli  $x = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABD$  otrzymujemy  $x^2 + (a\sqrt{3})^2 = d^2$ . Stąd

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{(a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}))^2 + (a\sqrt{3})^2} = \\ &= a\sqrt{3}\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} = 2a\sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

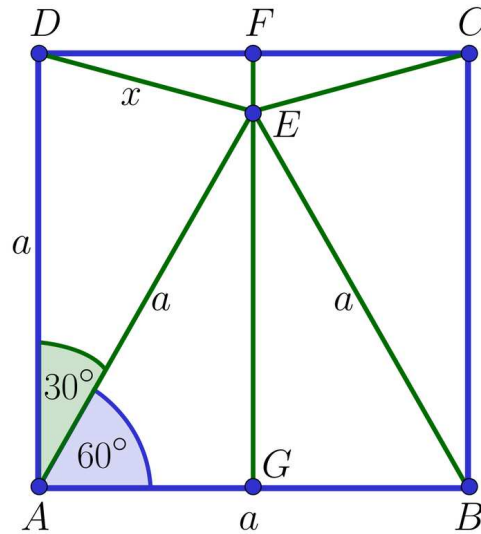
Zatem z definicji cosinusa kąta ostrego  $15^\circ$  w trójkącie prostokątnym  $ABD$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}. \end{aligned}$$

**Czwarty sposób** obliczenia wartości  $\cos 15^\circ$ .

Wewnątrz kwadratu  $ABCD$  o boku długości  $a$  wybierzmy taki punkt  $E$ , żeby trójkąt  $ABE$  był równoboczny.

Poprowadźmy też przez punkt  $E$  odcinek  $FG$  równoległy do boku  $AD$  kwadratu tak, jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt  $ABE$  jest równoboczny, więc  $|\sphericalangle DAE| = 30^\circ$  i  $|AD| = |AE| = a$ .

To oznacza, że trójkąt  $AED$  jest równoramienny, a jego kąt przy podstawie jest równy  $|\sphericalangle ADE| = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ .

To z kolei oznacza, że  $|\sphericalangle EDC| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ .

Odcinek  $GF$  jest wysokością trójkąta równobocznego  $ABE$ , więc  $|GE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , więc  $|EF| = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Punkt  $F$  jest środkiem odcinka  $CD$ , więc  $|DF| = \frac{a}{2}$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DEF$  otrzymujemy  $|DE|^2 = |EF|^2 + |DF|^2$ , czyli  $x^2 = \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ . Stąd

$$x = a\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = a\sqrt{1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Zatem z definicji cosinusa kąta ostrego  $15^\circ$  w trójkącie prostokątnym  $DEF$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}. \end{aligned}$$

Powracamy do wyznaczenia długości trzeciego boku:

$$a = \sqrt{52 - 48 \cdot \cos 15^\circ}$$

$$a = \sqrt{52 - 48 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}} = 2\sqrt{13 - 6\sqrt{\sqrt{3}+2}}$$

### Przykład 6

W trójkącie  $ABC$  dane są długości boków  $|AB| = 4$  i  $|BC| = 5$  oraz  $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4}$ , gdzie  $\beta$  oznacza miarę kąta przy wierzchołku  $B$  tego trójkąta. Obliczmy długość boku  $AC$ .

### Rozwiązanie

Do obliczenia długości boku  $AC$  wykorzystamy twierdzenie cosinusów. Długości dwóch boków trójkąta znamy, więc potrzebna jest nam jeszcze wartość cosinusa kąta  $\beta$ .

Tę wartość obliczymy, wykorzystując dwie znane tożsamości trygonometryczne

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \text{ oraz } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

Wstawiając w pierwszej z tych równości  $(-\frac{3}{4})$  w miejsce  $\operatorname{tg} \beta$  otrzymujemy równanie  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{3}{4}$ , skąd  $\sin \beta = -\frac{3}{4} \cos \beta$ .

Stąd i z drugiej tożsamości otrzymujemy

$$\left(-\frac{3}{4} \cos \beta\right)^2 + \cos^2 \beta = 1,$$

$$\frac{9}{16} \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

$$\frac{25}{16} \cos^2 \beta = 1,$$

$$\cos^2 \beta = \frac{16}{25}.$$

Stąd  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$  lub  $\cos \beta = \frac{4}{5}$ . Kąt  $\beta$  jest rozwarty, gdyż  $\operatorname{tg} \beta < 0$ . Zatem  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ .

Teraz mamy już wszystkie dane, żeby obliczyć za pomocą twierdzenia cosinusów długość boku  $AC$ .

Otrzymujemy więc

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta,$$

$$|AC|^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 73.$$

$$\text{Stąd } |AC| = \sqrt{73}.$$

### Przykład 7

Obliczmy miary kątów trójkąta o bokach długości:  $\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{3} + 2$ ,  $2$ .

### Rozwiązanie

Niech  $\alpha$  oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości  $a = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ ,  
 $\beta$  – kąt leżący naprzeciw boku o długości  $b = 2\sqrt{3} + 2$ ,  
 $\gamma$  – kąt leżący naprzeciw boku o długości  $c = 2$ .

Zastosujmy twierdzenie cosinusów dla kąta  $\alpha$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3} + 2\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \left(2\sqrt{3} + 2\right) \cdot 2 \cdot \cos \alpha,$$

$$12\sqrt{3} + 24 = 8\sqrt{3} + 16 + 4 - 8 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \cos \alpha,$$

$$4\sqrt{3} + 4 = -8 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \cos \alpha.$$

Stąd

$$\cos \alpha = -\frac{4\sqrt{3}+4}{8 \cdot (\sqrt{3}+1)} = -\frac{4 \cdot (\sqrt{3}+1)}{8 \cdot (\sqrt{3}+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem  $\alpha = 120^\circ$ .

Zastosujmy jeszcze raz twierdzenie cosinusów dla kąta  $\beta$ .

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$\left(2\sqrt{3} + 2\right)^2 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot 2 \cdot \cos \beta,$$

$$8\sqrt{3} + 16 = 12\sqrt{3} + 24 + 4 - 4 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos \beta,$$

$$-4\sqrt{3} - 12 = -4 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos \beta,$$

$$\sqrt{3} + 3 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos \beta.$$

Stąd

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem  $\beta = 45^\circ$ .

Kąt  $\gamma$  obliczymy, korzystając z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta, choć moglibyśmy ten kąt obliczyć, wykorzystując twierdzenie cosinusów. Mamy zatem:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

# Słownik

dwusieczna kąta

półprosta dzieląca kąt na dwa kąty przystające

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się w treścią zadania w Przykładzie 1. Na chwilę wstrzymaj odtwarzanie animacji i zastanów się, czy umiałabyś/umiałbyś samodzielnie rozwiązać to zadanie, wykorzystując twierdzenie cosinusów. Potem odtwórz całe rozwiązanie.

# Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpC8Bs0H7>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej obliczania długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

---




## Polecenie 2

Spróbuj rozwiązać zadanie z Przykładu 1. bez korzystania z twierdzenia cosinusów. Poprowadź w tym celu wysokość  $CE$  trójkąta  $ABC$ .

## Polecenie 3

Przeanalizuj sposób obliczania największego kąta trójkąta o danych trzech bokach omówiony w Przykładzie 2. Oblicz najmniejszy z kątów trójkąta o bokach długości  $4\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{13}$  i 5.

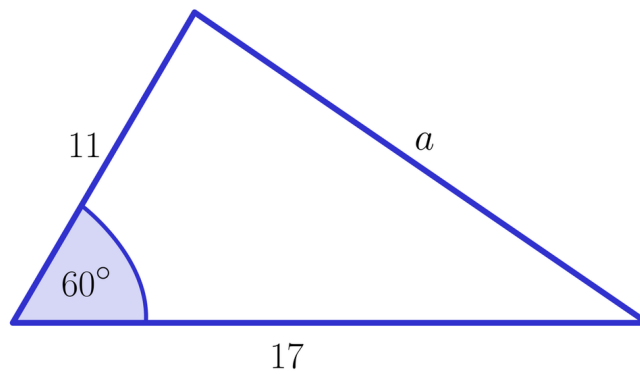
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



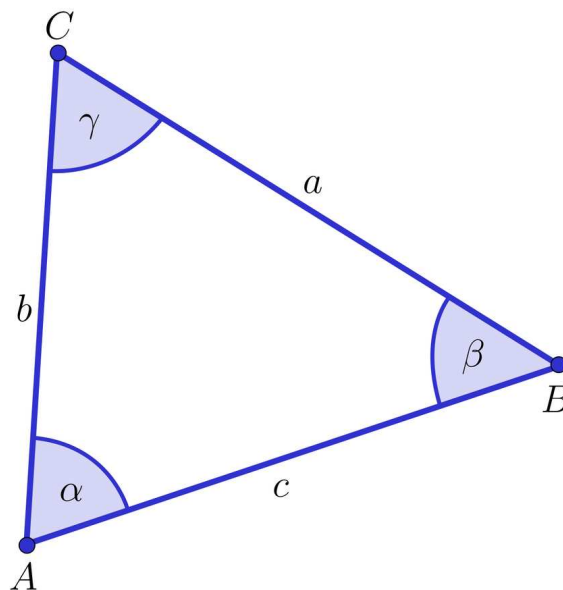
Długości dwóch boków i miara kąta między tymi bokami zostały zaznaczone na rysunku.



## Ćwiczenie 2



W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  (oznaczenia standardowe jak na rysunku)



boki mają długości:  $a = 6$ ,  $b = 5$ ,  $c = 4$ .

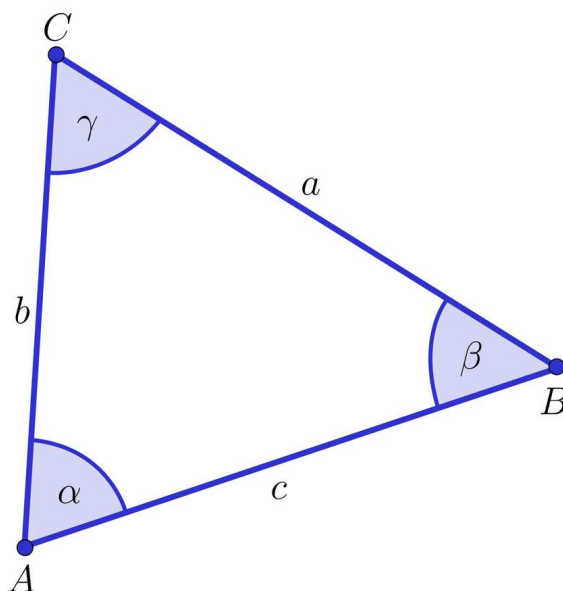
### Ćwiczenie 3



### Ćwiczenie 4



W trójkącie  $ABC$  (oznaczenia standardowe jak na rysunku) prawdziwe są równości  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin \alpha$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \beta$ .



### Ćwiczenie 5



### Ćwiczenie 6



Udowodnij, że jeśli w trójkącie stosunek długości dwóch boków jest równy podwojnemu cosinusowi kąta między tymi bokami, to ten trójkąt jest równoramienny.

### Ćwiczenie 7



Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem  $135^\circ$  a ich długości są równe 12 i 14. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

### Ćwiczenie 8



Wykaż, że długość  $m_a$  środkowej  $AD$  trójkąta  $ABC$  jest równa

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \text{ gdzie } a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|.$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Henryk Dąbrowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje twierdzenie cosinusów do obliczenia długości boku trójkąta, gdy dane są długości dwóch pozostałych boków trójkąta i jeden z kątów tego trójkąta;
- stosuje twierdzenie cosinusów do obliczenia kątów trójkąta, gdy dane są długości trzech boków trójkąta;
- przeprowadza dowody geometryczne, wykorzystując twierdzenie cosinusów.

## **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

## **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przypomina co rozumiemy, gdy mamy do czynienia z poleceniem „rozwiąż trójkąt”, a następnie prosi o wskazanie jak najmniejszej liczby danych spośród długości boków i kątów trójkąta, przy których trójkąt można rozwiązać.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie treści twierdzenia cosinusów.
3. Dzieli klasę na grupy i poleca każdej grupie zastanowienie się, w których z rozpatrywanych sytuacji można rozwiązać trójkąt, wykorzystując twierdzenie cosinusów.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zadaniem z Przykładu 1. Analizuje wraz z uczniami rozwiązanie zadania do momentu, gdy trzeba obliczyć wartość  $\cos 15^\circ$ .
2. Każdej z grup poleca obliczenie wartości  $\cos 15^\circ$ , narzucając różne sposoby rozwiązania omówione w Przykładzie 1.
3. Uczniowie przedstawiają różne sposoby obliczenia wartości  $\cos 15^\circ$ . Jedna z grup kończy zadanie z Przykładu 1, obliczając długość trzeciego boku trójkąta.
4. Nauczyciel poleca uruchomić animację i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
5. Uczniowie, kierowani przez nauczyciela rozwiązują kolejne przykłady, w których stosują twierdzenie cosinusów.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

**Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

**Praca domowa:**

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

**Materiały pomocnicze:**

[Trójkąty i ich własności](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Animację można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Animację o zastosowaniu twierdzenia cosinusów można wykorzystać także do powtórzenia materiału przed klasówką lub przez egzaminem maturalnym.