



## Interpretacja geometryczna nierówności typu $|x - a| < b$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Interpretacja geometryczna nierówności typu

$$|x - a| < b$$

Źródło: Andrew Buchanan, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Wiesz już jak geometrycznie rozwiązać nierówność typu  $|x| < b$ . W tym materiale dowiesz się jak należy postępować, jeśli wewnątrz modułu pojawi się suma lub różnica liczby i zmiennej. Z geometrii wiemy, że odległość dwóch dowolnych punktów jest liczbą nieujemną. Odległość dwóch punktów na osi liczbowej, to właśnie wartość bezwzględna różnicy ich współrzędnych.

### Twoje cele

- Utrwalisz definicję geometryczną wartości bezwzględnej liczby  $a$ .
- Udoskonalisz umiejętności zapisywania za pomocą warunków  $|x - a| < b$  oraz  $|x - a| \leq b$ , przedziałów przedstawionych na osi liczbowej.
- Nauczysz się rozwiązywać nierówności typu  $|x - a| < b$  oraz  $|x - a| \leq b$ .
- Narysujesz wykres funkcji  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = |x - a|$ ,  $f(x) = |x + a|$  i odczytasz z nich rozwiązanie odpowiednich nierówności.

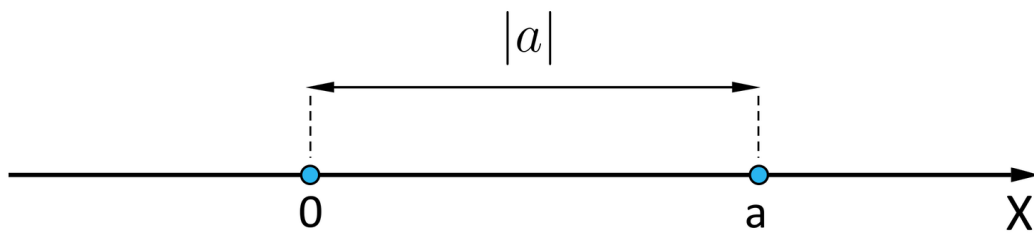
# Przeczytaj

---

## Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej $a$

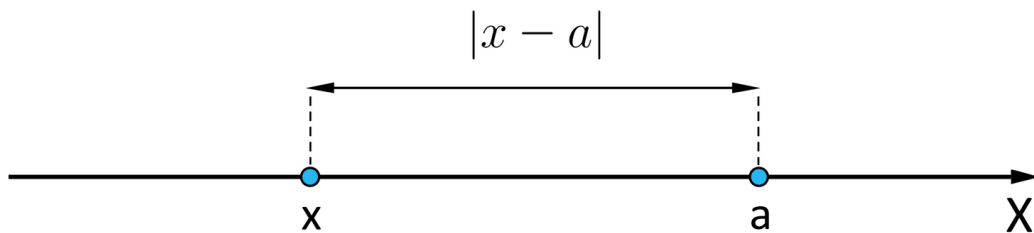
Wiesz już, że wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $a$ , możemy zinterpretować jako odległość tej liczby od liczby 0 na osi liczbowej.

$|a|$  – odległość liczby  $a$  od liczby 0 na osi liczbowej.



Odległość dwóch punktów na osi liczbowej, to wartość bezwzględna różnicy ich współrzędnych.

$|x - a|$  – odległość liczby  $a$  od liczby  $x$  na osi liczbowej.

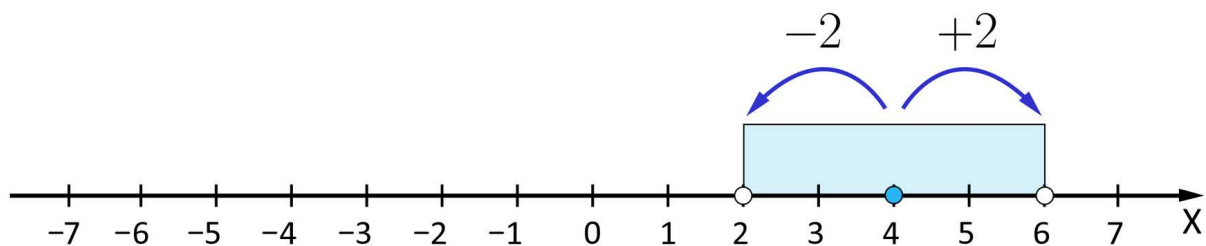


Zapoznaj się z przykładami.

### Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające warunek  $|x - 4| < 2$ .

Warunek ten spełniają wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , których odległość od liczby 4 jest mniejsza od 2.



Rozwiązaniem nierówności  $|x - 4| < 2$  jest przedział otwarty  $(2, 6)$ .

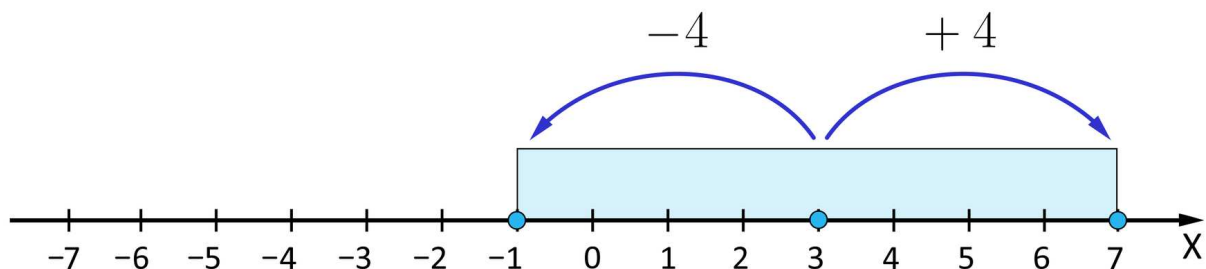
Zwróć uwagę, że liczby 2 oraz 6 nie należą do tego przedziału, ponieważ ich odległość od liczby cztery **jest równa 2**.

$$x \in (2, 6)$$

### Przykład 2

Rozwiąż nierówność  $|x - 3| \leq 4$ . Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału.

Warunek ten spełniają wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , których odległość od liczby 3 jest równa 4 oraz te, których ta odległość jest mniejsza od 4.



Rozwiązaniem nierówności  $|x - 3| \leq 4$  jest przedział domknięty  $\langle -1, 7 \rangle$ .

Liczby  $-1$  oraz  $7$  należą do tego przedziału.

$$x \in \langle -1, 7 \rangle$$

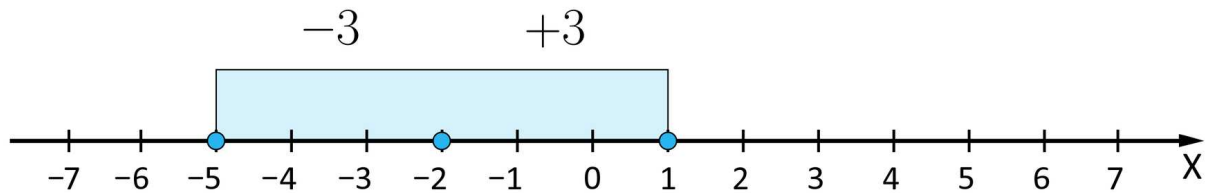
### Przykład 3

Rozwiąż nierówność  $|x + 2| \leq 3$ . Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej i zapisz za pomocą przedziału.

Aby różnica pod modułem była widoczna, możemy zapisać powyższą nierówność następująco:

$$|x - (-2)| \leq 3$$

A zatem ten warunek jest spełniony przez wszystkie liczby rzeczywiste  $x$ , których odległość od liczby  $(-2)$  jest równa 3 oraz te, których ta odległość jest mniejsza od 3.



Rozwiązaniem nierówności  $|x + 2| \leq 3$  jest przedział domknięty  $\langle -5, 1 \rangle$ .

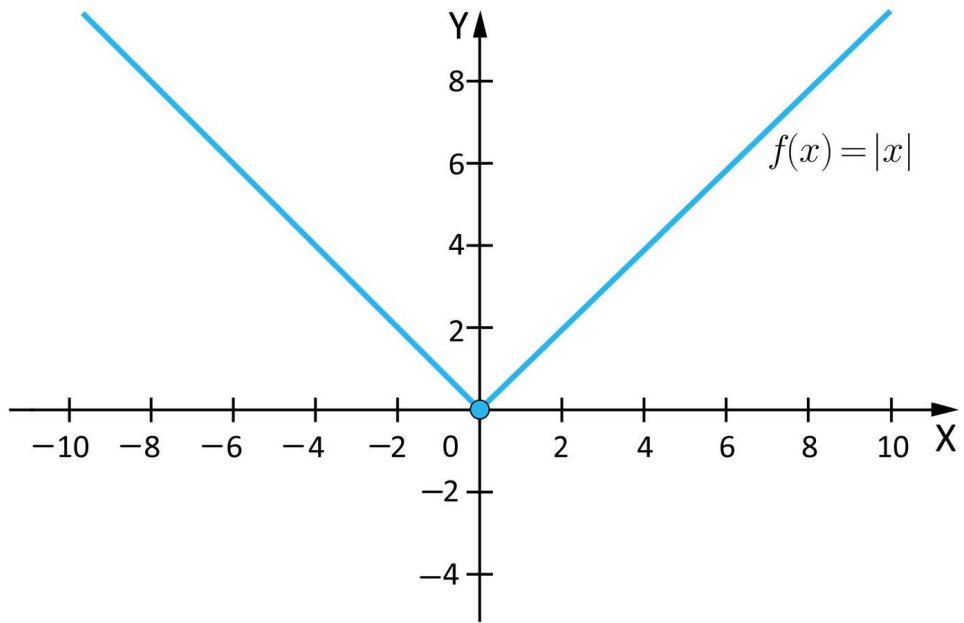
$$x \in \langle -5, 1 \rangle$$

Nierówności tego typu możemy również rozwiązywać korzystając z wykresu funkcji  $f(x) = |x|$ .

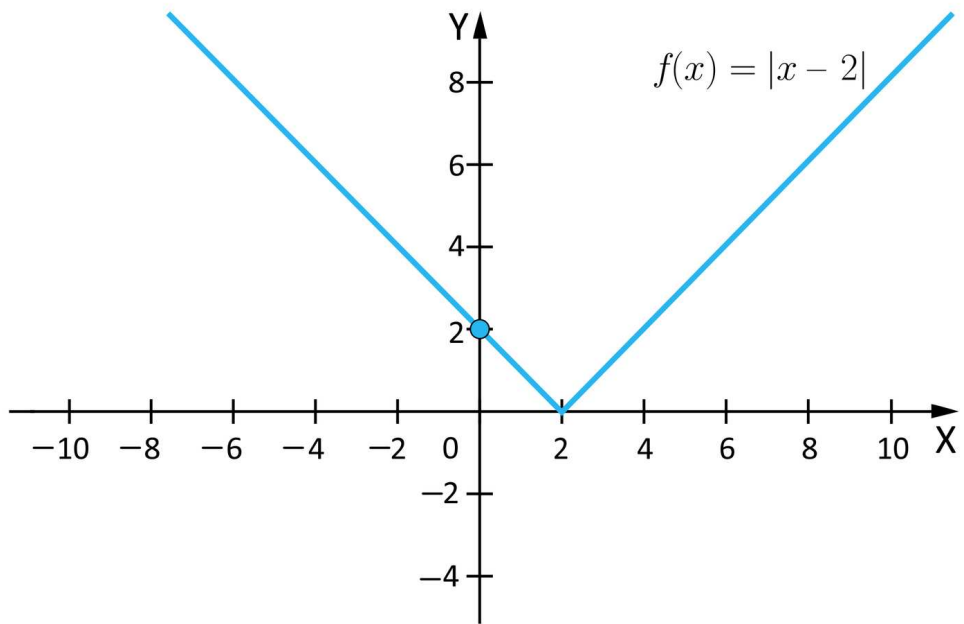
#### Przykład 4

Przypomnij sobie jak wyglądają wykresy funkcji, w wzorze których pojawia się symbol modułu. Przeanalizuj poniższe przykłady.

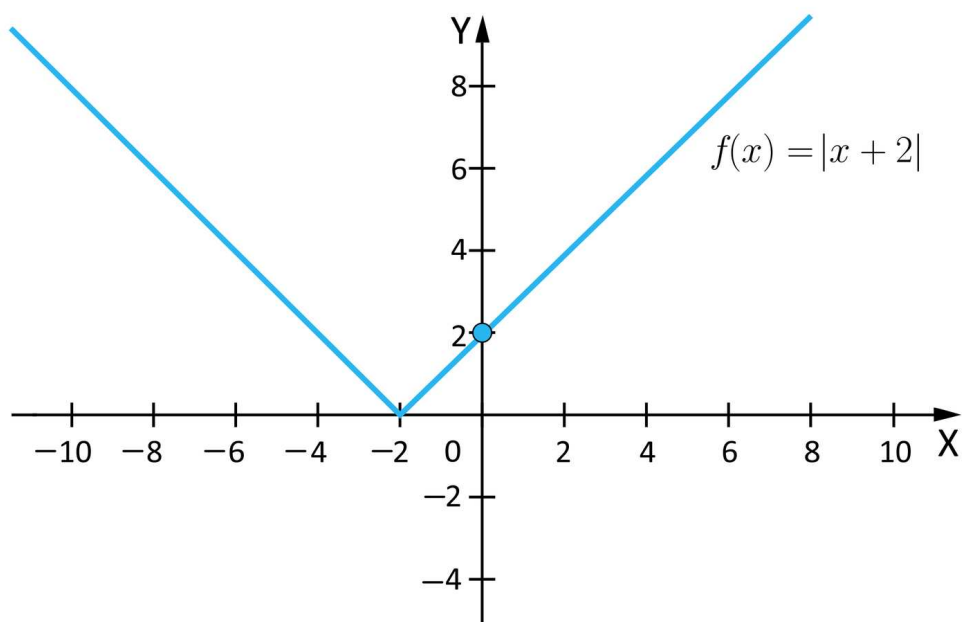
$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = |x - 2|$$



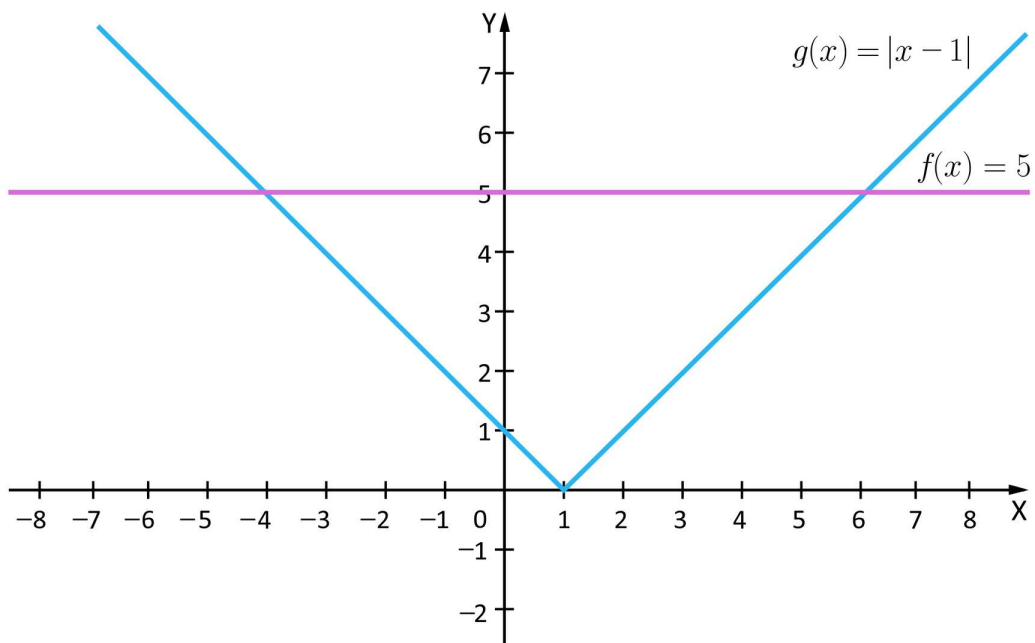
$$f(x) = |x + 2|$$



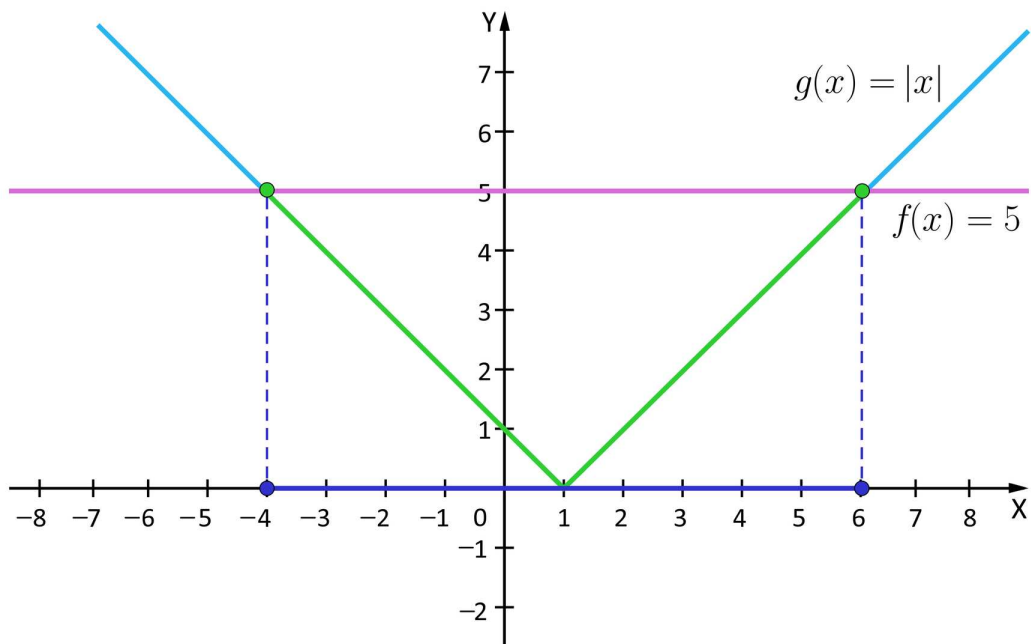
### Przykład 5

Rozwiąż graficznie nierówność  $|x - 1| \leq 5$ . Zapisz rozwiązanie za pomocą przedziału.

Rysujemy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = 5$  oraz  $g(x) = |x - 1|$ .



Odczytujemy z wykresu w jakim przedziale, wartości funkcji  $g$  są równe wartościom funkcji  $f$  lub od nich mniejsze.



Rozwiązaniem nierówności  $|x - 1| \leq 5$  jest przedział domknięty  $\langle -4, 6 \rangle$ .

$$x \in \langle -4, 6 \rangle$$

## Słownik

odległość dwóch punktów na osi liczbowej

wartość bezwzględna różnicy współrzędnych tych punktów  $|x_1 - x_2|$

# Film samouczek

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady rozwiązywania nierówności modułowych metodą graficzną, przedstawione w filmie samouczku.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DZvWgTpoE>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej interpretacji geometrycznej nierówności.

---




## Polecenie 2

Rozwiąż nierówność  $|x + 3| \leq 4$ .

Spróbuj zastosować każdy z zaprezentowanych sposobów.

Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



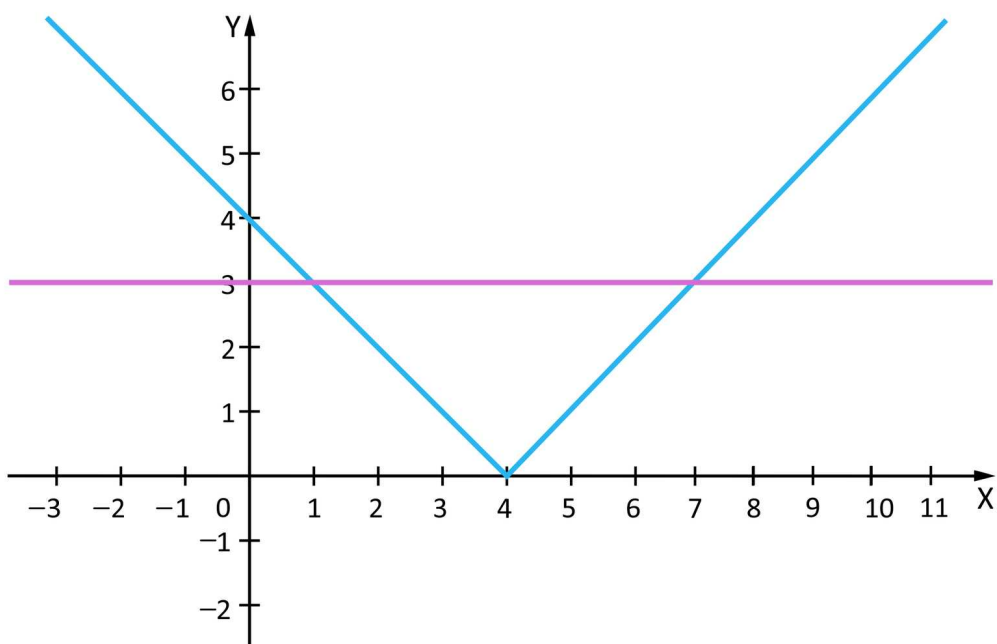
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Wskaż nierówności, których rozwiązania można odczytać z poniższego wykresu.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wskaż wykres, z którego możesz odczytać rozwiązanie nierówności  $|x + 5| < 4$ .

## Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówności:

a.  $|x - 10| < 6$ ,

b.  $|-x - 8| \leq 4$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Wojciechowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Interpretacja geometryczna nierówności typu  $|x - a| < b$

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu:  $|x + 4| = 5$ ,  $|x - 2| < 3$ ,  $|x + 3| \geq 4$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- utrwała definicję geometryczną wartości bezwzględnej
- doskonali umiejętności zapisywania przedziałów przedstawionych na osi liczbowej za pomocą warunków  $|x - a| < b$  oraz  $|x - a| \leq b$
- rozwiązuje nierówności typu  $|x - a| < b$  oraz  $|x - a| \leq b$
- rysuje wykresy funkcji  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = |x - a|$ ,  $f(x) = |x + a|$  i odczytuje z nich rozwiązanie odpowiednich nierówności

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- analiza przypadku
- grupy eksperckie

### Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

### Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

### Przebieg lekcji

#### Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie w wyznaczonych grupach przypominają sobie wiadomości i umiejętności dotyczące zaznaczania na osi przedziałów określonymi warunkami typu  $|x| < b$ ,  $|x| \leq b$  oraz wykresów funkcji  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = |x - a|$ ,  $f(x) = |x + a|$ .

#### Faza realizacyjna:

1. Przedstawiciele grup eksperckich omawiają przydzielony temat:
  - zaznaczanie na osi przedziałów określonymi warunkami typu  $|x| < b$ ,
  - zaznaczanie na osi przedziałów określonymi warunkami typu  $|x| \leq b$ ,
  - wykresy funkcji  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = |x - a|$ ,  $f(x) = |x + a|$ .
2. Każda grupa ma 5 minut na przedstawienie prezentacji swojego zagadnienia.
3. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz film samouczek.
4. Pracując indywidualnie, uczniowie wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym. Przy pomocy nauczyciela wyjaśniają wątpliwości.
5. Pracując indywidualnie, uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 8.

#### Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Uczniowie wskazują nauczycielowi, na jakie trudności natknęli się rozwiązując zadania. Wspólnie znajdują rozwiązanie problemów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

#### Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia, których nie zdążyli zrobić na lekcji.

**Materiały pomocnicze:**

- [Definicja wartości bezwzględnej](#)
- [Nierówności stopnia pierwszego](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą wykorzystać materiały multimedialne do utrwalenia wiadomości z lekcji i jako pomoc przy odrabianiu pracy domowej.