



Miary kątów między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Miary kątów między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Zegar słoneczny to urządzenie, które wykorzystuje Słońce do mierzenia czasu. Jego działanie polega na wskazaniu odpowiedniej podziałki za pomocą cienia rzucanego przez nieruchomą wskazówkę na skalę czasu. Podstawowym i najbardziej pierwotnym rodzajem zegara słonecznego jest gnomon. Jest to pionowo ustawiona wskazówka – najczęściej osadzony pręt (kolumna, pionowy słup lub kijek wbity w ziemię), którego cień rzucany na tarczę umieszczoną w płaszczyźnie horyzontu, na podstawie położenia Słońca, wskazuje czas na odpowiedniej podziałce. Tarcza zegara słonecznego może również być pionowa, wówczas inaczej ustawia się wskazówkę.



Źródło: Pixabay.com, dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Niezależnie od rodzaju zegara słonecznego zasada działania jest zawsze podobna. Używa się cienia, który zmienia swoje położenie i długość o różnych porach dnia. Taka sama idea przyświeca definicji kąta między prostą a płaszczyzną. Aby zdefiniować taki kąt używa się pojęcia rzutu prostokątnego prostej (czyli „cienia” prostej) na płaszczyźnie (czyli „tarczy zegara”).

W tym materiale przeanalizujesz możliwe kąty między prostymi a płaszczyznami w ostrosłupach. Będziesz zatem określać wzajemne położenie odcinków i ścian w ostrosłupie.

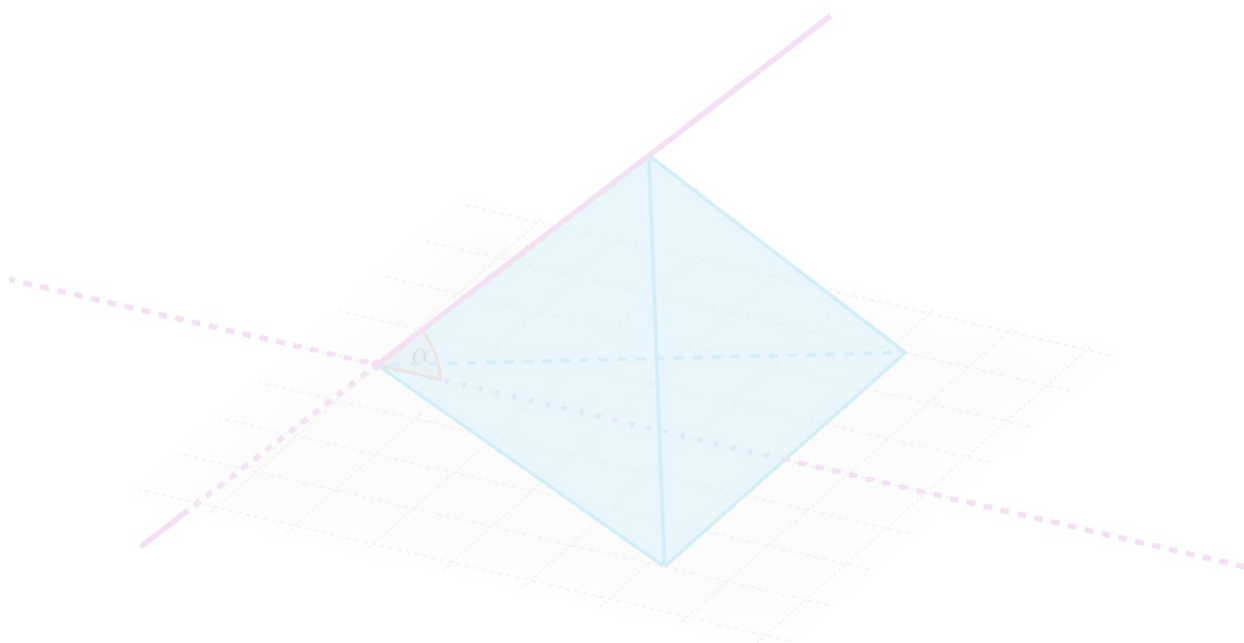
Twoje cele

- Nauczysz się zaznaczać odpowiednie kąty między prostymi i płaszczyznami w ostrosłupach na podstawie ich opisu słownego.
- Zastosujesz elementy trygonometrii do wyznaczania miar kątów w przestrzeni.
- Nauczysz się na różne sposoby definiować kąty w przestrzeni, używając pojęcia kąta między odcinkami, kąta między odcinkiem i płaszczyzną oraz kąta dwuściennego.

Przeczytaj

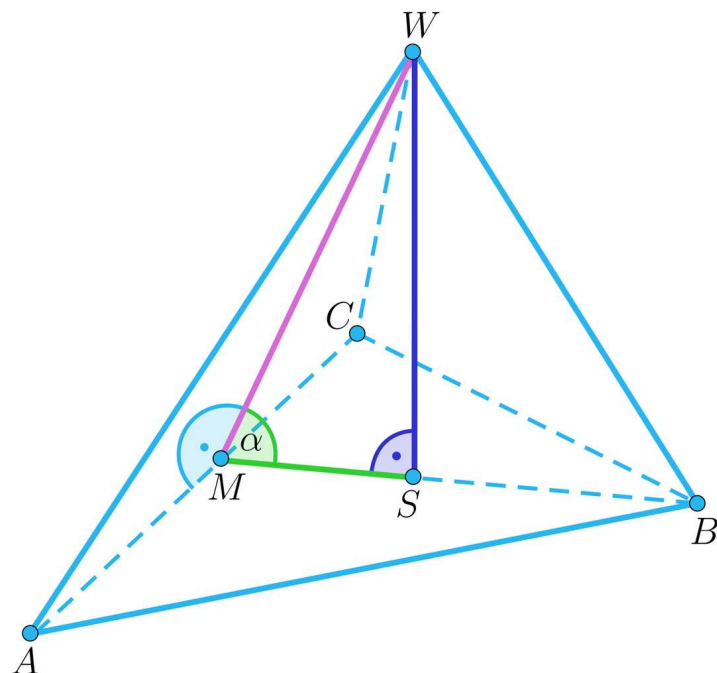
Ucząc się stereometrii spotkaliśmy się już z kątem między prostą a płaszczyzną. W tym materiale omówimy niełatwy, ale kluczowy moment w wielu zadaniach ze stereometrii, a mianowicie moment, w którym musimy zaznaczyć właściwy kąt w podanej bryle. Zajmiemy się oczywiście ostrosłupami.

Wykorzystaj poniższy aplet, aby zaobserwować, jak zaznaczyć w ostrosłupie kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a płaszczyzną jego podstawy. Jest to jeden z najczęściej występujących kątów w zadaniach. Zmieniając położenie suwaka możesz obserwować różne nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do jego podstawy.

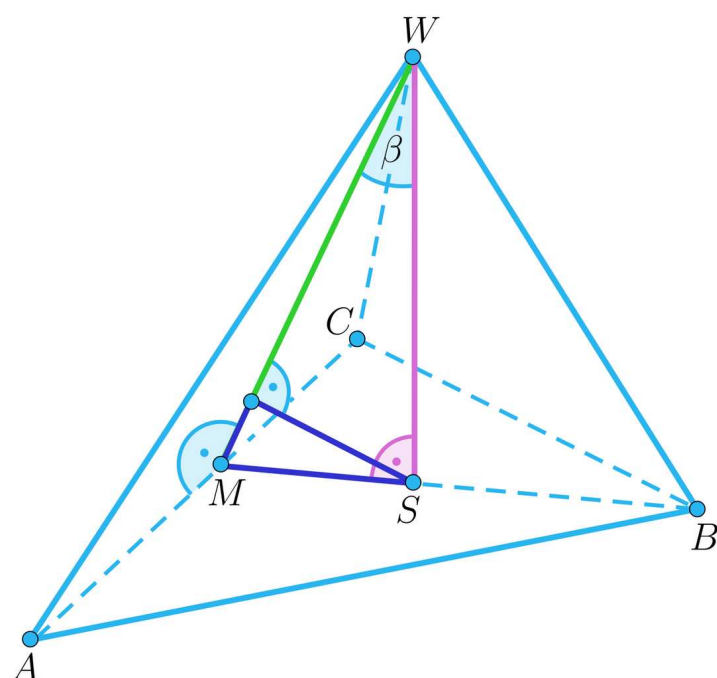


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfBWskNyM>

Powyższy aplet przedstawia jedynie obserwacje dotyczące kąta między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa prawidłowego. Możemy jednak analogicznie pracować na kącie między wysokością ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka W (tzw. **apotemą**) a podstawą ostrosłupa:



albo między wysokością ostrosłupa a jego ścianą boczną:



W każdym z tych przypadków musimy pamiętać, aby starannie przemyśleć, co jest rzutem prostokątnym danej prostej na wskazaną płaszczyznę. Aby ułatwić ten proces, na powyższych rysunkach każdorazowo na różowo zaznaczono odcinek uwzględniony w definicji kąta a na zielono jego rzut prostokątny na ścianę.

Jednocześnie w zadaniach skupionych na wyznaczaniu miar pewnych kątów często mamy do czynienia z sytuacją, gdy autor zadania nie podaje nam żadnej danej długości odcinka. Do kłopotów z interpretacją opisanego kąta dochodzi wówczas problem pracy na

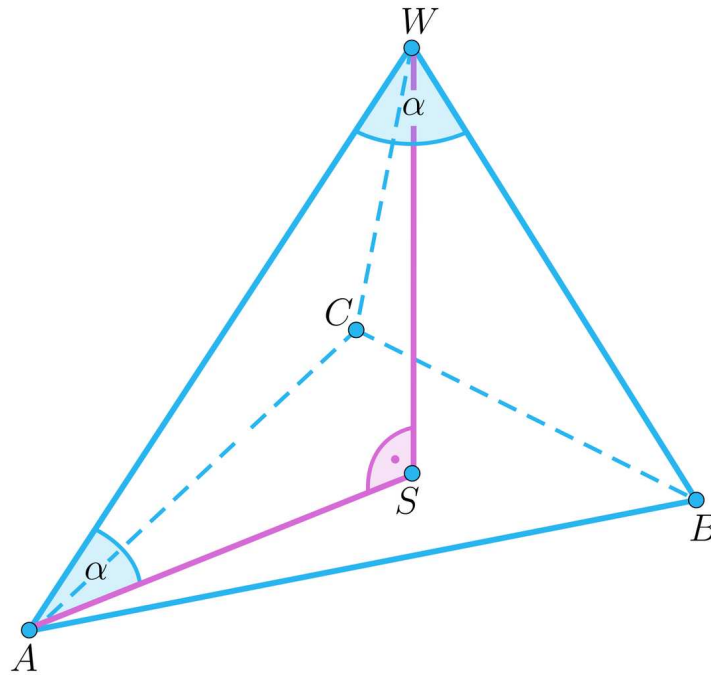
wyrażeniach algebraicznych, w których finalnie muszą skrócić się wszystkie przyjęte przez nas oznaczenia literowe długości poszczególnych odcinków. Przeanalizujemy kilka przykładów, aby zapoznać się z najczęściej stosowanymi metodami pracy w zadaniach dotyczących kątów między prostymi a płaszczyznami w ostrosłupach.

Przykład 1

Narysujemy ostrosłup prawidłowy trójkątny o podstawie ABC i wierzchołku W . Zaznaczymy kąt α nachylenia krawędzi bocznej AW do płaszczyzny podstawy. Wiedząc, że jest on równy kątowi między krawędziami bocznymi AW i BW tego ostrosłupa, obliczymy miarę kąta α .

Rozwiązanie:

Zacznijemy oczywiście od rysunku:



Aby zaznaczyć kąt α nachylenia krawędzi bocznej AW do płaszczyzny podstawy, określamy najpierw rzut prostokątny tej krawędzi na podstawę. Punkt A już do niej należy, natomiast rzutem prostokątnym punktu W na podstawę jest oczywiście spodek wysokości S ostrosłupa. Ostatecznie opisany w zadaniu kąt α to kąt WAS . Aby wyznaczyć miarę tego kąta wykorzystamy definicję funkcji trygonometrycznej cosinus w trójkącie prostokątnym WSA . Oznaczmy długość krawędzi podstawy ostrosłupa jako a , zaś długość jego krawędzi bocznej jako b :

$$\frac{|AS|}{|AW|} = \cos \alpha$$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \cos \alpha$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{3b} = \cos \alpha$$

$$\frac{a}{b\sqrt{3}} = \cos \alpha$$

$$a = b\sqrt{3} \cos \alpha$$

Wykorzystując informację z tekstu zadania, że kąt α jest równy kątowi AWB i stosując **twierdzenie cosinusów** w trójkącie AWB , otrzymujemy związek:

$$|AB|^2 = |AW|^2 + |WB|^2 - 2 \cdot |AW| \cdot |WB| \cdot \cos \angle AWB$$

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha.$$

Podstawiając teraz poprzednio otrzymaną zależność między a , b oraz α otrzymujemy:

$$3b^2 \cos^2 \alpha = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha$$

$$3 \cos^2 \alpha = 2 - 2 \cos \alpha$$

$$3 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 2 = 0.$$

Traktując ostatnie równanie jak równanie kwadratowe o niewiadomej $\cos \alpha$, otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \text{ lub } \cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ jednak wartość pierwszego rozwiązania jest mniejsza od (-1) , rozpatrujemy jedynie drugie rozwiązanie, które w przybliżeniu jest równe 0,54858.

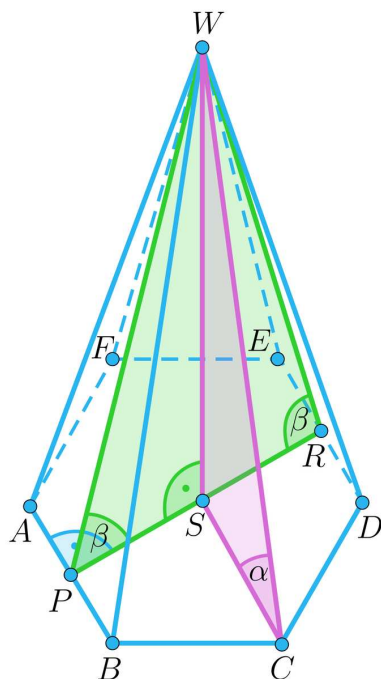
Wykorzystując tablice matematyczne, odczytujemy, że kąt α , który mieliśmy wyznaczyć, ma w przybliżeniu miarę 57° .

Przykład 2

Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEFW$. Wiedząc, że tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, obliczmy miary kątów wewnętrznych trójkąta PWR , gdzie P , R są środkami równoległych krawędzi podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Zacznijmy ponownie od rysunku bryły. W przypadku ostrosłupa prawidłowego wszystkie ściany boczne są trójkątami równoramiennymi przystającymi. Stąd nie ma znaczenia, przy których krawędziach zaznaczymy opisane w zadaniu kąty. Ważne jest jedynie poprawne naniesienie na rysunek rzutu prostokątnego krawędzi bocznej na płaszczyznę podstawy.



Ponownie przyjmijmy oznaczenia dla krawędzi podstawy a , zaś dla wysokości ostrosłupa H . Litery te pojawią się w rozwiązaniu dla poprawienia czytelności przekształceń, nie traktujemy ich jednak jako danych. W końcowej odpowiedzi nie mogą się zatem pojawić.

Wykorzystamy definicję funkcji trygonometrycznej tangens w trójkącie prostokątnym WSC :

$$\frac{H}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{H}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Zauważmy teraz, że jeżeli P jest środkiem krawędzi podstawy, to odcinek PS jest wysokością trójkąta równobocznego ABS o boku długości a . Ostatecznie wykorzystując w trójkącie WSP definicję funkcji trygonometrycznej tangens otrzymamy:

$$\frac{|WS|}{|PS|} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{\frac{H}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \operatorname{tg} \beta$$

$$1 = \operatorname{tg} \beta.$$

To oczywiście oznacza, że kąt β ma miarę 45° , jako kąt wewnętrzny trójkąta prostokątnego WSP . Ponieważ jednak trójkąt PWR jest trójkątem równoramiennym, bo

wysokości ścian bocznych są sobie równe, to ostatecznie kąty wewnętrzne tego trójkąta są równe odpowiednio:

$$|\angle WPR| = |\angle PRW| = 45^\circ \text{ oraz } |\angle PWR| = 90^\circ.$$

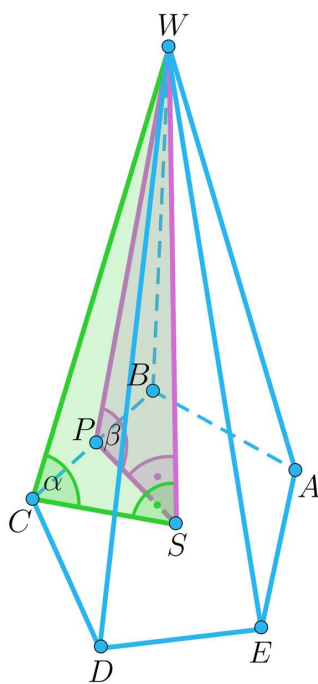
Ważną umiejętnością jest rozróżnianie w ostrosłupach kątów nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy oraz kątów nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy. Aby porównać ze sobą te dwa rodzaje kątów, rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 3

Wyznamy cosinusy kątów, jakie tworzą krawędź boczna i ściana boczna z podstawą prawidłowego ostrosłupa pięciokątnego, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi.

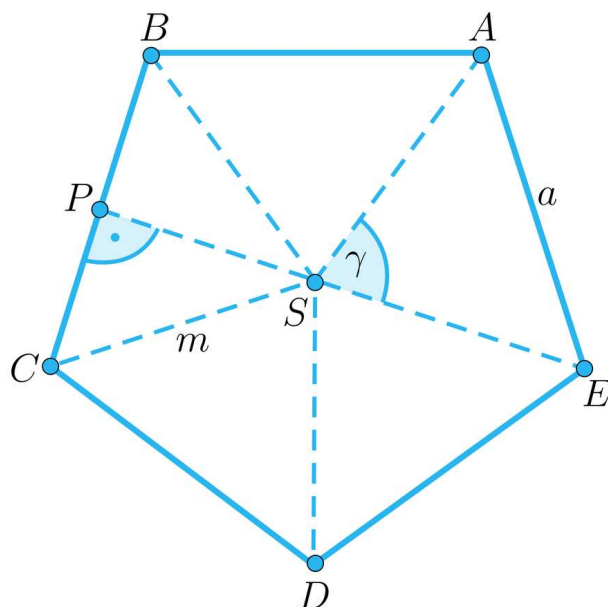
Rozwiązanie:

Przyjmijmy następujące oznaczenia dla ostrosłupa:



Mamy wyznaczyć miary dwóch kątów oznaczonych na rysunku symbolami α i β . Pierwszy kąt jest **kątem między prostą a płaszczyzną**, drugi jest **kątem między płaszczyznami**. Ponieważ wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to wszystkie krawędzie ostrosłupa są tej samej długości. Oznaczmy tę długość symbolem a .

Rozważmy najpierw własności podstawy naszego ostrosłupa, czyli pięciokąta foremnego.



Skoro pięciokąt jest foremny, to jego **kąt środkowy** γ ma miarę $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Pozwala to wyznaczyć długości odcinków PS oraz CS w zależności od przyjętej długości krawędzi a .

Odcinek PS (promień okręgu wpisanego do pięciokąta) wyrażamy przez a z trójkąta CPS :

$$\frac{|PC|}{|PS|} = \operatorname{tg} 36^\circ$$

$$|PS| = \frac{\frac{1}{2}a}{\operatorname{tg} 36^\circ}$$

$$|PS| = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Jednocześnie ten sam trójkąt CPS pozwala nam wyznaczyć odcinek CS (promień okręgu opisanego na pięciokącie):

$$\frac{|PC|}{|CS|} = \sin 36^\circ$$

$$|CS| = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin 36^\circ}$$

$$|CS| = \frac{a}{2 \sin 36^\circ}$$

Wykorzystując tablice trygonometryczne, możemy odszukać dokładne wartości funkcji

$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ oraz $\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Mamy zatem:

$$|PS| = \frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \text{ oraz } |CS| = \frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Ostatecznie wykorzystując w ostrosłupie trójkąt CSW otrzymujemy cosinus kąta między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa:

$$\frac{|CS|}{|CW|} = \cos \alpha$$

$$\frac{\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{a} = \cos \alpha$$

$$\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \cos \alpha$$

Analogicznie dla trójkąta PSW wyznaczamy cosinus kąta między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy ostrosłupa:

$$\frac{|PS|}{|PW|} = \cos \beta$$

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \cos \beta$$

$$\frac{1}{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} = \cos \beta.$$

Oczywiście, jeżeli zamiast dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych kąta 36° wykorzystalibyśmy ich wartości przybliżone, to wartość merytoryczna naszego rozwiązania nie uległaby zmianie.

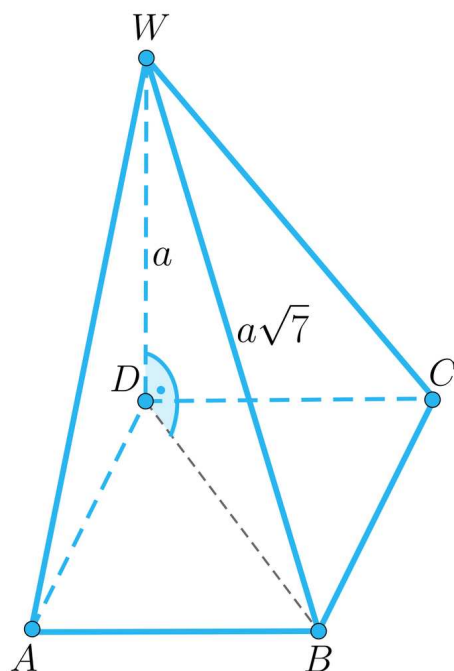
Zaznaczanie kątów w **ostrosłupach prawidłowych** jest dość powtarzalne. Po rozwiązaniu kilku zadań można zapamiętać, gdzie znajdują się rzuty najczęściej wykorzystywanych odcinków. Dlatego aby sprawdzić swoją umiejętność pracy z kątem między prostą a płaszczyzną w ostrosłupach, warto popracować z zadaniami, w których rozpatrywany ostrosłup nie jest prawidłowy.

Przykład 4

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna DW tego ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa i najkrótsza krawędź boczna tego ostrosłupa pozostają ze sobą w stosunku $1 : \sqrt{7}$. Obliczmy sinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych ostrosłupa do jego płaszczyzny podstawy.

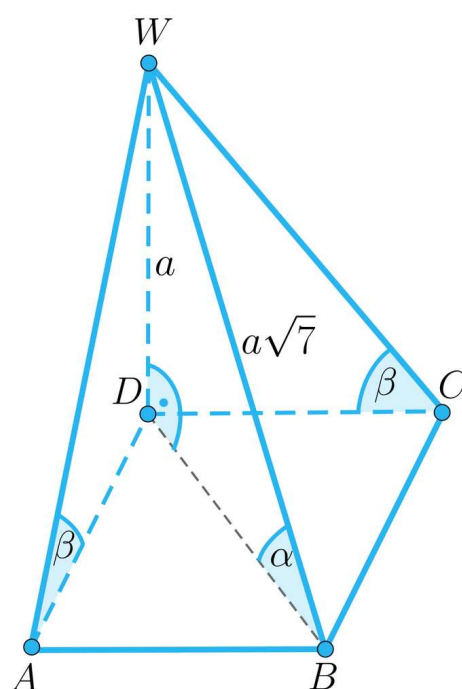
Rozwiązanie:

Zacznijmy od rysunku:



Przeanalizujemy najpierw kąty nachylenia poszczególnych krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy. Jeżeli krawędź WD jest prostopadła do podstawy, to pierwszy z poszukiwanych sinusów kątów to $\sin 90^\circ = 1$. Dla pozostałych krawędzi bocznych jeden ich koniec już należy do podstawy, zaś drugim końcem jest punkt W . Rzutem prostokątnym tego punktu na płaszczyznę jest punkt D . Konsekwentnie rzutem prostokątnym odcinka AW na podstawę jest odcinek AD , dla odcinka BW jest to odcinek BD i dla odcinka CW jest to odcinek CD .

Na rysunku sytuację możemy przedstawić następująco:



Musimy zatem obliczyć sinus kąta α między krawędzią boczną BW a przekątną BD podstawy:

$$\frac{|WD|}{|WB|} = \sin \alpha$$

$$\frac{a}{a\sqrt{7}} = \sin \alpha$$

$$\frac{\sqrt{7}}{7} = \sin \alpha.$$

Analogicznie postępujemy obliczając sinus kąta nachylenia krawędzi WA oraz krawędzi WC do płaszczyzny podstawy:

$$\frac{|WD|}{|WA|} = \frac{|WD|}{|WC|} = \sin \beta$$

$$\frac{a}{|WA|} = \frac{a}{|WC|} = \sin \beta.$$

Brakującą długość krawędzi bocznej wyznaczymy na mocy twierdzenia Pitagorasa stosowanego kolejno w trójkątach WDA , DAB oraz WDB :

$$|WA|^2 = |DW|^2 + |DA|^2$$

$$|WA|^2 = a^2 + \left(\frac{|DB|}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$|WA|^2 = a^2 + \frac{|DB|^2}{2}$$

$$|WA|^2 = a^2 + \frac{|WB|^2 - |WD|^2}{2}$$

$$|WA|^2 = a^2 + \frac{(a\sqrt{7})^2 - a^2}{2}$$

$$|WA|^2 = a^2 + \frac{6a^2}{2}$$

$$|WA|^2 = 4a^2$$

$$|WA| = 2a$$

Możemy już obliczyć sinus kąta β :

$$\frac{a}{|WA|} = \frac{a}{|WC|} = \sin \beta$$

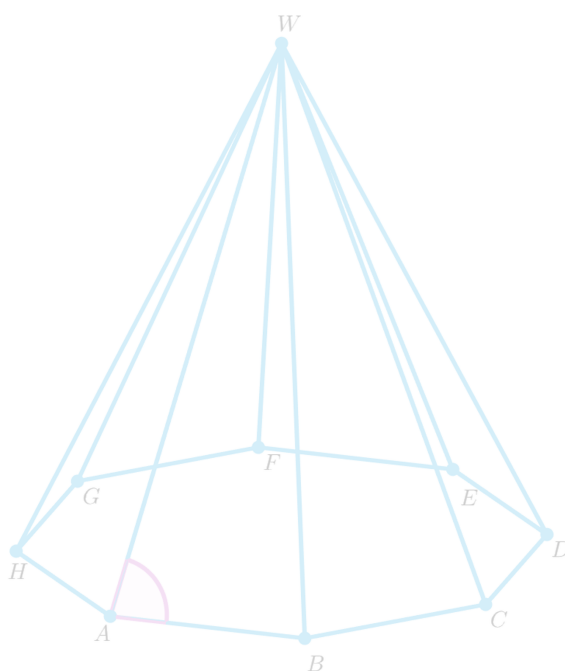
$$\frac{a}{2a} = \sin \beta$$

$$\frac{1}{2} = \sin \beta.$$

Rozwiązanie ostatniego przykładu wymagało nie tyle biegłości w zastosowaniu trygonometrii, co umiejętności poprawnego zastosowania definicji kąta między prostą

a płaszczyzną. Warto zauważyć, że kąt nachylenia krawędzi bocznej WA do płaszczyzny podstawy pokrył się z kątem między krawędzią boczną a krawędzią podstawy, zaś kąt nachylenia krawędzi bocznej WB do płaszczyzny podstawy pokrył się z kątem między krawędzią boczną a przekątną podstawy ostrosłupa. Błędna interpretacja wspomnianej definicji doprowadziłaby do błędnego rozwiązania zadania. Należy zatem w każdym przypadku dobrze przemyśleć swoje decyzje, aby potem doprowadzić do prawidłowego rezultatu.

Na koniec jeszcze jeden aplet, na którym są widoczne różnego rodzaju kąty w ostrosłupach. Niech takie podsumowanie pozwoli na uporządkowanie poznanych wiadomości o kątach w ostrosłupach.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfBWskNyM>

Słownik

kąt między prostą a płaszczyzną

kąt między prostą a jej rzutem prostopadłym na daną płaszczyznę

kąt między płaszczyznami (kąt dwuścienny)

każda z dwóch części przestrzeni, na jakie dzieli ją dwie półpłaszczyzny, nazywane ścianami kąta dwuściennego, mające wspólną krawędź nazywaną krawędzią kąta dwuściennego, wraz z punktami każdej półpłaszczyzny

twierdzenie cosinusów

twierdzenie określające związek między kątem wewnętrznym trójkąta i bokami tego trójkąta:

w dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego z boków jest równy sumie kwadratów długości pozostałych dwóch boków pomniejszonej o podwojony iloczyn tych boków i cosinusa kąta między nimi zawartego

ostrosłup prawidłowy

ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym

kąt środkowy wielokąta foremnego

kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu opisanego na tym wielokącie, a ramiona zawierają promienie tego okręgu poprowadzone do dwóch sąsiednich wierzchołków wielokąta

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D. Prezentuje ona zadanie, w którym celem jest wyznaczenie miar różnego rodzaju kątów w ostrosłupie. Obserwuj, jak definiować zaznaczone w bryle kąty oraz jak samodzielnie zaznaczać kąty, dla których podano opis słowny. Po zapoznaniu się z materiałem, spróbuj rozwiązać polecenia problemowe umieszczone pod animacją.

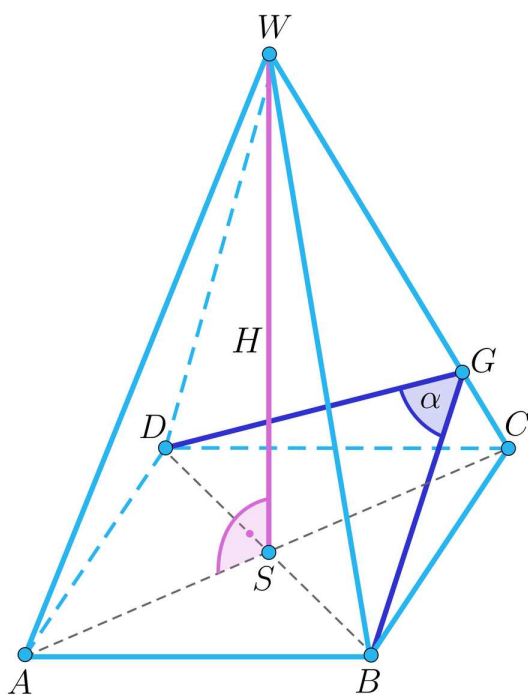
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Db2wglVZV>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego miary kątów między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach.

Polecenie 2

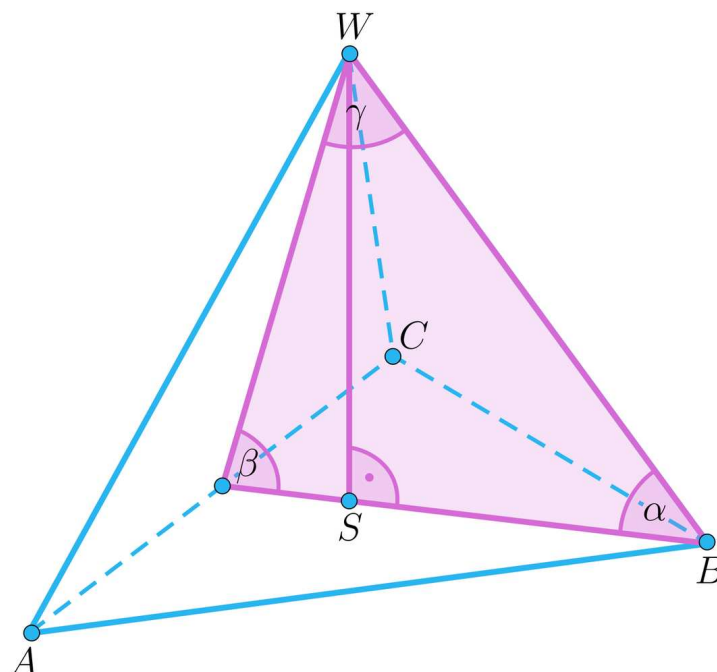
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Opisz zaznaczony w nim kąt α używając trzech różnych pojęć:

- a) kąta między odcinkami,
- b) kąta między płaszczyznami,
- c) kąta między odcinkiem a płaszczyzną.



Polecenie 3

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym zaznaczono trzy kąty.



Połącz nazwy kątów z ich opisami.

γ

Kąt między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

α

Kąt między krawędzią boczną a ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

β

Kąt między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

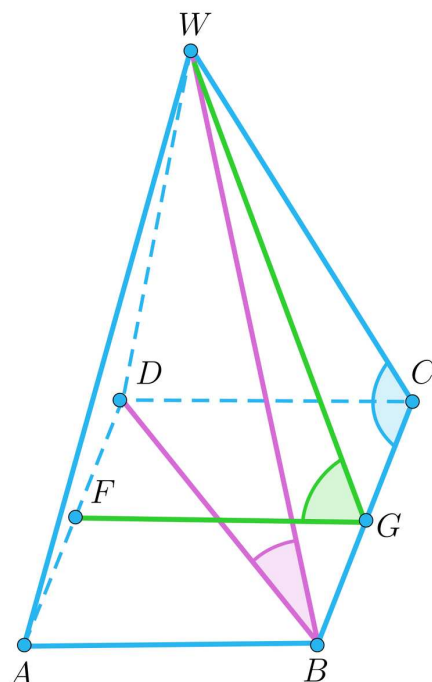
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny.



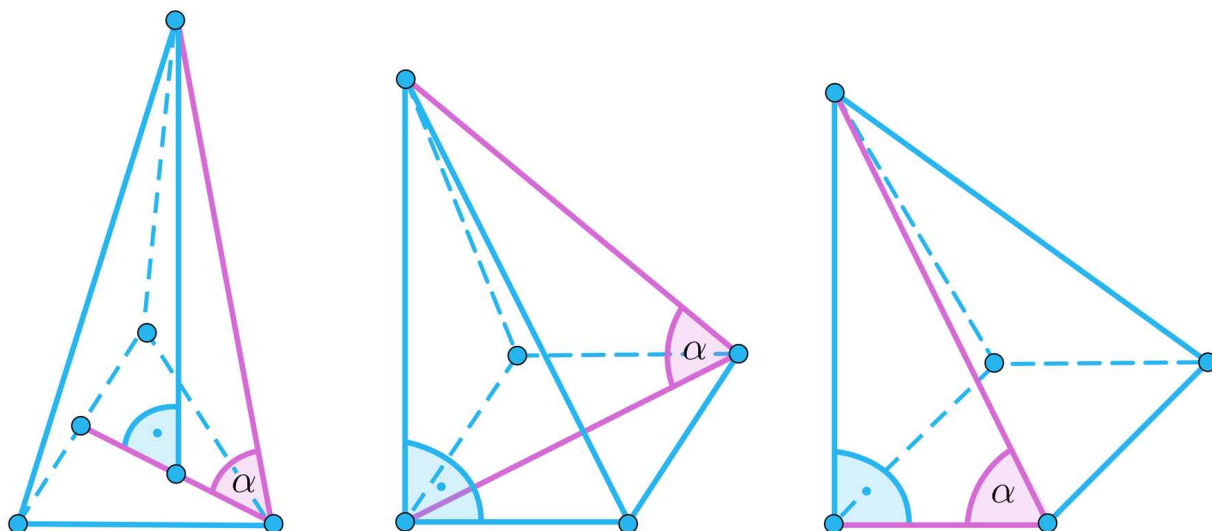
Który z wymienionych kątów jest kątem między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy?
Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $\angle WGF$

☐ $\angle WCB$

☐ $\angle WBD$

Ćwiczenie 2



Na których rysunkach zaznaczony kąt **nie jest** kątem między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Tylko na rysunku 3.

☐ Tylko na rysunku 2.

☐ Tylko na rysunku 1 oraz 2.

Ćwiczenie 3



Uzupełnij poniższy tekst wyrazami podanymi poniżej, aby otrzymać kompletny dowód twierdzenia:

Rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę może być albo albo punkt. Jeżeli tym rzutem jest , to dana jest prostopadła do płaszczyzny.

Wynika stąd, że rzutem prostokątnym krawędzi bocznej ostrosłupa na płaszczyznę jego podstawy może być albo albo punkt. Jeżeli tym rzutem jest , to dana jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Ponieważ tylko jedna ostrosłupa może mieć taką własność, to prawdziwe jest twierdzenie:

"W każdym ostrosłupie n -kątnym rzutem prostokątnym co najmniej $n - 1$ krawędzi bocznych na płaszczyznę podstawy są odcinki".

odcinek

punkt

odcinek

odcinek

prosta

odcinek

punkt

prosta

prosta

prosta

krawędź boczna

krawędź boczna

Ćwiczenie 4



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt. Punkt przecięcia przekątnych podstawy jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa. Wynika stąd, że:

☐ Ściany boczne ostrosłupa tworzą z podstawą równe kąty.

☐ Krawędzie boczne ostrosłupa są równej długości.

☐ Krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z podstawą równe kąty.

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCW$, a krawędzie boczne AW , BW , CW tworzą z podstawą kąty o równych miarach. Która własność musi być prawdziwa:

☐ Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

☐ Punkt S jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC .

☐ Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Ćwiczenie 6



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy a , wysokość ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz kąt nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Ćwiczenie 7

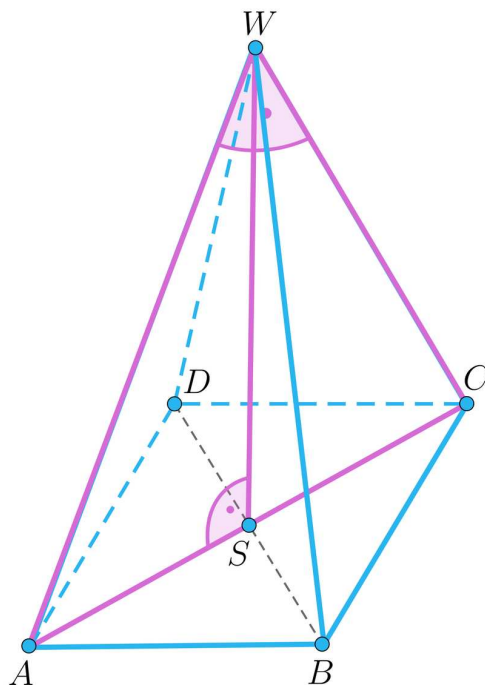


Podstawą ostrosłupa jest romb o boku długości 24 i kącie rozwartym 120° . Przeciwnieległe krawędzie boczne ostrosłupa są parami równe. Krótsza krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy bryły. Oblicz cosinusy kątów nachylenia krawędzi bocznych tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Ćwiczenie 8



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$ o podstawie $ABCD$, trójkąt AWC jest prostokątny. Udowodnij, że wszystkie krawędzie ostrosłupa są takiej samej długości i oblicz cosinus kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.



Dla nauczyciela

Autor: Bożena Koprowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Miary kątów między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje w ostrosłupach opisane kąty między prostymi i płaszczyznami
- rozpoznaje w ostrosłupach podstawowe jego elementy (np. wysokość ostrosłupa, wysokość ściany bocznej ostrosłupa, spodek wysokości ostrosłupa)
- nazywa zaznaczone w ostrosłupie kąty, używając nazw elementów ostrosłupa
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pokaz,
- metoda problemowa,
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- modele ostrosłupów
- komputer z głośnikami i dostępem do Internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- projektor multimedialny/tablica interaktywna

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie definicji trzech rodzajów kątów w przestrzeni: kąta między prostymi, kąta między płaszczyznami i kąta między prostą a płaszczyzną. Wspólnie podają przykłady takich kątów w ostrosłupach, pokazując je na modelach brył i na ich rysunkach w rzucie.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna lekcję od wyświetlenia zadania 1 prezentującego kąty w ostrosłupach z części „Animacja 3D”. Po zapoznaniu się z materiałem uczniowie rozpoznają jakiego rodzaju kąty były wyznaczone w tym zadaniu.
2. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Bazując na rozwiązany zadaniu uczniowie w grupach ustalają strategię rozwiązania przykładu 3 z części „Przeczytaj”. Nauczyciel na forum klasy omawia najważniejsze aspekty rozwiązania. Podkreśla, że trzeba wyznaczyć miarę kąta środkowego pięciokąta oraz przyjąć długość krawędzi jako a .
3. Uczniowie dyskutują na forum rezultaty swojej pracy. Wspólnie rozwiązują przykład 3 z części „Przeczytaj” na tablicy. Nauczyciel dopowiada ewentualnie wartości dokładne funkcji trygonometrycznych kąta 36° .
4. Ponownie w grupach uczniowie rozwiązują przykład 4 z części „Przeczytaj”. W razie problemów nauczyciel pozwala im na wykorzystanie rozwiązania ze strony e-podręczniki.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie porównują swoje wyniki z rozwiązaniami umieszczonymi na stronie e-podręczniki.
2. Nauczyciel prezentuje aplet umieszczony w końcowej fazie części „Przeczytaj” i podsumowuje wiadomości o różnego rodzaju kątach w ostrosłupach.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca rozwiązanie problemów umieszczonych w pytaniach pod animacją 3D.

Materiały pomocnicze:

[Kąty pomiędzy płaszczyznami i prostymi oraz pomiędzy płaszczyznami w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać jako pracę samodzielną dla uczniów na lekcji. Po zapoznaniu się z zadaniem pierwszym można zostawić uczniom czas na rozwiązanie zadania 2, 3 i potem sprawdzić rozwiązania wykorzystując przygotowany materiał.