

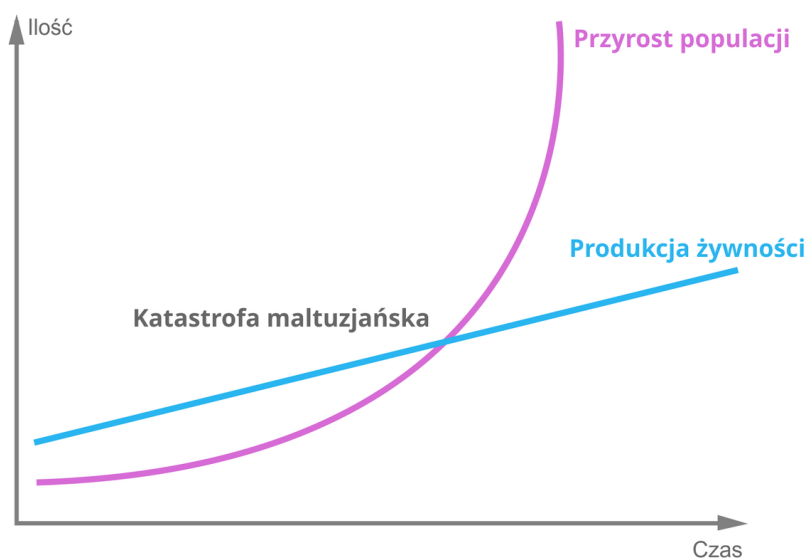


Monotoniczność ciągu geometrycznego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jeśli masz wątpliwości, czy ciąg geometryczny ma jakieś rzeczywiste zastosowania, przestuduj statystyczną teorię zasobów angielskiego osiemnastowiecznego ekonomisty Thomasa Malthusa.



Malthus twierdził, że skoro liczba ludności rośnie w postępie geometrycznym, a produkcja żywności – w arytmetycznym, to nieunikniony jest stan przeludnienia, co w konsekwencji doprowadzi do głodu.

Według Malthusa społeczeństwa, które w porę nie podejmą środków zaradczych, wpadną w pułapkę, w której wzrost dochodów skutkuje zwiększeniem populacji, nie prowadzi jednak do wzrostu standardów życiowych.

Czarnowidztwo Malthusa jednak nie sprawdziło się – czy potrafisz wytłumaczyć dlaczego?

Teoria Malthusa nawiązuje do szybkiego wzrostu (lub spadku) wielkości określonych przez ciąg geometryczny. W matematyce o ciągach które rosną lub maleją mówimy, że są monotoniczne. Właśnie monotoniczność ciągu geometrycznego będzie tematyką tych materiałów.

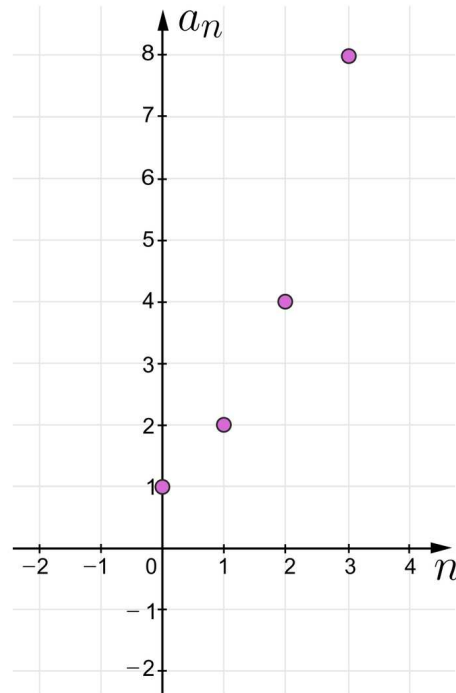
Twoje cele

- Rozpoznasz ciągi geometryczne rosnące, malejące, stałe i naprzemienne, określone różnymi sposobami.
- Podasz przykłady ciągów geometrycznych monotonicznych.
- Udowodnisz, że dany ciąg geometryczny jest rosnący/malejący.
- Wykorzystasz w zadaniach własności ciągów geometrycznych monotonicznych.

Przeczytaj

Ciąg geometryczny jest pewną funkcją, której dziedziną jest podzbiór zbioru liczb naturalnych lub zbiór liczb naturalnych. Zatem definicje określające monotoniczność ciągu geometrycznego i sposoby określania tej monotoniczności, są analogiczne jak dla funkcji liczbowych.

Ciąg geometryczny rosnący



Na wykresie zaznaczonych jest kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) , określonego wzorem ogólnym

$$a_n = 2^n,$$

gdzie $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od poprzedniego. O takim ciągu mówimy, że jest **rosnący**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów geometrycznych rosnących.

$$3, 9, 27, 81, 243, \dots$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}, \frac{16}{6}, \dots$$

$$10, 100, 1000, 10000, \dots$$

$$-20; -10; -5; -2,5; -1,25; \dots$$

$$-125, -25, -5, -1, \dots$$

Zauważmy, że jeśli pierwszy wyraz ciągu geometrycznego rosnącego jest dodatni, to iloraz ciągu jest większy od 1. Natomiast, jeśli pierwszy wyraz ciągu jest ujemny, to iloraz ciągu musi być dodatni, ale mniejszy od 1.

Twierdzenie: Ciąg geometryczny rosnący

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

Ciąg ten jest ciągiem rosnącym, gdy:

- $a_1 > 0$ i $q > 1$
lub
- $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$

Przykład 1

Wykażemy, że ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = 2 \cdot 3^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest rosnący.

Aby wykazać, że ciąg jest rosnący, należy zbadać różnicę $a_{n+1} - a_n$ (dla dowolnego $n \geq 1$).

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie, korzystając z własności potęgowania.

$$a_{n+1} - a_n = 6 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^n = 4 \cdot 3^n$$

Zarówno liczba 4, jak i liczba 3^n ($n \geq 1$) to liczby dodatnie. Iloczyn liczb dodatnich jest liczbą dodatnią.

$$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 3^n > 0$$

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ spełniony jest warunek $a_{n+1} > a_n$, co oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Przykład 2

Znajdziemy takie liczby x, y , dla których ciąg $(16, x, 100, y)$ jest ciągiem geometrycznym rosnącym.

Niech q będzie ilorazem rozpatrywanego ciągu.

Wtedy:

16 – pierwszy wyraz ciągu,

$x = 16q$ – drugi wyraz ciągu,

$100 = 16q^2$ - trzeci wyraz ciągu,
 $y = 16q^3$ - czwarty wyraz ciągu.

Wyznaczamy iloraz rozpatrywanego ciągu.

$$100 = 16q^2$$

$$q^2 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$$

$$q = \frac{5}{2} \text{ lub } q = -\frac{5}{2}$$

Ciąg ma być rosnący, zatem tylko $q = \frac{5}{2}$ spełnia warunki zadania.

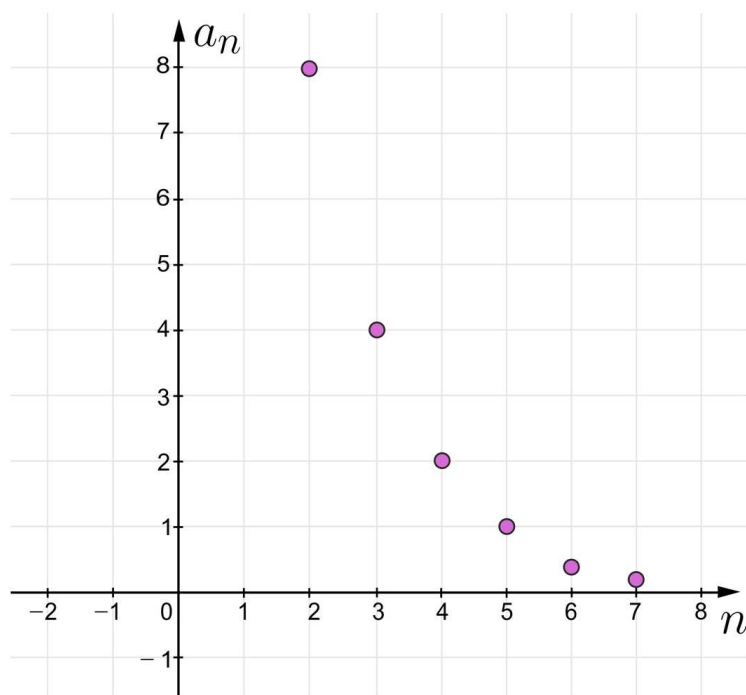
$$x = 16 \cdot \frac{5}{2} = 40$$

$$y = 16 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{16 \cdot 125}{8} = 250$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to $x = 40$, $y = 250$.

Ciąg geometryczny malejący



Na wykresie zaznaczonych jest kilka wyrazów ciągu (a_n), określonego wzorem ogólnym

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

gdzie $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od poprzedniego. O takim ciągu mówimy, że jest **malejący**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów geometrycznych malejących.

$$243, 81, 27, 9, 3, \dots$$

$$\frac{16}{6}, \frac{8}{6}, \frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$10000, 1000, 100, 10, 1, \dots$$

$$-1, 25; -2, 5; -5; -10; -20; \dots$$

$$-1, -5, -25, -125, \dots$$

Zauważmy, że jeśli pierwszy wyraz ciągu geometrycznego malejącego jest ujemny, to iloraz ciągu jest większy od 1. Natomiast, jeśli pierwszy wyraz ciągu jest dodatni, to iloraz ciągu musi być dodatni, ale mniejszy od 1.

Twierdzenie: Ciąg geometryczny malejący

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

Ciąg ten jest ciągiem malejącym, gdy:

- $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$
lub
- $a_1 < 0$ i $q > 1$

Przykład 3

Określmy dla jakiej wartości parametru k ($k \neq 0$ i $k \neq \sqrt{6}$) ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = (\sqrt{6} - k) \cdot (k - 2)^{n-1}$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ jest malejący.

Zauważmy, że pierwszy wyraz rozpatrywanego ciągu (a_n) to $a_1 = \sqrt{6} - k$.

Natomiast iloraz ciągu to $q = k - 2$.

Korzystając z twierdzenia o ciągu geometrycznym malejącym, rozpatrzmy dwa przypadki.

1. $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$
 $\sqrt{6} - k > 0$ i $0 < k - 2 < 1$
 $k < \sqrt{6}$ i $2 < k < 3$

Określamy część wspólną wszystkich warunków, jakie musi spełniać parametr k .

$$\begin{cases} k < \sqrt{6} \\ 2 < k < 3 \\ k \neq 0 \\ k \neq \sqrt{6} \end{cases}$$

Otrzymujemy: $2 < k < \sqrt{6}$.

$$2. a_1 < 0 \text{ i } q > 1$$

$$\sqrt{6} - k < 0 \text{ i } k - 2 > 1$$

$$k > \sqrt{6} \text{ i } k > 3$$

Określamy część wspólną wszystkich warunków, jakie musi spełniać parametr k .

$$\begin{cases} k > \sqrt{6} \\ k > 3 \\ k \neq 0 \\ k \neq \sqrt{6} \end{cases}$$

Otrzymujemy: $k > 3$.

Z obu rozpatrywanych warunków wynika, że $k \in (2, \sqrt{6}) \cup (3, \infty)$.

Odpowiedź:

Ciąg geometryczny (a_n) jest ciągiem malejącym dla $k \in (2, \sqrt{6}) \cup (3, \infty)$.

Przykład 4

Liczby x, y, w, z (w tej kolejności) tworzą ciąg geometryczny malejący. Iloczyn logarytmów dziesiętnych pierwszej i czwartej z tych liczb jest równy (-8) . Iloczyn logarytmów dziesiętnych drugiej i trzeciej z tych liczb jest równy 0 . Znajdziemy te liczby.

Oznaczmy przez q iloraz ciągu (x, y, w, z) .

Wtedy:

$$y = xq$$

$$w = xq^2$$

$$z = xq^3$$

Aby istniały logarytmy dziesiętne liczb x, y, w, z , każda z tych liczb musi być dodatnia.

Zatem:

$$x > 0$$

$$y > 0 \Rightarrow xq > 0 \Rightarrow q > 0$$

$$w > 0$$

$$z > 0$$

Zapiszemy pierwszą z zależności między podanymi liczbami, wynikającą z treści zadania: iloczyn logarytmów dziesiętnych pierwszej i czwartej z tych liczb jest równy (-8) , czyli:

$$\log x \cdot \log(xq^3) = -8 \quad (1)$$

Z treści zadania ponad to wynika, że iloczyn logarytmów dziesiętnych drugiej i trzeciej z tych liczb jest równy 0. Stąd:

$$\log(xq) \cdot \log(xq^2) = 0 \quad (2)$$

Z własności iloczynu wynika, że:

$$\log(xq) = 0 \text{ lub } \log(xq^2) = 0.$$

Rozpatrzmy więc dwie możliwości.

1 możliwość: $\log(xq) = 0$

Ponieważ $0 = \log 1$, więc

$$\log(xq) = \log 1$$

$$xq = 1 \quad | : q \quad (q \neq 0, \text{ bo } q > 0)$$

$$x = \frac{1}{q}$$

Podstawiamy wyznaczone x do (1).

$$\log x \cdot \log(xq^3) = -8$$

$$\log \frac{1}{q} \cdot \log\left(\frac{1}{q} \cdot q^3\right) = -8$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie, korzystając z własności logarytmów.

$$-\log q \cdot 2 \log q = -8$$

$$\log^2 q = 4$$

Wyznaczamy z otrzymanego równania kwadratowego q .

$$\log q = 2 \text{ lub } \log q = -2$$

$$\log q = \log 100 \text{ lub } \log q = \log \frac{1}{100}$$

$$q = 100 \text{ lub } q = \frac{1}{100}$$

Wyznaczamy x i pozostałe wyrazy ciągu dla obu znalezionych wartości q .

- $q = 100 \Rightarrow x = \frac{1}{100}$

$$y = 1$$

$$w = 100$$

$$z = 10000$$

Każda z otrzymanych liczb jest dodatnia, ale ciąg $(\frac{1}{100}, 1, 100, 10000)$ jest rosnący, nie spełnia więc warunków zadania.

- $q = \frac{1}{100}$

$$x = 100$$

$$y = 1$$

$$w = \frac{1}{100}$$

$$z = \frac{1}{10000}$$

Każda z otrzymanych liczb jest dodatnia i ciąg $(100, 1, \frac{1}{100}, \frac{1}{10000})$ jest ciągiem malejącym, spełnia więc warunki zadania.

2 możliwość: $\log(xq^2) = 0$.

Postępujemy podobnie, jak poprzednio. Wyznaczamy x i podstawiamy do (1).

$$\log(xq^2) = \log 1$$

$$xq^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{q^2} \quad (q \neq 0)$$

$$\log x \cdot \log(xq^3) = -8$$

$$\log \frac{1}{q^2} \cdot \log\left(\frac{1}{q^2} \cdot q^3\right) = -8$$

Korzystamy z własności logarytmu potęgi.

$$-2 \log q \cdot \log q = -8$$

$$\log^2 q = 4$$

$$\log q = 2 \text{ lub } \log q = -2$$

Otrzymaliśmy do rozwiązania dokładnie te same równania, co w 1 możliwości. Jednak rozwiązanie jest inne.

Jeśli $\log q = 2$ to $q = 100$ i $x = \frac{1}{10000}$. Ciąg jest wtedy rosnący, więc nie spełnia warunków zadania.

Jeśli $\log q = -2$ to $q = \frac{1}{100}$ i $x = 10000$. Wtedy

$$y = \frac{1}{100} \cdot 10000 = 100$$

$$w = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1$$

$$z = \frac{1}{100} \cdot 1 = \frac{1}{100}.$$

Odpowiedź:

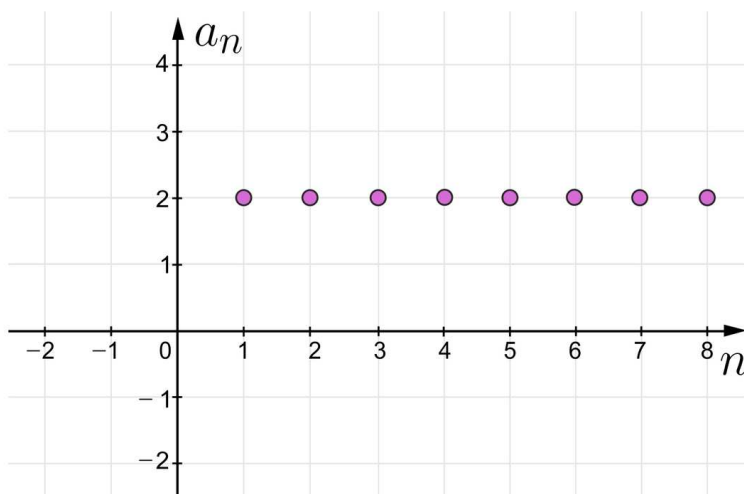
Szukane liczby to:

$$x = 100, y = 1, w = \frac{1}{100}, z = \frac{1}{10000}$$

lub

$$x = 10000, y = 100, w = 1, z = \frac{1}{100}.$$

Ciąg geometryczny stały



Na wykresie zaznaczonych jest kilka wyrazów ciągu (a_n) , określonego wzorem ogólnym

$$a_n = 2$$

gdzie $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu ma tę samą wartość. O takim ciągu mówimy, że jest **stały**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów geometrycznych stałych.

$$81, 81, 81, 81, \dots$$

$$\frac{16}{6}, \frac{16}{6}, \frac{16}{6}, \frac{16}{6}, \frac{16}{6}, \dots$$

$$0, 0, 0, 0, 0, \dots$$

$$-10, -10, -10, -10, \dots$$

Zauważmy, że iloraz ciągu geometrycznego stałego jest równy 1 jeśli pierwszy wyraz ciągu jest różny od 0. Jeśli pierwszy wyraz ciągu geometrycznego stałego jest równy 0, to iloraz ciągu może być dowolną liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie: Ciąg geometryczny stały

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q .

Ciąg ten jest ciągiem stałym, gdy:

- $a_1 \neq 0$ i $q = 1$
lub

- $a_1 = 0$ i $q \in \mathbb{R}$

Ważne!

Zauważmy, że jeśli $a_1 \neq 0$ i $q = 0$ to ciąg (a_n) jest stały, począwszy od drugiego wyrazu.

Ciąg stały nie jest ani rosnący, ani malejący.

Przykład 5

Znajdziemy taką liczbę x , dla której ciąg $(x^2, x + 2, 6 - x)$ jest trzywyrazowym ciągiem stałym.

W ciągu stałym wszystkie wyrazy są równe, zatem:

$$x + 2 = 6 - x$$

$$2x = 4$$

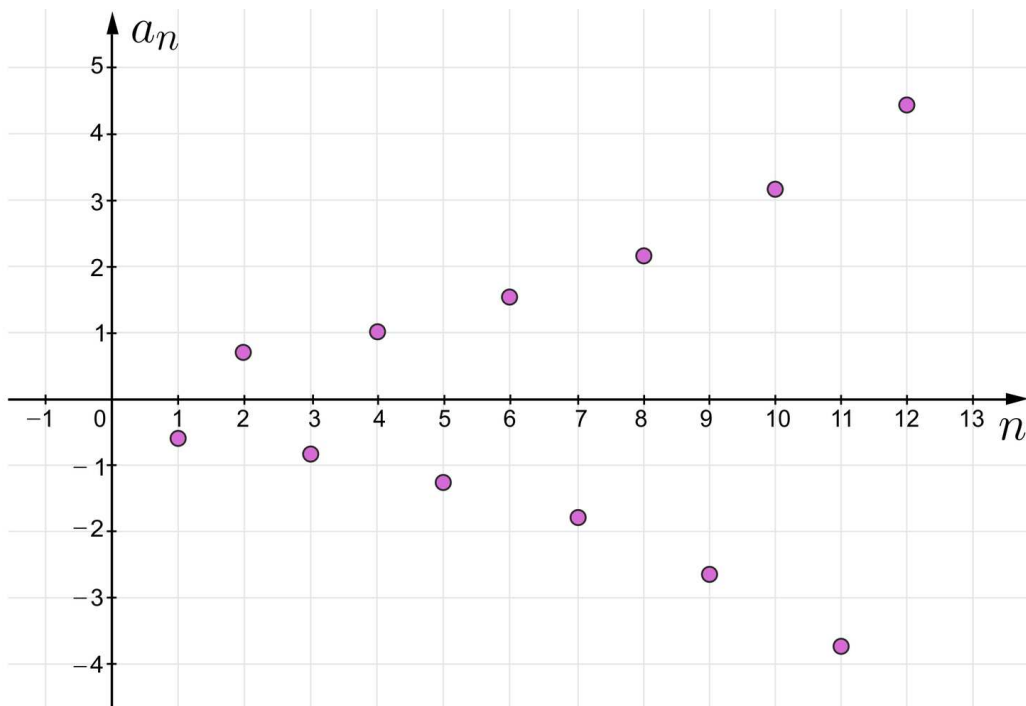
$$x = 2$$

Ciąg ma postać: $(4, 4, 4)$.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 2.

Ciąg geometryczny naprzemienny



Nie każdy ciąg geometryczny jest monotoniczny. Fragment wykresu takiego ciągu przedstawia rysunek. Zauważmy, że wyrazy tego ciągu są na przemian dodatnie i ujemne. O takim ciągu mówimy, że jest **naprzemienny**.

Ważne!

Jeśli ciąg geometryczny (a_n) jest takim ciągiem, że $a_1 \neq 0$ i $q < 0$ to ciąg ten jest ciągiem naprzemiennym, czyli wyrazy tego ciągu są na przemian dodatnie i ujemne.

- Gdy $a_1 > 0$ i $q < 0$ to wszystkie wyrazy o indeksach nieparzystych, ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, są dodatnie, zaś wyrazy o indeksach parzystych są ujemne.
- Gdy $a_1 < 0$ i $q < 0$ to wszystkie wyrazy o indeksach nieparzystych, ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, są ujemne, zaś wyrazy o indeksach parzystych są dodatnie.

Przykłady ciągów naprzemiennych:

$$-5, 10, -20, 40, \dots$$

$$4, -4, 4, -4, 4, -4, \dots$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Słownik

ciąg geometryczny rosnący

niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q ; ciąg ten jest ciągiem rosnącym, gdy:

- $a_1 > 0$ i $q > 1$
lub

- $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$

ciąg geometryczny malejący

niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q ; ciąg ten jest ciągiem malejącym, gdy:

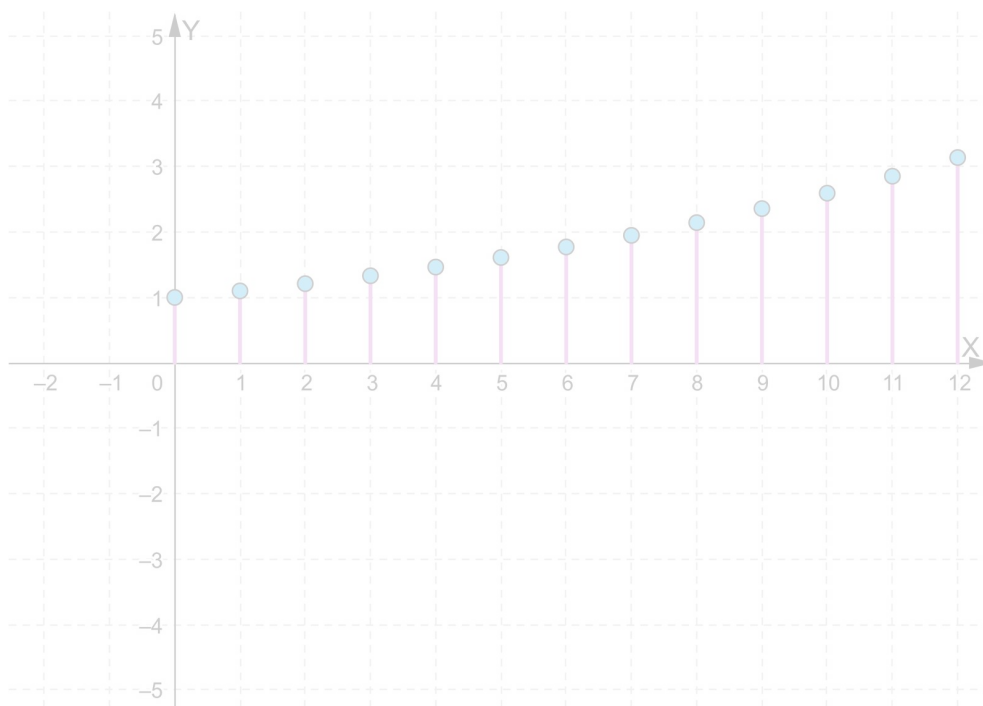
- $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$
lub

- $a_1 < 0$ i $q > 1$

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizuj aplet pokazujący jak zmienia się ciąg geometryczny w zależności od pierwszego wyrazu a_0 i ilorazu q .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dsd3v89Qf>

Polecenie 2

Między liczby 1 i 81 wstaw trzy takie liczby, aby łącznie z danymi (w tej kolejności) były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego naprzemiennego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Pierwszy wyraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego jest równy 96 i jest o 90 większy od wyrazu trzeciego. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{2^{n+1}}{4^{n+2}}$ jest malejący.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Monotoniczność ciągu geometrycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje ciągi geometryczne rosnące, malejące, stałe i naprzemienne, określone różnymi sposobami
- podaje przykłady ciągów geometrycznych monotonicznych
- udowadnia, że dany ciąg geometryczny jest rosnący/malejący
- wykorzystuje w zadaniach własności ciągów geometrycznych monotonicznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- technika 1 – 2
- myślenie przez analogię
- technika obiegu kart

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, korzystając z techniki 1 – 2 (jedno pytanie, odpowiada 2 uczniów – pierwszy wypowiada odpowiedź, drugi daje odpowiedź), odpowiadają na pytania nauczyciela przypominające wiadomości o ciągu geometrycznym.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach pracują metodą myślenie przez analogię. Opierając się na znanych im informacjach na temat monotoniczności funkcji, próbują sformułować odpowiednie twierdzenia dotyczące monotoniczności ciągów geometrycznych. Mogą przy tym posługiwać się wykresami ciągów, wzorem ogólnym ciągu, itp.
2. Po zapisaniu odpowiednich wniosków i ewentualnie sformułowaniu twierdzeń, grupy porównują swoje zapisy z odpowiednimi zapisami w sekcji „Przeczytaj”. I ewentualnie modyfikują swoje ustalenia. Następnie analizują przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj” i aplecie.
3. Teraz każda grupa przygotowuje jedno zadanie analogiczne do zawartych w przeczytanym materiale. Ułożone zadania grupy przekazują sobie nawzajem tak, aby każda z grup rozwiązała wszystkie zadania.
4. Zadania rozwiązywane są techniką obiegu kart. Czyli uczniowie danej grupy dopisują kolejne kroki rozwiązań.

Faza podsumowująca:

1. Podsumowaniem zajęć powinna być dyskusja, w wyniku której uczniowie wspólnie zastanawiają się czy warto posługiwać się analogiami i w jakim stopniu analogie ułatwiają bądź utrudniają pracę nad nowym zagadnieniem.
2. Końcowy element to refleksje nauczyciela na temat pracy uczniów i ocena prac grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 8 sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wstępem do zajęć poświęconych dowodzeniu twierdzeń z wykorzystaniem ciągów geometrycznych.