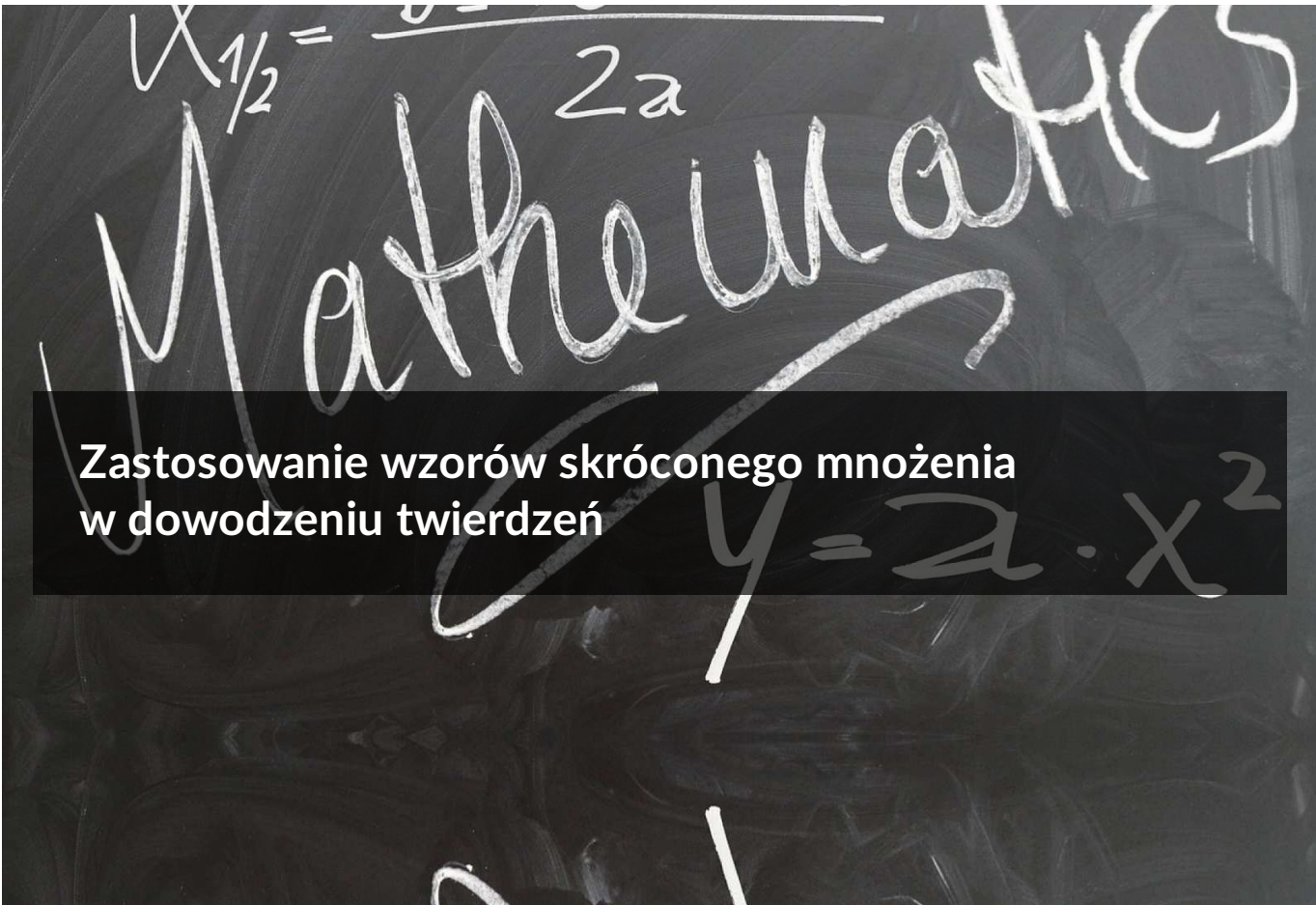


Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia  
w dowodzeniu twierdzeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)

- Dla nauczyciela

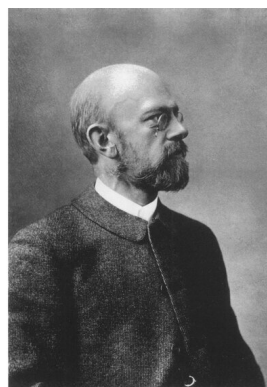


Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia  
w dowodzeniu twierdzeń

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znamy już wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego. Obecnie pokażemy ich zastosowanie w dowodzeniu twierdzeń. Zastosujemy metodę wprost – czyli z założeń będziemy bezpośrednio wykazywać tezę.

**Teoria dowodu** to dział logiki matematycznej zajmujący się analizą pojęcia dowodu oraz sposobami zastosowania go w rozważaniach matematycznych.



Dawid Hilbert (1862-1943)

Źródło: dostępny w internecie:  
commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Za prekursora teorii dowodu uważa się Dawida Hilberta, wybitnego matematyka niemieckiego z przełomu dziewiętnastego i dwudziestego wieku.

## Twoje cele

- Uzasadnisz prawdziwość twierdzenia, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.
- Wykażesz prawdziwość niektórych nierówności.
- Porównasz liczby zapisane w postaci potęg.

# Przeczytaj

---

## Dowodzenie nierówności

Wiemy już, że nierówności można przekształcać równoważnie. Do obu stron nierówności można dodać to samo wyrażenie, od obu stron nierówności można odjąć to samo wyrażenie, obie strony nierówności można pomnożyć przez tę samą liczbę, różną od zera. Przy czym, jeśli ta liczba jest ujemna, zmieniamy znak nierówności na przeciwny.

Teraz **udowodnimy** kilka nierówności z zastosowaniem poznanych wzorów i własności potęgowania: **kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny**.

### Przykład 1

Uzasadnimy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  zachodzi nierówność  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Przenosimy wszystkie wyrazy nierówności na lewą stronę.

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

Zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci kwadratu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, zatem nierówność jest prawdziwa.

Zauważ, że jeśli  $a = b$ , to  $(a - b)^2 = 0$ , czyli  $a^2 + b^2 - 2ab = 0$ , zatem  $a^2 + b^2 = 2ab$ .

### Przykład 2

Wykażemy, że jeśli  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Zapisujemy nierówność, którą udowodniliśmy w Przykładzie 1. Wiemy już, że jest ona prawdziwa dla każdych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ .

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dzielimy obie strony nierówności przez  $ab$  zakładając, że  $a > 0$  i  $b > 0$ .

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab}$$

Przekształcamy nierówność równoważnie.

$$\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab}$$

Skracamy, otrzymując żadaną nierówność.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Zauważ, że jeśli  $a = b$ , to  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ .

### Przykład 3

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność  $5(a^2 + 2b^2) \geq 12ab$ .

$$5(a^2 + 2b^2) \geq 12ab$$

Przenosimy wszystkie wyrazy nierówności z prawej strony na lewą stronę.

$$5(a^2 + 2b^2) - 12ab \geq 0$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$5a^2 + 10b^2 - 12ab \geq 0$$

Zapisujemy sumę stojącą po lewej stronie nierówności tak, aby skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$4a^2 + 9b^2 - 12ab + a^2 + b^2 \geq 0$$

Grupujemy wyrazy.

$$(4a^2 + 9b^2 - 12ab) + (a^2 + b^2) \geq 0$$

Zapisujemy wyrażenie stojące w pierwszym nawiasie za pomocą wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$(2a - 3b)^2 + (a^2 + b^2) \geq 0$$

Po lewej stronie nierówności otrzymaliśmy sumę dwóch wyrażeń, które przyjmują wartości nieujemne dla każdych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , zatem ich suma jest liczbą nieujemną. **Dowodzona** nierówność jest więc prawdziwa.

Wiemy już, że nierówności o tym samym zwrocie można dodać stronami (natomiast nie wolno odejmować takich nierówności stronami). Własność ta będzie nam pomocna w udowodnieniu kolejnej nierówności.

#### Przykład 4

Wykażemy, że dla każdych liczb rzeczywistych  $a, b, c$  spełniona jest nierówność  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Dla liczb  $a, b, c$  zapisujemy warunki, które wynikają z nierówności dowodzonej w Przykładzie 1.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

Dodajemy stronami zapisane nierówności.

$$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

Redukujemy wyrazy podobne i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

Dzielimy przez 2 obie strony nierówności.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Otrzymaliśmy żadaną nierówność.

#### Przykład 5

Przypomnijmy sobie sposób rozwiązywania nierówności podwójnych.

Rozwiążemy nierówność  $x - 2 < 2x < x + 9$ .

Przekształcamy nierówność równoważnie odejmując od każdego z członów  $x$ .  
Otrzymujemy rozwiązanie.

$$-2 < x < 9$$

#### Przykład 6

Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej  $a > 7$  spełniona jest nierówność podwójna  $\frac{2}{5}\sqrt{25a-1} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a}$ .

Każdy z członów nierówności przyjmuje dla  $a > 7$  wartości dodatnie. Możemy zatem przekształcić nierówność równoważnie, podnosząc każdy z członów do kwadratu.

$$\frac{4}{25}(25a-1) < a+1 + a-1 + 2\sqrt{a^2-1} < 4a$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$4a - \frac{4}{25} < 2a + 2\sqrt{a^2-1} < 4a$$

Dodajemy  $(-2a)$ .

$$4a - \frac{4}{25} - 2a < 2a - 2a + 2\sqrt{a^2-1} < 4a - 2a$$
$$2a - \frac{4}{25} < 2\sqrt{a^2-1} < 2a$$

Dzielimy każdy z członów nierówności przez 2.

$$a - \frac{2}{25} < \sqrt{a^2-1} < a$$

Dla  $a > 7$  każdy z członów nierówności przyjmuje wartości dodatnie, zatem możemy ponownie podnieść każdy człon do kwadratu.

$$a^2 - 2 \cdot \frac{2}{25}a + \frac{4}{625} < a^2 - 1 < a^2$$

Nierówność  $a^2 - 1 < a^2$  jest zawsze prawdziwa (jeśli  $a > 7$  i  $a$  jest liczbą naturalną), zatem wystarczy pokazać prawdziwość nierówności

$$a^2 - \frac{4}{25}a + \frac{4}{625} < a^2 - 1.$$

Do obu stron nierówności dodajemy  $(-a^2 - \frac{4}{625})$ .

$$a^2 - \frac{4}{25}a + \frac{4}{625} - a^2 - \frac{4}{625} < a^2 - 1 - a^2 - \frac{4}{625} - \frac{4}{25}a < -1 - \frac{4}{625}a$$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy  $a$ , czyli przez  $-\frac{4}{25}$ .

Nie zapominamy przy tym, że dzielimy przez liczbę ujemną, czyli zmieniamy znak nierówności na przeciwny.

$$-\frac{4}{25}a < -1 - \frac{4}{625} \quad | : \left(-\frac{4}{25}\right)$$

$$a > \frac{629}{625} \cdot \frac{25}{4}$$

$$a > 6 \frac{29}{100}$$

Z założenia wynika, że  $a$  jest liczbą naturalną większą od 7, zatem nierówność  $a > 6 \frac{29}{100}$  jest prawdziwa.

Wykazaliśmy zatem prawdziwość każdej z nierówności  $\frac{2}{5}\sqrt{25a-1} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}$  i  $\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a}$ , czyli i prawdziwość nierówności podwójnej  $\frac{2}{5}\sqrt{25a-1} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a}$ .

### Przykład 7

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej  $a > 2$  prawdziwa jest nierówność  $\frac{2}{3}\sqrt{9a-1} < \sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}$

Rozwiązaniem nierówności są liczby  $a > \frac{85}{36}$ , czyli  $a > 2\frac{13}{36}$ .

Zatem nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $a$  większej od 2.

## Porównywanie liczb

Wzory skróconego mnożenia w wielu wypadkach mogą być pomocne przy porównywaniu liczb rzeczywistych, w szczególności liczb zapisanych za pomocą potęg.

### Przykład 8

Wykażemy, że  $3^{100} - 2^{150} > 3^{50} - 2^{75}$ .

$$3^{100} - 2^{150} > 3^{50} - 2^{75}$$

Zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci różnicy kwadratów.

$$(3^{50})^2 - (2^{75})^2 > 3^{50} - 2^{75}$$

Rozkładamy na czynniki lewą stronę nierówności – ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$(3^{50} + 2^{75})(3^{50} - 2^{75}) > 3^{50} - 2^{75}$$

Chcemy podzielić obie strony nierówności przez  $3^{50} - 2^{75}$ . Nie wiemy jednak, czy jest to liczba dodatnia, czy ujemna.

$$\frac{3^{50}}{2^{75}} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^{25} = \left(\frac{9}{8}\right)^{25}$$

Aby to sprawdzić, zapisujemy iloraz  $\frac{3^{50}}{2^{75}}$  w postaci jednej potęgi.

Ponieważ  $9 > 8$ , zatem liczba  $\frac{9}{8}$  jest większa od 1, czyli  $9^{25} > 8^{25}$ , a co za tym idzie  $3^{50} > 2^{75}$ . Wynika stąd, że  $3^{50} - 2^{75} > 0$ .

$\frac{9}{8} > 1$ , stąd  $9^{25} > 8^{25}$ , czyli  $3^{50} - 2^{75} > 0$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę dodatnią  $3^{50} - 2^{75}$ , zatem nie zmieniamy znaku nierówności.

$$(3^{50} + 2^{75})(3^{50} - 2^{75}) > 3^{50} - 2^{75} / : (3^{50} - 2^{75})$$

Liczba  $3^{50} + 2^{75}$  jest oczywiście większa od 1, zatem dowodzona równość jest prawdziwa, co należało wykazać.

$$3^{50} + 2^{75} > 1$$

## Dowodzenie równości

Przekształcając wyrażenia algebraiczne często szukamy jak najprostszych sposobów wykonywania wskazanych działań. I tu mogą być przydatne wzory skróconego mnożenia.

### Przykład 9

Wykażemy, że dla każdej wartości zmiennej  $x$ , wartość wyrażenia  $W = 1 + x^2(x^2 - 2) - (1 - x)^2 \cdot (1 + x)^2$  jest liczbą naturalną.

$$W = 1 + x^2(x^2 - 2) - (1 - x)^2 \cdot (1 + x)^2$$

Zauważmy, że iloczyn kwadratów dwóch liczb może być zapisany w postaci kwadratu iloczynu tych liczb.

$$W = 1 + x^2(x^2 - 2) - [(1 - x)(1 + x)]^2$$

Wykonujemy wskazane działania. W nawiasie kwadratowym iloczyn zamieniamy na sumę, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$W = 1 + x^4 - 2x^2 - [1 - x^2]^2$$

Potęgujemy – korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$W = 1 + x^4 - 2x^2 - (1 + x^4 - 2x^2)$$

Opuszczamy nawias i redukujemy wyrazy podobne.

$$W = 1 + x^4 - 2x^2 - 1 - x^4 + 2x^2$$

$$W = 0$$

Wykazaliśmy, że wartość wyrażenia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  jest równa 0.

Liczba 0 jest liczbą naturalną, zatem wartość wyrażenia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  jest liczbą naturalną, co należało wykazać.

## Przykład 10

Udowodnimy prawdziwość równości  $\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$  dla każdych liczb rzeczywistych  $a, b$ .

$$\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$$

Sprowadzamy prawą stronę równości do mianownika 4 i mnożymy obie strony nierówności przez 4.

$$\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2}{4} / \cdot 4$$

Mamy teraz do udowodnienia znacznie prostszą równość.

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Przekształcamy lewą stronę równości, korzystając z odpowiednich wzorów skróconego mnożenia.

$$L = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Lewa strona równości równa się prawej, zatem równość jest prawdziwa, co należało wykazać.

$$L = P$$

## Słownik

### dowodzenie (przeprowadzenie dowodu)

wykazanie, że pewne zdanie matematyczne jest prawdziwe; poszczególne kroki dowodu muszą wynikać z poprzednich lub być aksjomatami

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Spróbuj samodzielnie rozwiązać prezentowane tam zadania i dopiero następnie porównaj rozwiązania. Sformułuj każdy z problemów rozważanych na filmie w postaci twierdzenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D180JBaE2>

Film nawiązujący do treści materiału zastosowania wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu twierdzeń.

---

## Polecenie 2

Wykaż, że dla  $x > 3$  wartość wyrażenia  $W = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{9 + 6x + x^2}$  jest liczbą całkowitą,

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wartość wyrażenia

$W = 25x^2 + (5x - 1)(5x + 1) - (5x + 1)^2 - (5x - 1)^2$  jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeśli  $a, b, c$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi to

$$(a - b)(a + b) - (c - b)(c + b) = (a - c)(a + c).$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu twierdzeń

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- uzasadnia prawdziwość twierdzenia, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia
- wykazuje prawdziwość niektórych nierówności
- porównuje liczby zapisane w postaci potęg
- uzasadnia poprawność dowodzonych twierdzeń
- analizuje nietypowe problemy arytmetyczne i określa strategię ich rozwiązania

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- burza mózgów

- rosnące plakaty
- zadania z kubka
- stoliki eksperckie

### **Formy pracy:**

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów (uczniowie ci będą pełnili rolę ekspertów na lekcji) o zapoznanie się w domu z medium w sekcji „Film samouczek” oraz z materiałem z sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie pracują w grupach metodą rosnących plakatów. Najpierw za pomocą burzy mózgów przypominają sobie wszystko, co wiedzą na temat twierdzeń (budowa, rodzaje dowodów, przykłady), a następnie przedstawiają graficznie uzyskane wiadomości. Powstały plakat uzupełnią w końcowej części zajęć o nowo uzyskane informacje. W ten sposób plakat „rozrośnie się”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w 3 grupach. Zapoznają się z samouczkiem przedstawiającą sposób dowodzenia nierówności. Zwracają uwagę na zastosowanie wzorów skróconego mnożenia i wykorzystanie przyjętych założeń.
2. Teraz przechodzą do trzech stolików eksperckich.

Stoliki:

- pierwszy: *Dowodzenie nierówności*
- drugi: *Porównywanie liczb*
- trzeci: *Dowodzenie równości*

Przy każdym stoliku siedzi ekspert – uczeń, który wcześniej zapoznał się z rozwiązaniami zadań z grupy, którą określa nazwa stolika (są to zadania z bloku Przeczytaj). Kartki z zadaniami schowane są w kubku.

Wskazany przez eksperta uczeń losuje zadanie z kubka i próbuje je rozwiązać, objaśniając przy tym na głos wykonywane czynności. Pozostali członkowie grupy mogą mu podsuwać pomysły na rozwiązanie. Jeśli w określonym czasie grupa nie upora się z zadaniem, może poprosić o pomoc eksperta.

3. Ostatnim elementem wspólnej pracy jest wzbogacenie rosnących plakatów o wiadomości zdobyte w czasie zajęć.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, wskazują na trudności, prezentują wykonane plakaty.
2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć i zdobyte wiadomości.
3. Nauczyciel ocenia pracę uczniów – wskazuje na mocne i słabe strony.

#### **Praca domowa:**

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Działania na wyrażeniach algebraicznych – przykłady](#)
- [Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Z filmem samouczkiem może zapoznać się jeden z uczniów w domu i w czasie zajęć zaprezentować na tablicy poszczególne kroki dowodu, objaśniając je szczegółowo.