



Okręgi styczne zewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Okręgi styczne zewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej

Źródło: Phil Sheldon, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Wiemy, że nie każdy jest wybitnym rysownikiem, który przelewa na papier nawet najdziwniejszy wyobrażony kształt. Są jednak rysunki niezwykle schematyczne i na ogół wszyscy potrafimy je narysować. Co ciekawe, są zazwyczaj do siebie dość podobne. Weźmy na przykład takiego bałwana. Większość z nas widzi go od razu jako zestaw trzech różnej wielkości okręgów ułożonych na sobie. W jaki sposób są ułożone? No właśnie! Jak okręgi styczne zewnętrznie.

I tym właśnie zajmiemy się w tym materiale.



Źródło: Dustin Hart, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

- Poznasz warunki, jakie powinny zaistnieć, aby okręgi były styczne zewnętrznie.

- Obliczysz współrzędne punktu styczności.
- Zastosujesz warunek styczności w zadaniach.

Przeczytaj

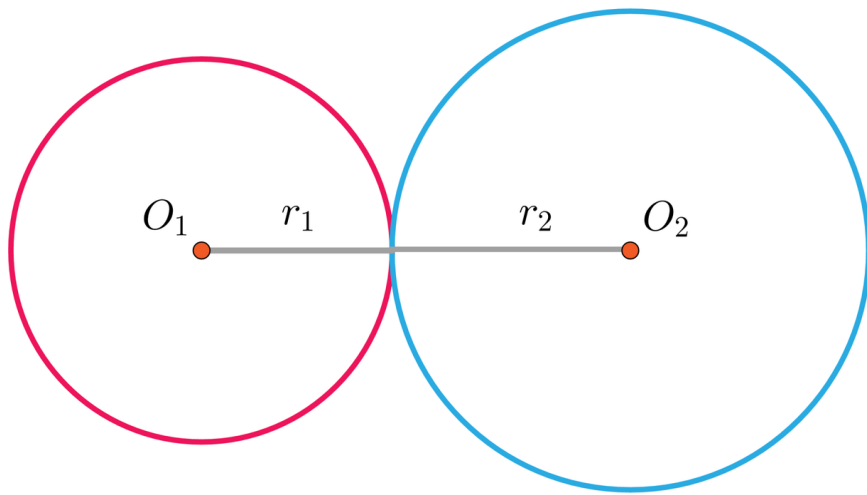
Rozważmy dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie $O_1 = (a_1, b_1)$ i promieniu długości r_1 oraz okrąg o środku w punkcie $O_2 = (a_2, b_2)$ i promieniu długości r_2 .

Dwa okręgi mające dokładnie jeden punkt wspólny nazywamy **stycznymi**. Punkt wspólny nazywamy wówczas **punktem styczności**. Okręgi mogą być styczne zewnętrznie lub styczne wewnętrznie.

Okręgi są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środków okręgów jest równa sumie długości ich promieni:

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2.$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający styczności zewnętrznej dwóch okręgów.



Przykład 1

Sprawdźmy, czy okręgi o promieniach $r_1 = 10$, $r_2 = 16$, których odległość między środkami wynosi 26, są styczne zewnętrznie.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zachodzi warunek $|O_1O_2| = r_1 + r_2 = 10 + 16 = 26$. Zatem okręgi te są styczne zewnętrznie.

Przykład 2

Sprawdźmy, czy okręgi o równaniach $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ i $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ są styczne zewnętrznie.

Rozwiązanie

Okrąg o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ ma środek w punkcie $O_1 = (-5, 3)$ i promień długości $r_1 = 4$.

Okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ ma środek w punkcie $O_2 = (-2, -1)$ i promień długości $r_2 = 1$.

Obliczamy odległość środków tych okręgów:

$$|O_1O_2| = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Zatem $|O_1O_2| = r_2 + r_1 = 4 + 1 = 5$, co oznacza, że okręgi są styczne zewnętrznie.

Przykład 3

Dany jest okrąg K_1 o równaniu $x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7 = 0$. Wyznamy równanie okręgu K o środku w punkcie $O = (4, 6)$ **stycznego zewnętrznego** do okręgu K_1 .

Rozwiązanie

Sprowadzamy równanie okręgu K_1 do postaci kanonicznej.

Po przekształceniach

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 + 4y + 7 &= \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 7 = (x + 2)^2 + (y + 2)^2 - 1 \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

Stąd: współrzędne środka okręgu K_1 : $O_1 = (-2, -2)$, a jego promień ma długość $r_1 = 1$.

Równanie okręgu K o środku w punkcie $O = (4, 6)$ jest postaci $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = r^2$.

Okręgi K_1 i K są styczne zewnętrznie, więc zachodzi warunek $|OO_1| = r + r_1$.

Aby obliczyć odległość między środkami okręgów skorzystamy ze wzoru na odległość dwóch punktów: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Mamy więc:

$$|OO_1| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (6 - (-2))^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Z warunku $|OO_1| = r + r_1$ wyznaczamy r :

$$r = |OO_1| - r_1 = 10 - 1, \text{ co daje } r = 9.$$

Zatem równanie okręgu K ma postać: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 81$.

Przykład 4

Dane są dwa okręgi: K_1 o równaniu $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ i K_2 o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$. Napiszemy równanie okręgu o najmniejszym promieniu, stycznego zewnętrznie do okręgów K_1 i K_2 .

Rozwiązanie

Środek okręgu stycznego zewnętrznie do okręgów K_1 i K_2 o najmniejszym promieniu długości r jest współliniowy z punktami O_1 i O_2 , zatem leży na prostej O_1O_2 .

Wyznamy współrzędne środków okręgów K_1 i K_2 . W tym celu ich równania zapisujemy w postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$$K_1 : x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 3 = 0$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$K_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 19 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Okrąg K_1 ma środek w punkcie $O_1 = (0, -1)$ i promień długości $r_1 = 2$.

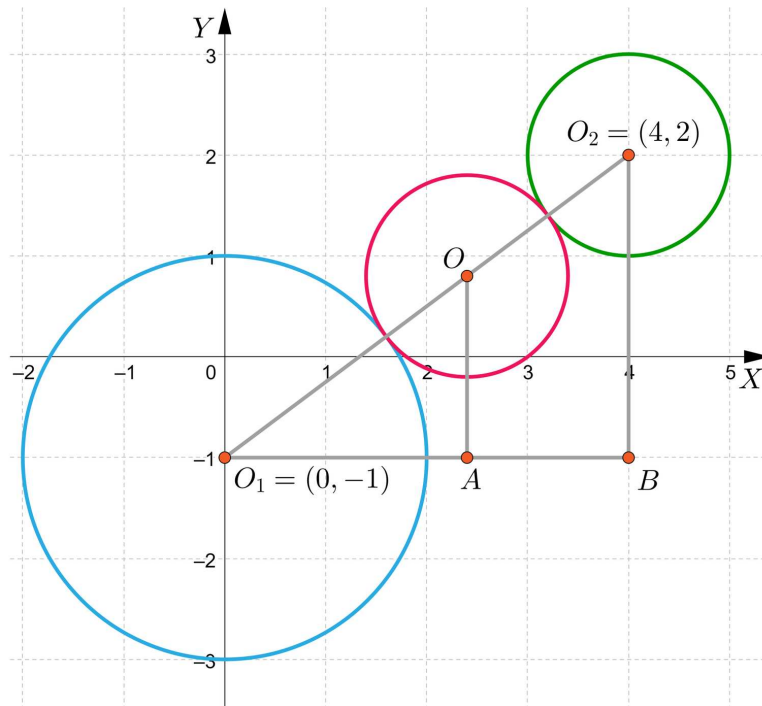
Okrąg K_2 ma środek w punkcie $O_2 = (4, 2)$ i promień długości $r_2 = 1$.

Okrąg K ma środek w punkcie $O = (a, b)$ i promień długości r .

Jeżeli okręgi K_1 i K są styczne zewnętrznie, to $|O_1O| = r_1 + r = 2 + r$.

Jeżeli okręgi K_2 i K są styczne zewnętrznie, to $|O_2O| = r_2 + r = 1 + r$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy że: $A = (a, -1)$, $B = (4, -1)$.

Trójkąt O_1BO_2 jest prostokątny, zatem skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|O_1B|^2 + |BO_2|^2 = |O_1O_2|^2.$$

Ponieważ $|O_1O| = r_1 + 2r + r_2 = 2 + 2r + 1 = 3 + 2r$, $|O_1B| = 4$ i $|BO_2| = 3$, to

$$4^2 + 3^2 = (3 + 2r)^2$$

$$25 = (3 + 2r)^2,$$

stąd $3 + 2r = 5$, zatem $r = 1$.

Wyznaczamy teraz współrzędne środka okręgu K .

Zauważmy, że: $|O_1B| = 4$, $|BO_2| = 3$ i $|AO| = b + 1$.

Ponadto, gdy $r = 1$, to $|O_1O| = 2 + r = 3$, a $|O_2O| = 1 + r = 2$.

$AO \parallel BO_2$, zatem z twierdzenia Talesa możemy zapisać:

$$1. \frac{|O_1B|}{|O_1A|} = \frac{|O_1O_2|}{|O_1O|}, \text{ co daje } \frac{4}{a} = \frac{5}{3} \text{ i stąd } a = \frac{12}{5},$$

$$2. \frac{|AO|}{|O_1O|} = \frac{|BO_2|}{|O_1O_2|}, \text{ co daje } \frac{|AO|}{3} = \frac{3}{5} \text{ i stąd } |AO| = \frac{9}{5}.$$

Ponieważ $|AO| = b + 1$, to $b = |AO| - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$.

Równanie szukanego okręgu: $\left(x - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = 1$.

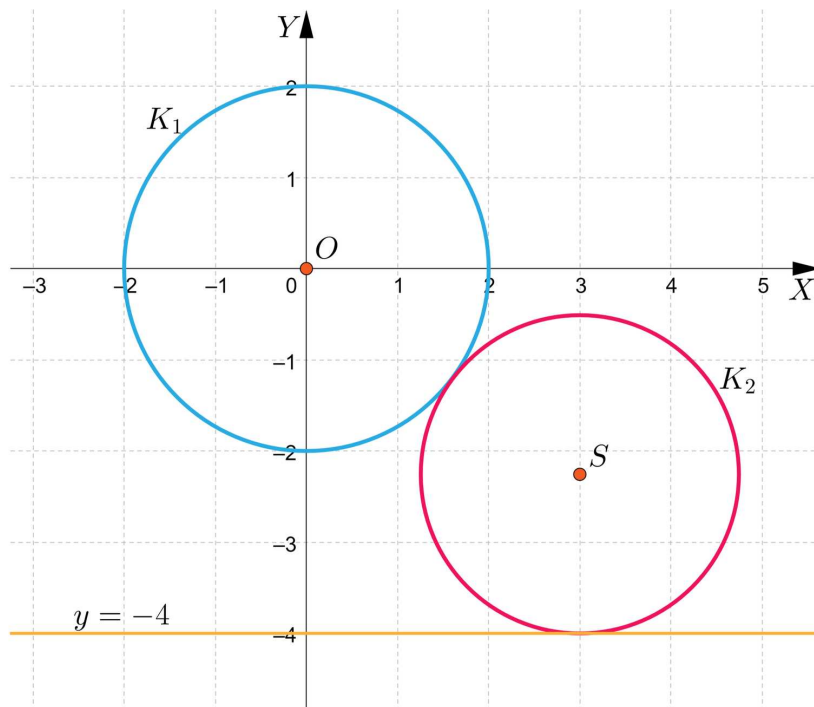
Przykład 5

Dany jest okrąg $K_1 : x^2 + y^2 = 4$ i prosta $y = -4$. Wykażemy, że środki okręgów stycznych do danej prostej oraz stycznych zewnętrznie do danego okręgu należą do pewnej paraboli.

Rozwiązanie

Okrąg $K_1 : x^2 + y^2 = 4$ ma środek w punkcie $O = (0, 0)$ oraz promień długości $r_1 = 2$.

Oznaczmy przez K_2 okrąg styczny do okręgu K_1 i prostej $y = -4$, jego środek przez $S(x, y)$ a długość promienia przez r .



Z warunku styczności okręgu K_2 do okręgu K_1 mamy: $|OS| = r_1 + r = 2 + r$, co oznacza, że promień okręgu K_2 ma długość $r = |OS| - 2$.

Długość odcinka OS wynosi $|OS| = \sqrt{x^2 + y^2}$, więc $r = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$.

Ze styczności okręgu K_2 o środku $S = (x, y)$ do prostej $y = -4$ wynika, że $r = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y + 4|$.

Porównując obydwa warunki mamy:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = |y + 4|,$$

$$\text{stąd } |y + 4| + 2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zauważmy, że $y > -4$. Wobec tego $y + 6 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Podnosząc obie strony równości do kwadratu otrzymujemy:

$$y^2 + 12y + 36 = x^2 + y^2,$$

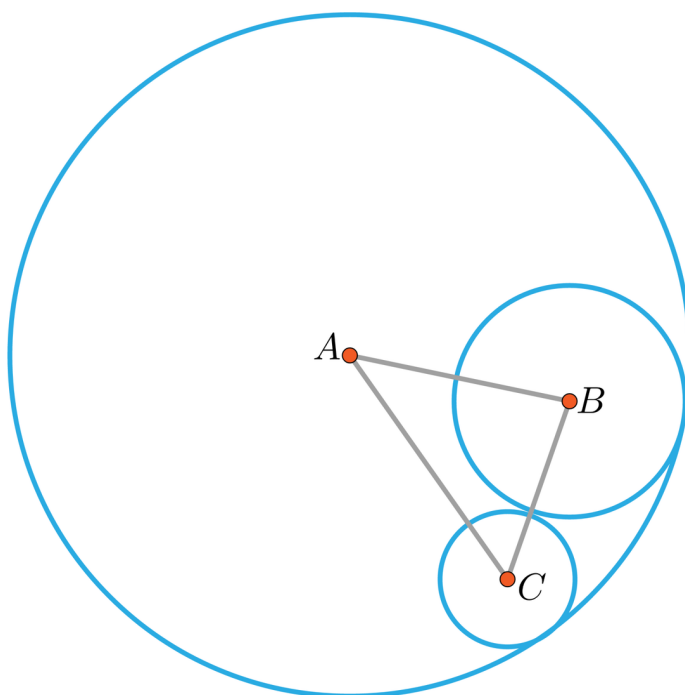
$$\text{czyli } y = \frac{1}{12}x^2 - 3.$$

Obrazem geometrycznym szukanego zbioru jest parabola określona wzorem

$$y = \frac{1}{12}x^2 - 3.$$

Przykład 6

Dany jest okrąg o środku w punkcie A i promieniu długości 4 oraz dwa okręgi położone tak, jak na rysunku.



Obliczymy obwód trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów.

Rozwiązanie

Okrąg K_A ma środek w punkcie A i promień długości $r_A = 4$.

Okrąg K_B ma środek w punkcie B i promień długości r_B .

Okrąg K_C ma środek w punkcie C i promień długości r_C .

Obwód L trójkąta ABC jest sumą długości jego boków: $L = |AB| + |BC| + |CA|$.

Okręgi K_A i K_B są styczne wewnętrznie, więc $|AB| = r_A - r_B = 4 - r_B$.

Okręgi K_A i K_C są styczne wewnętrznie, więc $|CA| = r_A - r_C = 4 - r_C$.

Okręgi K_B i K_C są styczne zewnętrznie, więc $|BC| = r_B + r_C$.

Zatem $L = 4 - r_B + 4 - r_C + r_B + r_C = 8$.

Obwód trójkąta przedstawionego na rysunku wynosi 8.

Słownik

okrąg o środku O i promieniu długości r

zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r

okręgi styczne zewnętrznie

dwa okręgi są styczne zewnętrznie, gdy odległość środków tych okręgów jest równa sumie długości ich promieni

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą okręgi styczne zewnętrznie, a następnie rozwiąż polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1CafZDVI>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego okręgów zewnętrznych stycznie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Polecenie 2

Sprawdź, czy okręgi $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 81$ i $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 16$ są styczne zewnętrznie.

Polecenie 3

Okręgi $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ i $x^2 + (y + 4)^2 = 9$ są styczne zewnętrznie. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie: K_1 o środku w punkcie O_1 i promieniu r_1 oraz K_2 o środku w punkcie O_2 i promieniu r_2 . Wiadomo, że $|O_1O_2| = 23$ oraz $r_1 = 15$. Jaką długość ma promień okręgu O_2 ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $r_2 = 8$

☐ $r_2 = 18$

☐ $r_2 = 28$

☐ $r_2 = 38$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równania okręgów z długością ich promieni tak, aby były to okręgi styczne zewnętrznie.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-3)^2 &= r_1^2 \text{ oraz} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 &= r_2^2\end{aligned}$$

$$r_1 = 1\frac{1}{3}, r_2 = 2\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}x^2 + (y-4)^2 &= r_1^2 \text{ oraz} \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 &= r_2^2\end{aligned}$$

$$r_1 = 2, r_2 = 1$$

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + y^2 &= r_1^2 \text{ oraz} \\ (x-1)^2 + y^2 &= r_2^2\end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{1}{7}, r_2 = \frac{30}{35}$$

$$\begin{aligned}(x+5)^2 + (y-1)^2 &= r_1^2 \text{ oraz} \\ (x+5)^2 + (y+2)^2 &= r_2^2\end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{7}{5}, r_2 = 0,6$$

Ćwiczenie 3



Jaką długość powinien mieć promień okręgu o środku w punkcie $O = (2, 0)$, aby był on styczny zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$? Przeciągnij poprawną odpowiedź w puste pole.

Promień okręgu powinien mieć długość .

Ćwiczenie 4



Dany jest okrąg K_1 o równaniu $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 10 = 0$. W wyznaczone miejsca wpisz odpowiednie liczby całkowite.

1. Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem o równaniu $x^2 + (y - 13)^2 = r^2$, gdy $r =$

2. Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 7)^2 + (y - 6)^2 = r^2$,

gdy $r =$.

3. Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$,

gdy $r =$.

Ćwiczenie 5



Dany jest okrąg K_1 o równaniu $x^2 + y^2 = 9$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Punkt styczności okręgu K_1 z okręgiem o równaniu $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 49$ ma współrzędne $(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

☐ Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = r^2$, gdy $r = 2$.

☐ Punkt styczności okręgu K_1 z okręgiem o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ ma współrzędne $(-2, \sqrt{5})$.

☐ Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$, gdy $r = 3 - \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 6



Dany jest okrąg K_1 o równaniu $(x - 8)^2 + y^2 = 100$ oraz okrąg K_2 o równaniu $(x - a)^2 + (y + 15)^2 = r^2$. Środek okręgu K_2 leży na prostej o równaniu $y = -x - 15$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem K_2 , gdy $r = 7$.

☐ Punkt styczności okręgu K_1 z okręgiem K_2 ma współrzędne $(\frac{56}{17}, -\frac{150}{17})$.

☐ Środek okręgu K_2 ma współrzędne $(-30, 15)$.

Ćwiczenie 7



Okręgi o równaniach: $x^2 + y^2 = 40$ oraz $x^2 + y^2 + 24x - 8y + 120 = 0$ są styczne zewnętrznie. Jakie współrzędne ma punkt styczności tych okręgów? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $(-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

☐ $(-5, \sqrt{15})$

☐ $(-6, 2)$

☐ $(2, -6)$

Ćwiczenie 8



Dany jest okrąg K_1 o równaniu $(x + 7)^2 + y^2 = 25$ oraz okrąg K_2 o równaniu $x^2 + y^2 - 34x - 14y + 238 = 0$.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie okręgu o najmniejszym promieniu stycznego zewnętrznego do okręgów K_1 i K_2 ma postać $(x - 2, 6)^2 + (y - 2, 8)^2 = 25$.

☐ Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie z okręgiem K_2 .

☐ Odległość między środkami tych okręgów wynosi 25.

☐ Punkt styczności tych okręgów ma współrzędne $(\frac{189}{35}, -\frac{119}{5})$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okręgi styczne zewnętrznie na płaszczyźnie kartezjańskiej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostokąt do innej prostej, styczność do okręgu;

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;

2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna warunek konieczny i wystarczający styczności zewnętrznej dwóch okręgów
- wykazuje styczność zewnętrzną dwóch okręgów
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia współrzędnych punktu styczności dwóch okręgów
- wykorzystuje warunek konieczny i wystarczający styczności zewnętrznej dwóch okręgów w rozwiązaniach zadań
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji i ćwiczeń interaktywnych
- pokaz multimedialny
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają równanie okręgu.
2. Uczniowie podają warunek styczności wewnętrznej dwóch okręgów.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Metodą „burzy mózgów” uczniowie podają warunek jaki musi być spełniony, aby okręgi były styczne zewnętrznie.
2. Warunek konieczny i wystarczający zostaje zapisany na tablicy przez chętnego ucznia.
3. Nauczyciel prezentuje animację.
4. Na forum całej klasy uczniowie omawiają rozwiązania zadań przedstawionych w animacji.
5. Uczniowie, w parach, rozwiązują zadania znajdujące się pod animacją.
6. Chętni uczniowie, podają rozwiązania zapisując je na tablicy.
7. Nauczyciel zwraca uwagę na poprawność zapisu i jego estetykę, wyjaśnia niezrozumiałe dla uczniów elementy.
8. Nauczyciel prosi uczniów aby zapoznali się z przykładem 4. zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
9. Uczniowie na forum całej klasy omawiają rozwiązanie wskazując na zastosowane twierdzenia Pitagorasa i Talesa.
10. Nauczyciel prosi uczniów aby zapoznali się z przykładem 5. zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
11. Uczniowie na forum całej klasy omawiają rozwiązanie wskazując na zastosowanie warunku styczności okręgu do prostej.
12. Nauczyciel prosi uczniów o rozwiązanie wskazanych ćwiczeń interaktywnych.
13. Uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie formułują warunek konieczny i wystarczający styczności wewnętrznej dwóch okręgów.
3. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Wzajemne położenie dwóch okręgów](#)
- [Zadania](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może poprosić uczniów aby zapoznali się, przed lekcją, z animacją, usprawni to pracę na lekcji.