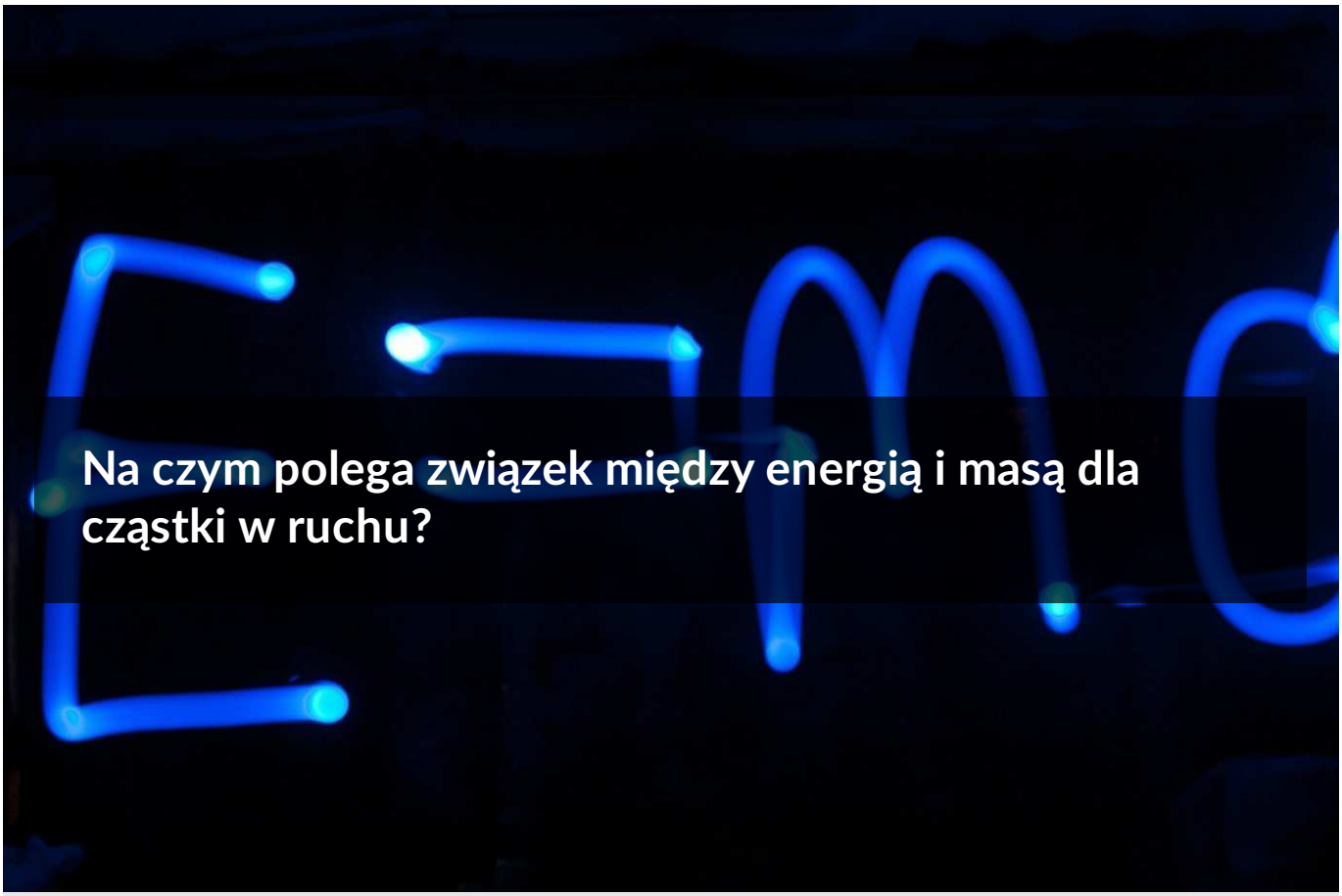
Na czym polega związek między energią i masą dla cząstki w ruchu?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: https://pixabay.com/pl/photos/matematyka-e-r%c3%b3wna-si%c4%99-mc-kwadrat-390786/ [dostęp 21.04.2022 r.].

Czy to nie ciekawe?

Przyzwyczajeni jesteśmy do klasycznego wzoru opisującego związek między prędkością cząstki a energią ruchu, nazywaną energię kinetyczną, w postaci $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$. Wzór ten można wyprowadzić, wyznaczając pracę wykonaną przy rozpędzaniu ciała przez wypadkową sił zewnętrznych działających na ciało. Jaki uzyskuje się wzór, jeżeli siłę opiszemy klasycznym wzorem w tak zwanej postaci uogólnionej $\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}$, ale pęd występujący we wzorze opiszemy wzorem relatywistycznym $\overrightarrow{p} = \frac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$? Dowiesz się tego w tym e-materiale.

Twoje cele

- dowiesz się, jaki wzór opisuje relatywistyczną energię kinetyczną,
- poznasz różnice między klasyczną i relatywistyczną energią kinetyczną,
- zrozumiesz, dlaczego klasyczny wzór na energię kinetyczną ma ograniczone zastosowania,
- zastosujesz zdobytą wiedzę w analizie zjawisk,
- przeanalizujesz i zinterpretujesz wzór opisujący relatywistyczną energię kinetyczną.

Przeczytaj

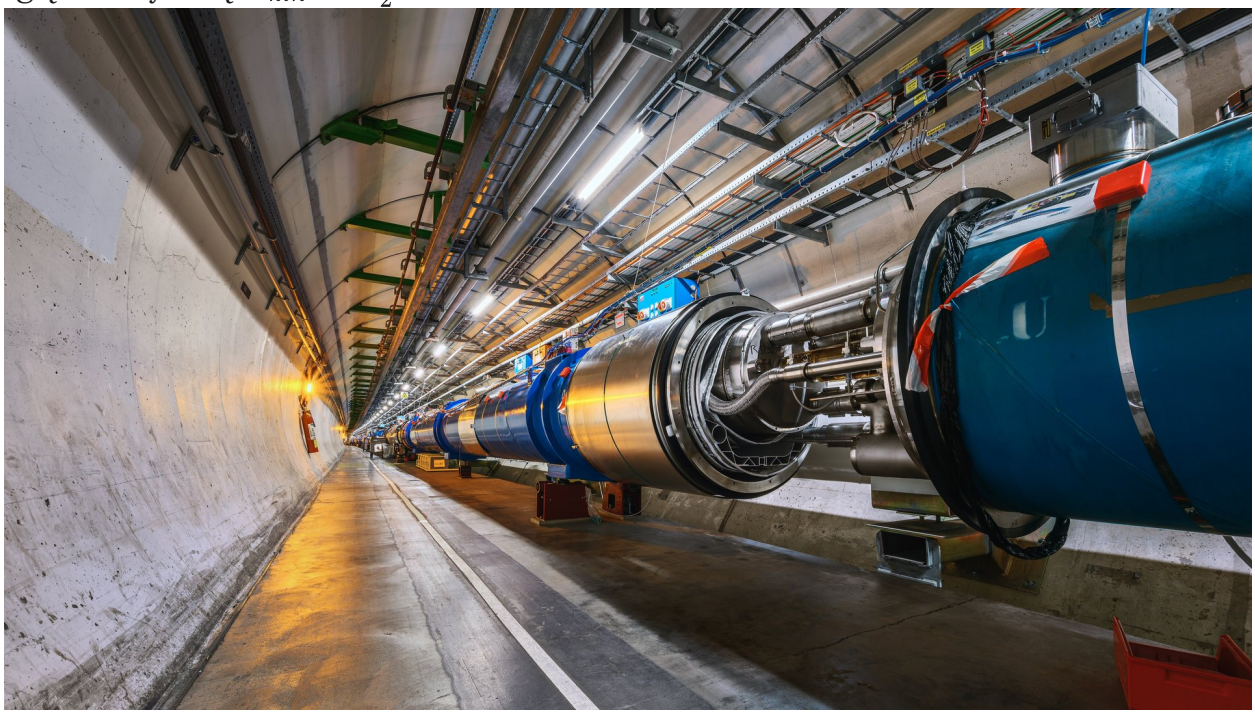
Warto przeczytać

Albert Einstein wyprowadził wzór na relatywistyczną energię kinetyczną jako pracę wykonaną przy rozpędzaniu ciała przez wypadkową sił zewnętrznych. Uwzględniając efekty wynikające z dużych prędkości ciała, otrzymał zależność:

$$E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2, \qquad (1)$$

gdzie E_{kin} to energia kinetyczna ciała, m – masa ciała, v – prędkość ciała, c – prędkość światła w próżni. We wzorze tym pojawiła się wielkość mc^2 niezależna od prędkości ciała, związana z masą ciała. Wielkość tę Einstein zinterpretował jako energię wynikającą z masy ciała i niezależną od jego ruchu i oddziaływań. Energia ta została nazwana **energią spoczynkową**.

Wzór relatywistyczny na energię kinetyczną nie bardzo przypomina klasyczny wzór na energię kinetyczną $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$.



Rys. 1. Wielki zderzacz hadronów (LHC), w którym cząstki rozpędzane są do prędkości porównywalnych z prędkością światła i należy przez to w ich opisie uwzględniać efekty relatywistyczne. Różnice między wynikami klasycznymi a realistycznymi będziecie mogli sami porównać w rozdziale "Sprawdź się".

Jednak przekształcając wzór (1) i stosując przybliżenie dla małych prędkości możemy otrzymać postać, którą bardzo dobrze znasz z wcześniejszej nauki. Oto wyprowadzenie:

$$E_{kin} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right).$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika wyrażenie w nawiasie, otrzymujemy:

$$E_{kin} = mc^2\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Następnie mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie $1+\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$otrzymamy:

$$E_{kin} = mc^2\frac{1-1+\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Po kolejnych przekształceniach i skróceniu c^2

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Dla $v \ll c$, wyrażenie $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ niewiele różni się od zera, możemy to wyrażenie pominąć i wówczas w mianowniku pozostaje 2. Zatem otrzymamy:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2},$$

czyli wzór klasyczny na energię kinetyczną.

Z przedstawionego wyprowadzenia wynika że, wzór klasyczny jest przybliżeniem wzoru relatywistycznego dla prędkości obiektu dużo mniejszych od prędkości świata w próżni. Zatem dla typowych prędkości, z jakimi mamy do czynienia na co dzień, energię kinetyczną zupełnie poprawnie opisuje klasyczny wzór, do którego się przyzwyczailiśmy.

Postawmy pytanie: jaka jest graniczna prędkość, powyżej której konieczne staje się stosowanie wzoru relatywistycznego? Oczywiście zależy to od dokładności interesujących nas obliczeń. Sprawdźmy, jaka będzie różnica w wyniku obliczeń energii kinetycznej przy podstawieniu wartości liczbowych do wzoru relatywistycznego i do wzoru klasycznego na przykład dla wartości $v = 0,1c$.

Wyrazimy w procentach różnicę otrzymanych wyników. W tym celu obliczamy wartość wyrażenia:

$$k = \frac{E_{rel}-E_{klas}}{E_{klas}},$$

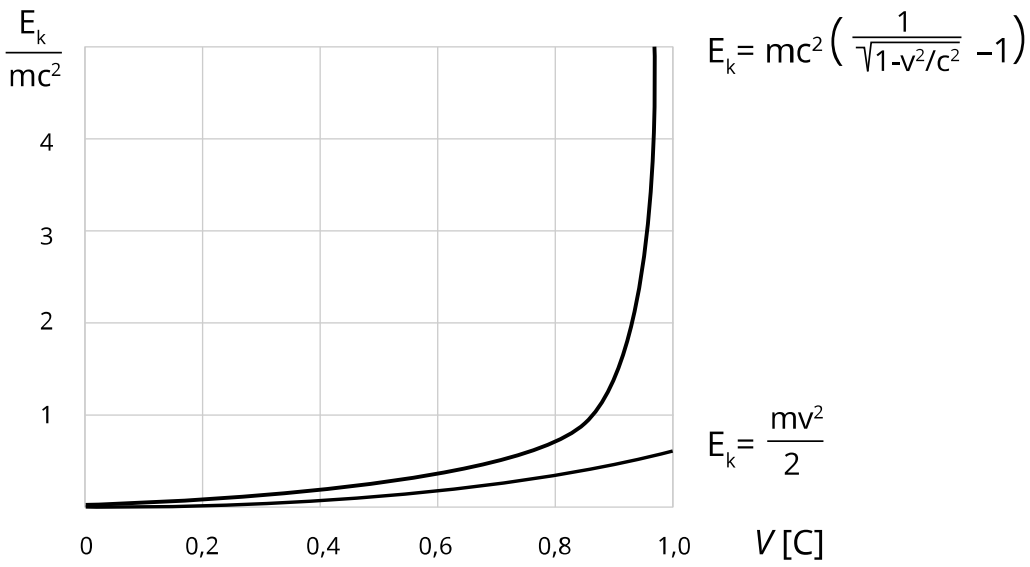
gdzie E_{rel} – to energia kinetyczna obliczona na podstawie wzoru relatywistycznego, E_{klas} – energia kinetyczna obliczona ze wzoru klasycznego. Podstawiając odpowiednie wyrażenia otrzymujemy:

$$k = \frac{mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-1\right)-\frac{mv^2}{2}}{\frac{mv^2}{2}}.$$

Dla $v = 0,1c$ otrzymujemy wartość 0,00756. Czyli przy prędkości ciała równej 10% prędkości światła otrzymujemy różnicę miedzy wynikami uzyskanymi na podstawie wzoru relatywistycznego i wzoru klasycznego na energie kinetyczną o wartości poniżej 1%.

Dla ilustracji wpływu prędkości ciała na energię kinetyczną na Rys. 2. przedstawione zostały wykresy zależności energii kinetycznej od prędkości dla dwóch sposobów obliczenia energii kinetycznej: ze wzoru klasycznego: $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$ i ze wzoru relatywistycznego

$$E_{kin} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right).$$



Rys. 2. Zależność energii kinetycznej ciała od prędkości. Wartość prędkości v (oś pozioma) jest podana w stosunku do prędkości światła – zatem wartość 1 na osi poziomej oznacza że prędkość ciała jest równa prędkości światła. Wartość energii jest odniesiona do energii spoczynkowej ciała $E = mc^2$. Dla ciała o masie 1 kg, 1 na pionowej osi odpowiada energii $9 \cdot 10^{16}$ J.

Wykres pokazuje, że istotne różnice w wartości energii kinetycznej obliczonej na postawie wzoru relatywistycznego i klasycznego pojawiają się przy prędkościach ciała około $0,2c$. Natomiast dla prędkości dążącej do prędkości światła, energia kinetyczna dąży do nieskończoności. Pokazuje to również, że prędkość światła jest niemożliwa do osiągnięcia przez obiekty obdarzone masą, gdyż przy prędkości światła ich energia stawałaby się nieskończenie duża. Jest zatem prędkością graniczną dla obiektów materialnych.

Słowniczek

Pęd relatywistyczny

(ang. *relativistic momentum*) – pęd zdefiniowany wzorem $\overrightarrow{p} = \frac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, który uwzględnia efekty związane z dużymi prędkościami.

Akcelerator

(ang. *accelerator*) – urządzenie służące do przyspieszania cząstek elementarnych lub jonów do prędkości bliskich prędkości światła w próżni. Cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym są przyspieszane w polu elektrycznym.

Układ odniesienia

(ang. *reference frame*) – punkt lub układ punktów w przestrzeni, względem którego określa się położenie lub zmianę położenia (ruch) danego ciała.

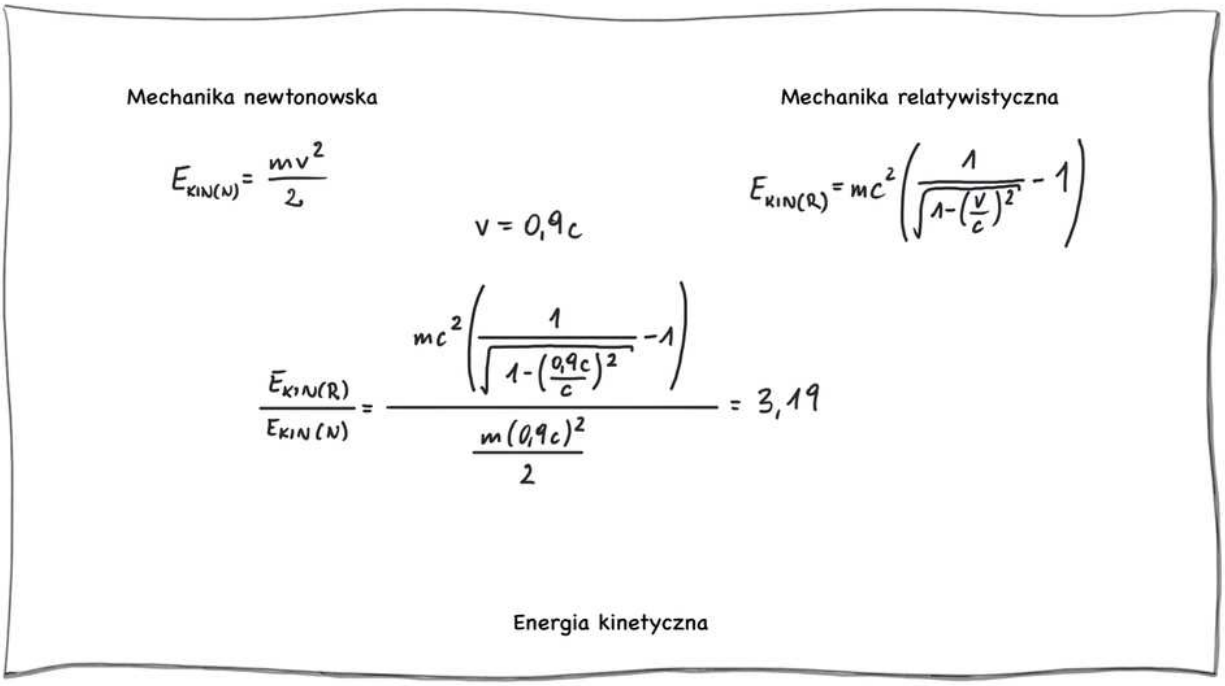
Inercjalny układ odniesienia

(ang. *inertial reference frame*) – układ odniesienia, w którym każde ciało, niepodlegające zewnętrznemu oddziaływaniu z innymi ciałami, porusza się bez przyspieszenia (tzn. ruchem jednostajnym prostoliniowym) lub pozostaje w spoczynku.

Film samouczek

Na czym polega związek między energią i masą dla cząstki w ruchu?

Obejrzyj poniższy film, wyjaśniający związek między energią a masą dla cząstki w ruchu.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/Rq4Nnvt4AM2nG

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. Licencja: https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl.

Zapoznaj się z audiodeskrypcją samouczka.

Polecenie 1

Oblicz stosunek wartości energii kinetycznej obliczonej na podstawie wzoru relatywistycznego i klasycznego dla ciała o masie 100 kg poruszającego się z prędkością v=0,99c.

Polecenie 2

Na podstawie wzoru relatywistycznego spróbuj obliczyć energię kinetyczną ciała o masie 1 kg poruszającego się z prędkością v = 2c. Jak zinterpretujesz uzyskany wynik?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Energia kinetyczna danego ciała, obliczona ze wzoru relatywistycznego

$$E_{kin} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$$

w porównaniu z energią obliczoną ze wzoru klasycznego $E_{kin} = \frac{mv^2}{2}$

jest:

- zawsze mniejsza.
- zawsze większa.
- taka sama.
- może być mniejsza.

Ćwiczenie 2

Przy określonej wartości prędkości, jeżeli obliczamy energię kinetyczną ze wzoru klasycznego, to ciało o dwukrotnie większej masie ma dwukrotnie większą energię kinetyczną. Czy przy obliczaniu energii kinetycznej ze wzoru relatywistycznego uzyskamy podobny wynik?

Odp.: Tak ☐ / Nie ☐

Ćwiczenie 3

Przy określonej wartości masy ciała, jeżeli obliczamy energię kinetyczną ze wzoru klasycznego, to podwojenie prędkości powoduje czterokrotny wzrost energii kinetycznej.
Jeżeli obliczymy energię kinetyczną ze wzoru relatywistycznego to dwukrotny wzrost prędkości spowoduje:

- ◯ czterokrotny wzrost energii kinetycznej;
- ◯ mniej niż czterokrotny wzrost energii kinetycznej;
- ◯ więcej niż czterokrotny wzrost energii kinetycznej;
- ◯ dwukrotny wzrost energii kinetycznej.

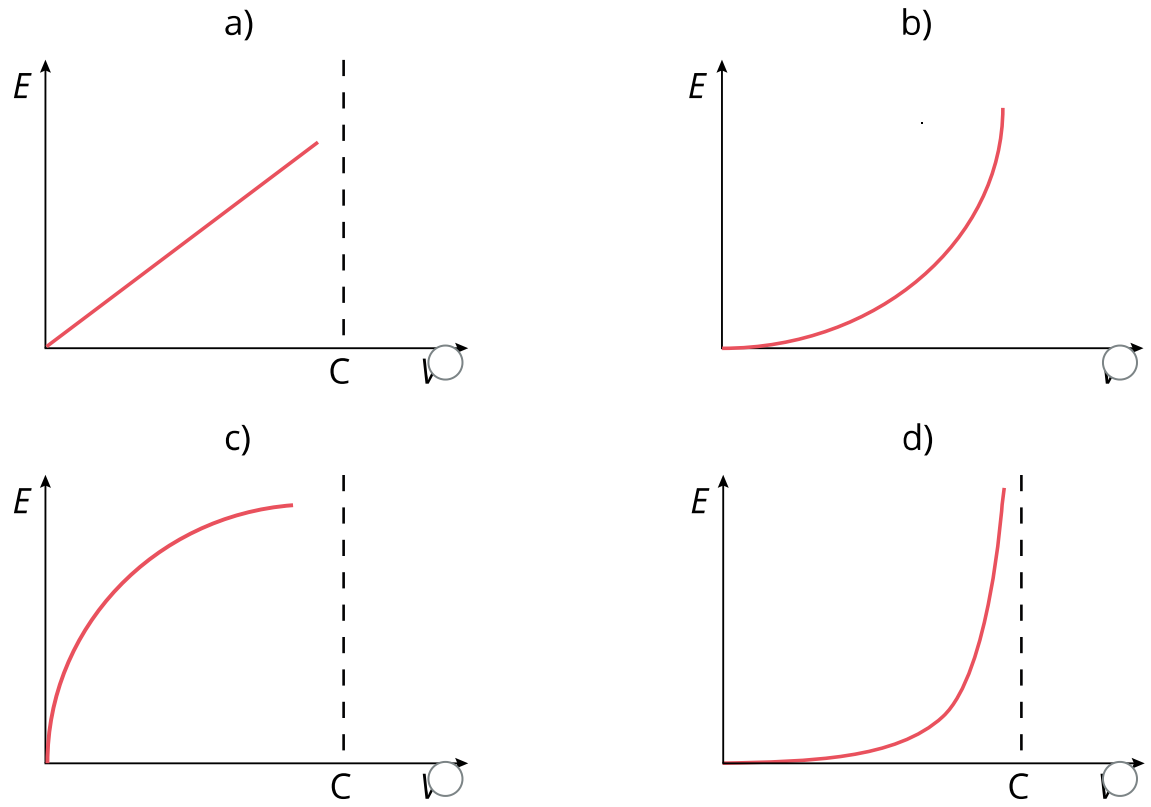
Ćwiczenie 4

Oblicz, korzystając ze wzoru relatywistycznego i klasycznego energię kinetyczną ciała o masie 1 kg poruszającego się z prędkością $0{,}9c$. Porównaj z wartością otrzymaną na podstawie klasycznego wzoru. Jaki wniosek można sformułować na podstawie uzyskanego wyniku? Wyniki podaj z dokładnością do (w kolejności pól) trzech/dwóch/trzech/dwóch cyfr znaczących.

Odp.: Kinetyczna energia relatywistyczna wynosi [ ] · 10 [ ] J, wartość obliczona ze wzoru klasycznego tylko [ ] · 10 [ ] J.

Ćwiczenie 5

Zależność relatywistycznej energii kinetycznej od prędkości najlepiej oddaje wykres:



Ćwiczenie 6

Oblicz wartość energii kinetycznej ze wzoru klasycznego dla prędkości równej prędkości światła. Przyrównaj tę wartość do wzoru relatywistycznego na energię kinetyczną. Wyznacz z tak uzyskanego równania wartość prędkości. Wynik podaj z dokładnością do czterech i jednej cyfry znaczącej.

Odp.: $v \approx$ [ ] $\cdot 10^{[\ ]}$ m/s.

Ćwiczenie 7

W akceleratorze - Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC), służącym do badania cząstek elementarnych, rozpędzane protony osiągają energię kinetyczną około 3 TeV. Teraelektronowolt jest jednostką energii stosowaną przy opisie energii cząstek elementarnych. Przedrostek tera (T) oznacza 10^{12}, 1elektronowolt (eV) = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. Masa protonu m = $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg. Oblicz prędkość, jaką osiągają protony w LHC. Wyniki podaj z dokładnością, w kolejności pól, do sześciu, sześciu i jednej cyfry znaczącej.

Odp.: Prędkość protonów v = [ ] c = [ ] $\cdot 10^{[\ ]}$ m/s.

Ćwiczenie 8

W akceleratorze - Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC), służącym do badania cząstek elementarnych, rozpędzane protony osiągają energię kinetyczną około 3 TeV. Teraelektronowolt jest jednostką energii stosowaną przy opisie energii cząstek elementarnych. Przedrostek tera (T) oznacza 10^{12}, 1elektronowolt (eV) = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. masa protonu m = $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

Ile razy energia kinetyczna protonów jest większa od ich energii spoczynkowej? Wynik podaj z dokładnością, w kolejności pól, do dwóch i jednej cyfry znaczącej.

Odp.: Energia kinetyczna protonów rozpędzonych w LHC jest _____ · 10 ____ razy większa niż ich energia spoczynkowa.

Ćwiczenie 9

W akceleratorze - Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC), służącym do badania cząstek elementarnych, rozpędzane protony osiągają energię kinetyczną około 3 TeV. Teraelektronowolt jest jednostką energii stosowaną przy opisie energii cząstek elementarnych. Przedrostek tera (T) oznacza 10^{12}, 1elektronowolt (eV) = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. Masa protonu m = $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

Protony rozpędzane są polem elektrycznym w kilku etapach. Energię kinetyczną uzyskaną przez ładunek elektryczny wiąże z pracą pola elektrycznego wzór $E_{kin} = eU$. Jakie napięcie elektryczne jest konieczne do uzyskania energii kinetycznej 3 TeV? Wynik podaj z dokładnością, odpowiednio, do jednej i dwóch cyfr znaczących.

Odp.: Konieczne napięcie wynosi _____ · 10 ____ V.

Ćwiczenie 10

W akceleratorze: Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC), służącym do badania cząstek elementarnych, rozpędzane protony osiągają energię kinetyczną około 3 TeV. Teraelektronowolt jest jednostką energii stosowaną przy opisie energii cząstek elementarnych. Przedrostek tera (T) oznacza 10^{12}, 1elektronowolt (eV) = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J. masa protonu m = $1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

Jaką prędkość musiałby osiągnąć proton, gdyby klasyczny wzór na energię kinetyczną obowiązywał bez ograniczeń co do wartości prędkości. Wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących w obu polach.

Odp.: Zgodnie z klasyczną teorią proton musiałby osiągnąć prędkość _____ · 10 ____ m/s.

Dla nauczyciela

Scenariusz lekcji:

Imię i nazwisko autora:	Jarosław Krakowski
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Na czym polega związek między energią i masą dla cząstki w ruchu?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. XII. Elementy fizyki relatywistycznej i fizyka jądrowa. Uczeń: 2) posługuje się związkiem między energią całkowitą, masą cząstki i jej prędkością, posługuje się pojęciem energii spoczynkowej.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśnia różnice między klasyczną i relatywistyczną energią kinetyczną, 2. tłumaczy, dlaczego klasyczny wzór na energię kinetyczną ma ograniczone zastosowania, 3. analizuje i interpretuje wzór opisujący relatywistyczną energię kinetyczną.
Strategie nauczania:	IBSE (Inquiry-Based Science Education - nauczanie/uczenie się przedmiotów przyrodniczych przez odkrywanie/dociekanie naukowe)
Metody nauczania:	wykład problemowy, burza mózgów
Formy zajęć:	praca zespołowa, praca w grupach
Środki dydaktyczne:	tablety do dyspozycji każdego ucznia, grafika porównująca zależność energii kinetycznej od prędkości dla wzoru klasycznego i relatywistycznego, zestawy zadań
Materiały pomocnicze:	-

PRZEBIEG LEKCJI

Faza wprowadzająca:

Pytanie nauczyciela:

- Co to jest energia kinetyczna?
  Oczekiwana odpowiedź: Jest to energia poruszającego się ciała i wynika z pracy włożonej na rozpędzenie spoczywającego ciała.
- Jak można wyprowadzić wzór na energię kinetyczną?
  Oczekiwana odpowiedź: wyznaczamy pracę włożoną przez wypadkową sił zewnętrznych na rozpędzenie ciała.

Faza realizacyjna:

Uczniowie wspólnie z nauczycielem przypominają uogólnioną postać II zasady dynamiki i wzór opisujący pęd relatywistyczny.
Uczniowie analizują metodę wyprowadzenia wzoru na energię kinetyczną, nauczyciel opowiada o konsekwencji zastąpienia wzoru klasycznego na siłę wzorem relatywistycznym i podaje wzór relatywistyczny na energię kinetyczną.
Uczniowie analizują konsekwencje wzoru relatywistycznego na przykładzie.
Uczniowie analizują wykres ilustrujący zależności klasyczną i relatywistyczną energii kinetycznej od prędkości.
Sformułowanie wniosku o granicy stosowalności wzoru klasycznego.

Faza podsumowująca:	
W celu zweryfikowania zdobytej wiedzy, uczniowie rozwiązują zadania 1, 3, 6, 8 z zestawu ćwiczeń.	
Praca domowa:	
W celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości uczniowie rozwiązują zadania: 2, 4, 5, 7, 9, 10 z zestawu ćwiczeń.	
Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium	Film może być wykorzystany przy powtarzaniu wiadomości i innych lekcjach na temat Szczególnej Teorii Względności.