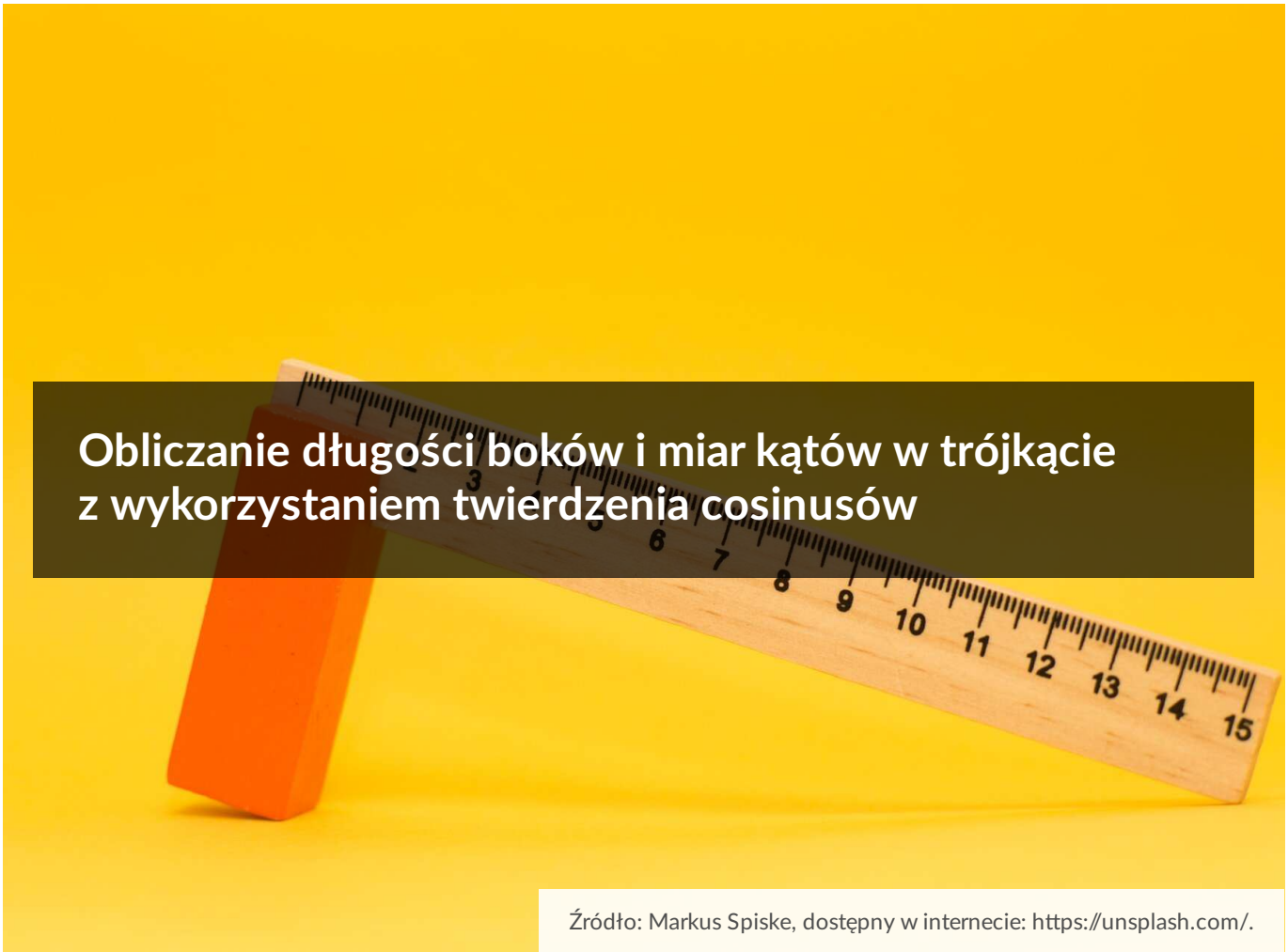
Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Markus Spiske, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Ten materiał w całości poświęcony jest sposobom obliczania długości boków oraz miar kątów w trójkątach. Podstawowym narzędziem, jakie będziemy wykorzystywać, będzie twierdzenie cosinusów, choć niekiedy wykorzystywać będziemy również inne twierdzenia geometrii albo znane fakty z trygonometrii.

Twoje cele

- Obliczysz długość boku trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków oraz jeden z jego kątów lub stwierdzisz, że taki trójkąt nie istnieje.
- Rozstrzygniesz, kiedy, przy danych dwóch odcinkach i kącie wypukłym istnieje trójkąt o takich bokach oraz takim kącie.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do obliczania miary kąta trójkąta.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do rozwiązywania problemów geometrycznych.

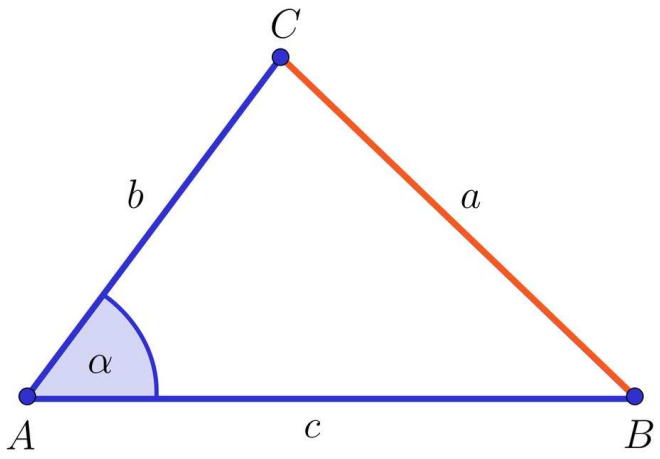
Przeczytaj

Na początku przedstawimy 2 modele obliczania długości trzeciego boku trójkąta przy danych dwóch bokach oraz jednym kącie tego trójkąta.

Rozwiązywanie trójkątów (model 1)

Obliczanie długości trzeciego boku trójkąta, gdy dane są:

- długości dwóch boków tego trójkąta oraz
- kąt między tymi bokami.



Z twierdzenia cosinusów dla boku a i kąta α otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Stąd:

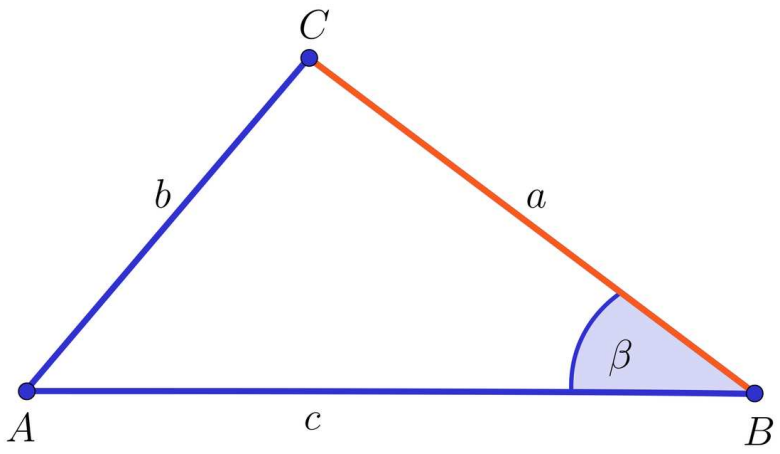
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

W tym przypadku otrzymujemy jedną wartość a.

Rozwiązywanie trójkątów (model 2)

Obliczanie długości trzeciego boku trójkąta, gdy dane są:

- długości dwóch boków tego trójkąta oraz
- kąt między jednym z tych boków i bokiem szukanym.



Krok 1.

Z twierdzenia cosinusów dla boku b i kąta β mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - (2c\cos\beta)a + \left(c^2 - b^2\right) = 0,$$

Krok 2.

Obliczamy wyróżnik tego równania.

$$\Delta = (-2c\cos\beta)^2 - 4\left(c^2 - b^2\right)$$

Krok 3.

Analizujemy rozwiązania tego równania.

Gdy równanie:

1. nie ma rozwiązań rzeczywistych ($\Delta < 0$), to szukany trójkąt nie istnieje;
2. ma rozwiązania rzeczywiste a_1, a_2, ale żadne z nich nie jest dodatnie ($\Delta > 0$; $a_1 + a_2 = 2c\cos\beta \leq 0$; $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 \geq 0$), to szukany trójkąt nie istnieje;
3. ma dwa rozwiązania rzeczywiste a_1, a_2, z których tylko jedno jest dodatnie ($\Delta > 0$; $a_1 + a_2 = 2c\cos\beta > 0$; $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 \leq 0$), to istnieje tylko jeden taki trójkąt i szukany bok trójkąta ma wtedy długość $a = c\cos\beta + \sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta}$;
4. ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest nim liczba dodatnia ($\Delta = 0$; $a_0 = c\cos\beta > 0$), to istnieje tylko jeden taki trójkąt i szukany bok trójkąta ma wtedy długość $a = c\cos\beta$;

5. ma dwa rozwiązania rzeczywiste a_1, a_2 i każde z nich jest dodatnie ($\Delta > 0$; $a_1 + a_2 = 2c\cos\beta > 0$; $a_1 \cdot a_2 = c^2 - b^2 > 0$), to istnieją dwa takie trójkąty, a szukany bok trójkąta ma wtedy długość $a = c\cos\beta + \sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta}$ lub $a = c\cos\beta - \sqrt{b^2 - c^2\sin^2\beta}$.

Przykład 1

Obliczymy długość boku a trójkąta, w którym dane są: $b = 4$, $c = 5$ oraz $\alpha = 45^\circ$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 1: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

Stąd:

$$a = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ}$$

$$a = \sqrt{16 + 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}} \approx 3,57.$$

Przykład 2

Obliczymy długość boku a trójkąta, w którym dane są: $b = 5$, $c = 8$ oraz $\beta = 60^\circ$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku b i kąta β mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ + 8^2 - 5^2 = 0$$

$$a^2 - 8a + 39 = 0$$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 39 < 0$$

Zatem taki trójkąt nie istnieje.

Przykład 3

Obliczymy długość boku a trójkąta, w którym dane są: $b = 10$, $c = 21$ oraz $\cos\beta = \frac{15}{17}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku b i kąta β mamy:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$a^2 - 2 \cdot a \cdot 21 \cdot \frac{15}{17} + 21^2 - 10^2 = 0$

$17a^2 - 630a + 5797 = 0$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$\Delta = 396900 - 4 \cdot 17 \cdot 5797 = 396900 - 394196 = 2704$

$a_1 = \frac{630-52}{34}$ lub $a_2 = \frac{630+52}{34}$

Odpowiedź:

$a = 17$ lub $a = 20\frac{1}{17}$.

Przykład 4

Obliczymy długość boku a trójkąta, w którym dane są: $b = 4$, $c = 7$ oraz $\gamma = 120^\circ$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 2. Z twierdzenia cosinusów dla boku c i kąta γ mamy:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe:

$a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ + 4^2 - 7^2 = 0$

$a^2 + 4a - 33 = 0$

Obliczamy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego:

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-33) = 148$

$a_1 = \frac{-4-2\sqrt{37}}{2} < 0$ lub $a_2 = \frac{-4+2\sqrt{37}}{2}$

Odpowiedź

$a = \sqrt{37} - 2 \approx 4,08$.

Przykład 5

Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 6, a kąt między tymi bokami ma miarę 15°. Obliczymy długość trzeciego boku.

Rozwiązanie

Skorzystamy z modelu 1. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 15^\circ = 52 - 48 \cdot \cos 15^\circ$, gdzie a oznacza długość trzeciego boku trójkąta. Zatem $a = \sqrt{52 - 48 \cdot \cos 15^\circ}$.

Pozostaje obliczyć $\cos 15^\circ$. Możemy oczywiście odczytać przybliżoną wartość $\cos 15^\circ$ z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, ale wtedy otrzymamy również przybliżoną wartość a.

Obliczymy jednak dokładną wartość $\cos 15^\circ$. Wartość tę można uzyskać na wiele sposobów.

Pokażemy cztery sposoby.

W pierwszym wykorzystamy tożsamość trygonometryczną – wzór na cosinus podwojonego kąta, w drugim – wzór na cosinus różnicy kątów. W trzecim i czwartym sposobie wykorzystamy jedynie geometrię.

Pierwszy sposób obliczenia wartości $\cos 15^\circ$.

Wzór na cosinus podwojonego kąta ma postać $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$.

Dla $\alpha = 15^\circ$ przybiera on postać $\cos(2 \cdot 15^\circ) = 2\cos^2 15^\circ - 1$, skąd $\cos^2 15^\circ = \frac{\cos 30^\circ + 1}{2}$.

Ponieważ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a kąt 15° jest ostry, więc
$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Drugi sposób obliczenia wartości $\cos 15^\circ$.

Tym razem wykorzystamy wzór na cosinus różnicy kątów

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Ponieważ $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, więc

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Może nieco dziwić otrzymany wynik, gdyż na pierwszy rzut oka jest on inny niż uzyskany w pierwszym sposobie. Tak jednak nie jest. Wystarczy zauważyć, że

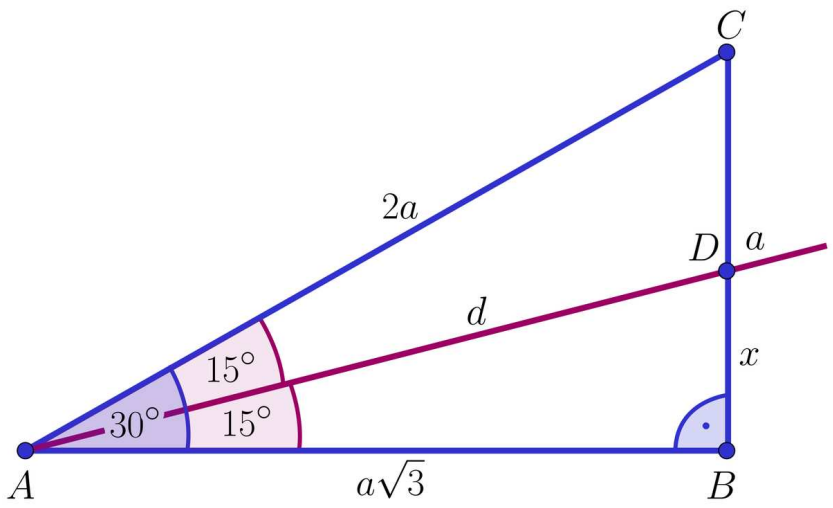
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+2}{16}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}+8}{16}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Trzeci sposób obliczenia wartości $\cos 15^\circ$.

Narysujmy trójkąt prostokątny ABC o kątach ostrych 30° i 60°.

Poprowadźmy też dwusieczną AD kąta 30°.

Niech $|AC| = 2a$, $|BD| = x$ i $|AD| = d$, jak na rysunku.



Wtedy $|BC| = a$ oraz $|AB| = a\sqrt{3}$, więc $|CD| = a - x$. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta otrzymujemy $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, czyli $\frac{x}{a-x} = \frac{a\sqrt{3}}{2a}$.

Stąd wyznaczamy kolejno $2x = a\sqrt{3} - x\sqrt{3}$, $2x + x\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)x = a\sqrt{3}$.

Mnożąc obie strony tej równości przez $2-\sqrt{3}$ otrzymujemy
$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)x = a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$, czyli $x = a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD otrzymujemy $x^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = d^2$. Stąd

$$d = \sqrt{x^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= a\sqrt{3}\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2a\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Zatem z definicji cosinusa kąta ostrego 15° w trójkącie prostokątnym ABD otrzymujemy

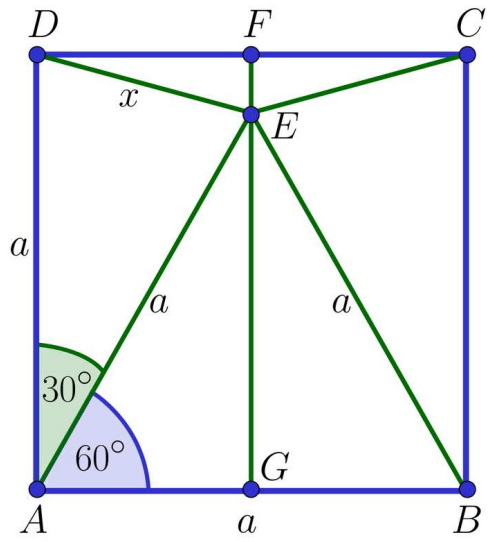
$$\cos 15^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} =$$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Czwarty sposób obliczenia wartości $\cos 15^\circ$.

Wewnątrz kwadratu $ABCD$ o boku długości a wybierzmy taki punkt E, żeby trójkąt ABE był równoboczny.

Poprowadźmy też przez punkt E odcinek FG równoległy do boku AD kwadratu tak, jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt ABE jest równoboczny, więc $|\sphericalangle DAE| = 30^\circ$ i $|AD| = |AE| = a$.

To oznacza, że trójkąt AED jest równoramienny, a jego kąt przy podstawie jest równy $|\sphericalangle ADE| = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

To z kolei oznacza, że $|\sphericalangle EDC| = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Odcinek GF jest wysokością trójkąta równobocznego ABE, więc $|GE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, więc $|EF| = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Punkt F jest środkiem odcinka CD, więc $|DF| = \frac{a}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEF otrzymujemy $|DE|^2 = |EF|^2 + |DF|^2$, czyli $x^2 = \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Stąd

$$x = a\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = a\sqrt{1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Zatem z definicji cosinusa kąta ostrego 15° w trójkącie prostokątnym DEF otrzymujemy

$\cos 15^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$

Powracamy do wyznaczenia długości trzeciego boku:

$a = \sqrt{52 - 48 \cdot \cos 15^\circ}$

$a = \sqrt{52 - 48 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}} = 2\sqrt{13 - 6\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

Przykład 6

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 4$ i $|BC| = 5$ oraz $\operatorname{tg}\beta = -\frac{3}{4}$, gdzie β oznacza miarę kąta przy wierzchołku B tego trójkąta. Obliczymy długość boku AC.

Rozwiązanie

Do obliczenia długości boku AC wykorzystamy twierdzenie cosinusów. Długości dwóch boków trójkąta znamy, więc potrzebna jest nam jeszcze wartość cosinusa kąta β.

Tę wartość obliczymy, wykorzystując dwie znane tożsamości trygonometryczne

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ oraz $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

Wstawiając w pierwszej z tych równości $\left(-\frac{3}{4}\right)$ w miejsce $\operatorname{tg}\beta$ otrzymujemy równanie $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\frac{3}{4}$, skąd $\sin\beta = -\frac{3}{4}\cos\beta$.

Stąd i z drugiej tożsamości otrzymujemy

$\left(-\frac{3}{4}\cos\beta\right)^2 + \cos^2\beta = 1,$

$\frac{9}{16}\cos^2\beta + \cos^2\beta = 1,$

$\frac{25}{16}\cos^2\beta = 1,$

$\cos^2\beta = \frac{16}{25}.$

Stąd $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ lub $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Kąt β jest rozwarty, gdyż $\operatorname{tg}\beta < 0$. Zatem $\cos\beta = -\frac{4}{5}$.

Teraz mamy już wszystkie dane, żeby obliczyć za pomocą twierdzenia cosinusów długość boku AC.

Otrzymujemy więc

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\beta,$

$|AC|^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 73.$

Stąd $|AC| = \sqrt{73}$.

Przykład 7

Obliczymy miary kątów trójkąta o bokach długości: $\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3} + 2$, 2.

Rozwiązanie

Niech α oznacza kąt trójkąta leżący naprzeciw boku o długości $a = \sqrt{6} + 3\sqrt{2}$,
β – kąt leżący naprzeciw boku o długości $b = 2\sqrt{3} + 2$,
γ – kąt leżący naprzeciw boku o długości $c = 2$.

Zastosujmy twierdzenie cosinusów dla kąta α.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$

$\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3} + 2\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \left(2\sqrt{3} + 2\right) \cdot 2 \cdot \cos\alpha,$

$12\sqrt{3} + 24 = 8\sqrt{3} + 16 + 4 - 8 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \cos\alpha,$

$4\sqrt{3} + 4 = -8 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \cos\alpha.$

Stąd

$\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{3}+4}{8\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = -\frac{4\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{8\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$

Zatem $\alpha = 120^\circ$.

Zastosujmy jeszcze raz twierdzenie cosinusów dla kąta β.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$

$\left(2\sqrt{3} + 2\right)^2 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot 2 \cdot \cos\beta,$

$8\sqrt{3} + 16 = 12\sqrt{3} + 24 + 4 - 4 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos\beta,$

$-4\sqrt{3} - 12 = -4 \cdot \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos\beta,$

$\sqrt{3} + 3 = \left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \cos\beta.$

Stąd

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zatem $\beta = 45^\circ$.

Kąt γ obliczymy, korzystając z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta, choć moglibyśmy ten kąt obliczyć, wykorzystując twierdzenie cosinusów. Mamy zatem:

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Słownik

dwusieczna kąta

półprosta dzieląca kąt na dwa kąty przystające

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się w treścią zadania w Przykładzie 1. Na chwilę wstrzymaj odtwarzanie animacji i zastanów się, czy umiałabyś/umiałbyś samodzielnie rozwiązać to zadanie, wykorzystując twierdzenie cosinusów. Potem odtwórz całe rozwiązanie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DpC8Bs0H7

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej obliczania długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

---

Polecenie 2

Spróbuj rozwiązać zadanie z Przykładu 1. bez korzystania z twierdzenia cosinusów. Poprowadź w tym celu wysokość CE trójkąta ABC.

Polecenie 3

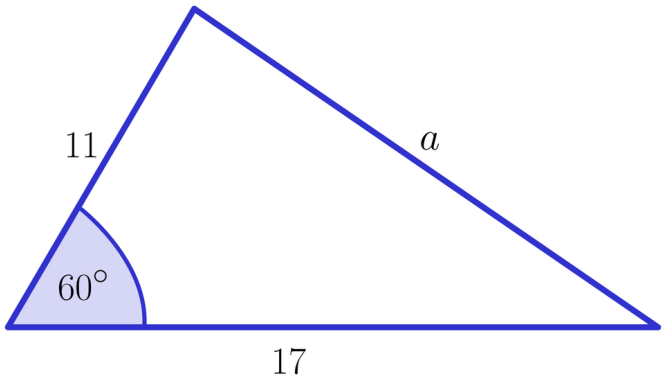
Przeanalizuj sposób obliczania największego kąta trójkąta o danych trzech bokach omówiony w Przykładzie 2. Oblicz najmniejszy z kątów trójkąta o bokach długości $4\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ i 5.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Długości dwóch boków i miara kąta między tymi bokami zostały zaznaczone na rysunku.

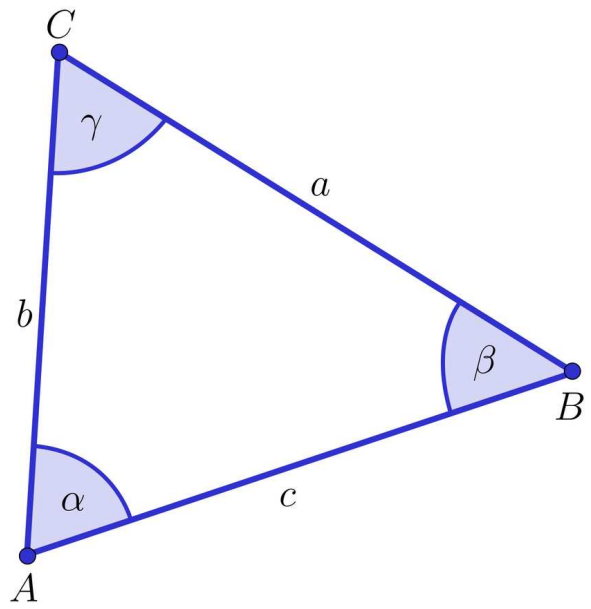


Zaznacz poprawną odpowiedź. Długość a trzeciego boku tego trójkąta jest liczbą należącą do przedziału:

- $(14,\ 15)$.
- $(12,\ 13)$.
- $(15,\ 16)$.
- $(13,\ 14)$.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ostrokątnym ABC (oznaczenia standardowe jak na rysunku)



boki mają długości: $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$.

Uzupełnij, przeciągając odpowiedni przedział, tak, żeby otrzymać zdania prawdziwe.

$\alpha \in$ ____

$\beta \in$ ____

$\gamma \in$ ____

$\langle 70^\circ,\ 80^\circ)$ | $\langle 20^\circ,\ 30^\circ)$ | $\langle 50^\circ,\ 60^\circ)$ | $\langle 30^\circ,\ 40^\circ)$ | $\langle 10^\circ,\ 20^\circ)$ | $\langle 80^\circ,\ 90^\circ)$ | $\langle 40^\circ,\ 50^\circ)$ | $\langle 60^\circ,\ 70^\circ)$

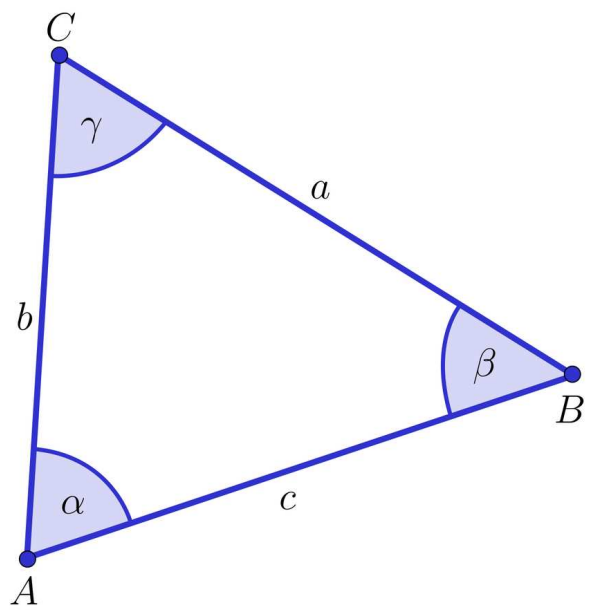
Ćwiczenie 3

Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczby całkowite ustawione w kolejności rosnącej: 7, 11, x są długościami boków trójkąta ostrokątnego. Wynika stąd, że:

- jest tylko jedna taka trójka liczb.
- są dokładnie trzy takie trójki liczb.
- taka trójka liczb nie istnieje.
- takich trójek liczb jest nieskończenie wiele.
- są dokładnie dwie takie trójki liczb.

Ćwiczenie 4

W trójkącie ABC (oznaczenia standardowe jak na rysunku) prawdziwe są równości $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\sin\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin\beta$.



Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Trójkąt ABC jest prostokątny.
- [ ] Trójkąt ABC jest rozwartokątny.
- [ ] Jeden z kątów trójkąta ABC jest dwa razy większy od drugiego z kątów tego trójkąta.
- [ ] Trójkąt ABC jest równoboczny.
- [ ] Trójkąt ABC jest równoramienny.

Ćwiczenie 5

Zaznacz fałszywą odpowiedź. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 8$, $|BC| = 7$ i $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Wynika stąd, że:

- długość boku AC tego trójkąta może być liczbą niewymierną.
- długość boku AC tego trójkąta może być równa 5.
- długość boku AC tego trójkąta jest liczbą pierwszą.

Ćwiczenie 6

Udowodnij, że jeśli w trójkącie stosunek długości dwóch boków jest równy podwojonemu cosinusowi kąta między tymi bokami, to ten trójkąt jest równoramienny.

Ćwiczenie 7

Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 135° a ich długości są równe 12 i 14. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że długość m_a środkowej AD trójkąta ABC jest równa $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, gdzie $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie długości boków i miar kątów w trójkącie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje twierdzenie cosinusów do obliczenia długości boku trójkąta, gdy dane są długości dwóch pozostałych boków trójkąta i jeden z kątów tego trójkąta;
- stosuje twierdzenie cosinusów do obliczenia kątów trójkąta, gdy dane są długości trzech boków trójkąta;
- przeprowadza dowody geometryczne, wykorzystując twierdzenie cosinusów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przypomina co rozumiemy, gdy mamy do czynienia z poleceniem „rozwiąż trójkąt", a następnie prosi o wskazanie jak najmniejszej liczby danych spośród długości boków i kątów trójkąta, przy których trójkąt można rozwiązać.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie treści twierdzenia cosinusów.
3. Dzieli klasę na grupy i poleca każdej grupie zastanowienie się, w których z rozpatrywanych sytuacji można rozwiązać trójkąt, wykorzystując twierdzenie cosinusów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zadaniem z Przykładu 1. Analizuje wraz z uczniami rozwiązanie zadania do momentu, gdy trzeba obliczyć wartość $\cos 15^\circ$.
2. Każdej z grup poleca obliczenie wartości $\cos 15^\circ$, narzucając różne sposoby rozwiązania omówione w Przykładzie 1.
3. Uczniowie przedstawiają różne sposoby obliczenie wartości $\cos 15^\circ$. Jedna z grup kończy zadanie z Przykładu 1, obliczając długość trzeciego boku trójkąta.
4. Nauczyciel poleca uruchomić animację i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
5. Uczniowie, kierowani przez nauczyciela rozwiązują kolejne przykłady, w których stosują twierdzenie cosinusów.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

Trójkąty i ich własności

Wskazówki metodyczne:

Animację można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Animację o zastosowaniu twierdzenia cosinusów można wykorzystać także do powtórzenia materiału przed klasówką lub przez egzaminem maturalnym.