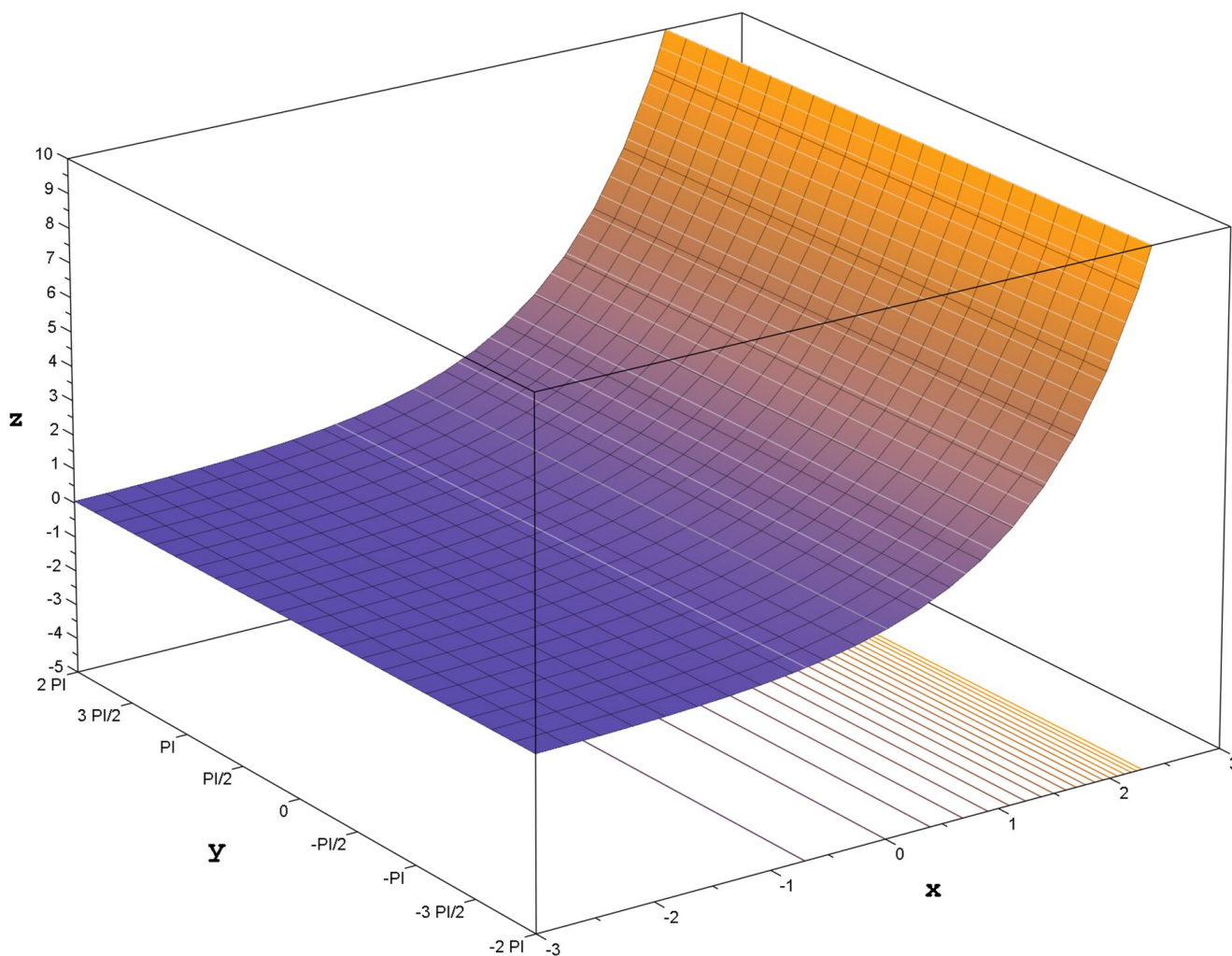
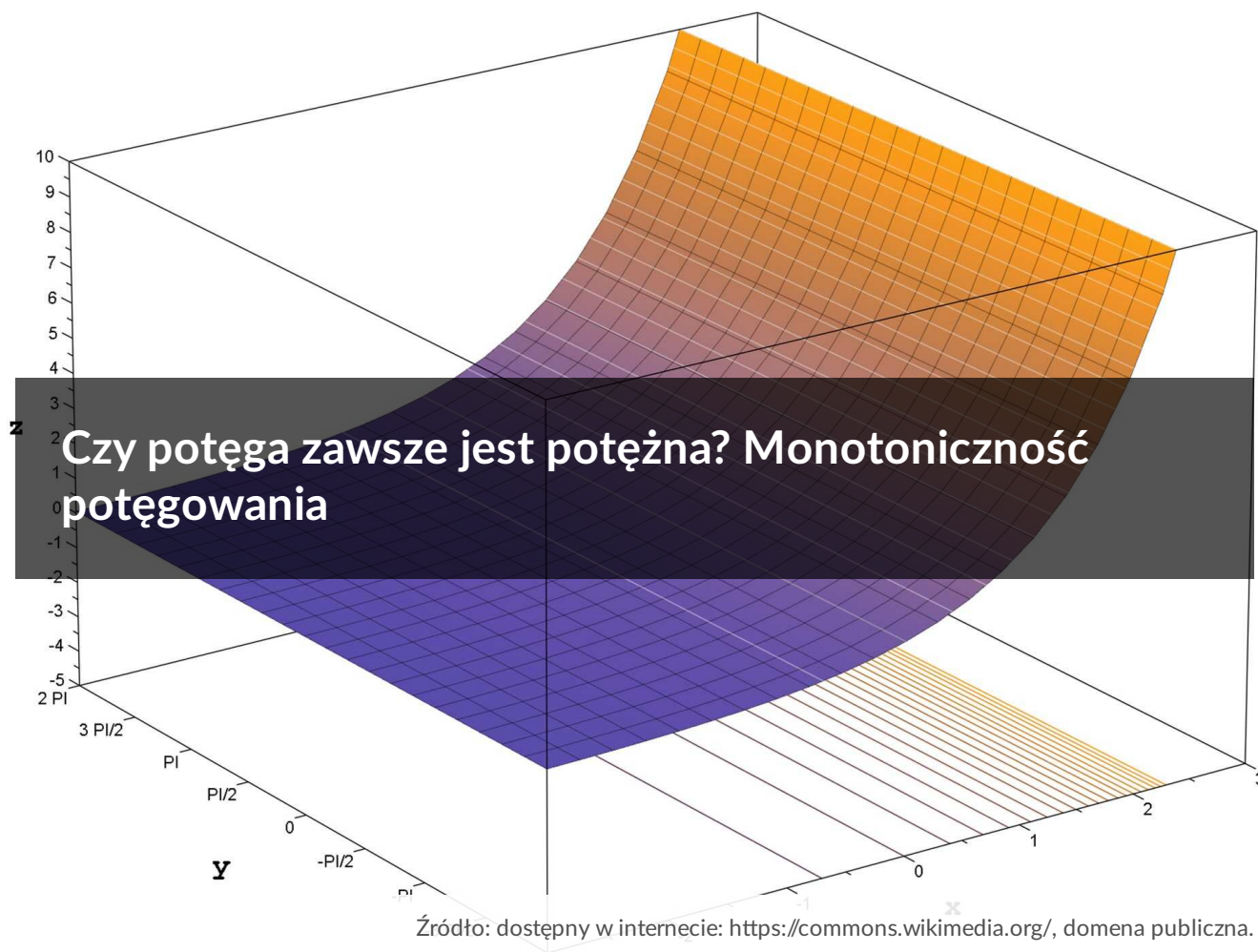




Czy potęga zawsze jest potężna? Monotoniczność potęgowania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Potęgowanie zwykle kojarzy się z uzyskiwaniem dużych liczb. Ma to miejsce w pewnych szczególnych przypadkach, ale nie jest regułą. W wyniku potęgowania możemy otrzymać również liczby bardzo małe. Wynik potęgowania zależy od podstawy potęgi oraz od jej wykładnika. Naszym głównym celem jest nauczyć się porównywać ze sobą potęgi o takich samych podstawach. Do tego celu posłużymy się wykresami różnych funkcji.

Twoje cele

- Stworzysz wykresy funkcji wykładniczych.
- Rozpoznaś wykresy funkcji wykładniczych.
- Wyciągniesz wnioski na temat monotoniczności funkcji wykładniczych.
- Porównasz ze sobą potęgi o takich samych podstawach.

Przeczytaj

Zacniemy od porównywania ze sobą potęg o tych samych podstawach.

Przykład 1

- $3^4 < 3^6$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{3}{4}\right)^4$
- $2^{-3} > 2^{-4}$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

Aby rozwiązać powyższe zadanie, możesz po prostu wykonać obliczenia:

$$3^4 = 81, 3^6 = 729$$

$$\text{Zatem } 3^4 = 81 < 729 = 3^6$$

Podobnie w pozostałych przypadkach.

To zadanie możemy też rozwiązać inaczej. W tym celu skorzystamy z wykresów funkcji wykładniczych.

Funkcja wykładnicza określona jest wzorem:

$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Przykładowe wykresy [funkcji wykładniczych](#) zobaczysz, wykorzystując widżet “Funkcja wykładnicza”.

Zwróć uwagę, że w tym widżecie niektóre różne ustawienia parametrów p i q generują ten sam wykres. Na przykład dla $p = 2$ i $q = 1$ otrzymamy ten sam wykres co dla $p = 4$ i $q = 2$ i jest to wykres funkcji

$$f(x) = \left(\frac{4}{2}\right)^x = 2^x.$$

Oczywiście dzieje się tak dlatego, że

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1}.$$

Do rozwiązania **Przykładu 1** możemy posłużyć się wykresami odpowiednich funkcji. Aby porównać ze sobą liczby 3^4 i 3^6 , ustaw wartości suwaków tak, aby podstawa potęgi miała

wartość 3, np. $p = 6$, $q = 2$, zaś argumenty $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. Z wykresu odczytaj, która liczba ma większą wartość:

$$f(x_1) = f(4) = 3^4 \text{ czy } f(x_2) = f(6) = 3^6.$$

Analogicznie możesz postąpić w pozostałych przypadkach.

Badanie **monotoniczności potęgowania** to po prostu analiza zachowania wartości pewnych wyrażeń w zależności od zmiany argumentów. Zdanie “Przy stałej podstawie większej od 1 potęga jest tym większa, im większy jest wykładnik” można byłoby wypowiedzieć następująco: “Dla podstawy większej od 1 funkcja wykładnicza jest rosnąca”. Analogicznie zdanie “Przy stałej podstawie z przedziału $(0, 1)$ potęga jest tym mniejsza, im większy jest wykładnik” można byłoby wypowiedzieć następująco: “Dla podstawy z przedziału $(0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca”.

Twierdzenia można uzasadnić nie odwołując się do wykresów funkcji. Jeśli liczbę większą od 1 podnosimy do potęgi o wykładniku naturalnym, to w istocie mnożymy liczbę większą od 1 przez liczbę większą od 1, co powoduje, że iloczyn się zwiększa. Jeśli liczbę dodatnią mniejszą od 1 podnosimy do potęgi o wykładniku naturalnym, to w istocie mnożymy liczbę dodatnią mniejszą od 1 przez liczbę dodatnią mniejszą od 1, co powoduje, że iloczyn się zmniejsza.

Dużo trudniej wyciągnąć ogólne wnioski w przypadku potęg o ujemnych podstawach. Funkcje wykładnicze w ogóle nie dopuszczają ujemnych podstaw, zaś porównanie dwóch konkretnych potęg o ujemnych podstawach zazwyczaj wymaga chwili zastanowienia.

Przykład 2

Aby porównać liczby

$$(-5)^{11} \text{ i } (-5)^{13},$$

możemy zauważyć, że obie liczby są ujemne, w związku z czym ta jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza (na osi liczbowej leży bliżej zera). Ponieważ

$$5^{11} < 5^{13}, \text{ więc } (-5)^{11} > (-5)^{13}.$$

Aby porównać liczby

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{15} \text{ i } \left(-\frac{2}{5}\right)^{13},$$

możemy zauważyć, że obie liczby są ujemne, w związku z czym ta jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza (na osi liczbowej leży bliżej zera). Ponieważ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{15} < \left(\frac{2}{5}\right)^{13}, \text{ więc}$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{15} > \left(-\frac{2}{5}\right)^{13}.$$

Przykład 3

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej:

$$k = (\sqrt{3})^{2\sqrt{2}}, l = (\sqrt{3})^{1+\sqrt{2}}, m = (\sqrt{3})^{\pi}, n = (\sqrt{3})^{-\sqrt{2}}, p = (\sqrt{3})^{-1}$$

Aby rozwiązać zadanie, przypomnijmy treść twierdzenia, które orzeka, że jeśli podstawa potęgi jest większa od 1, to potęga jest tym większa, im większy jest wykładnik.

Ponieważ $\sqrt{3} > 1$, więc wystarczy porównać wykładniki podanych potęg. Zauważmy, że:

$$2\sqrt{2} \approx 2,81 + \sqrt{2} \approx 2,4\pi \approx 3,14 - \sqrt{2} \approx -1,4$$

Zatem $-\sqrt{2} < -1 < 1 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2} < \pi$. Wobec tego $n < p < l < k < m$.

Przykład 4

Aby porównać potęgi, czasami warto najpierw sprowadzić je do takiej postaci, aby miały takie same wykładniki lub podstawy. Na przykład aby porównać liczby 1024^8 i 81^{20} , możemy je najpierw przekształcić, korzystając z własności potęg:

$$1024^8 = (2^{10})^8 = 2^{80}$$

$$81^{20} = (3^4)^{20} = 3^{80}$$

Teraz można bez trudu rozstrzygnąć, że

$$81^{20} > 1024^8, \text{ bo } 3^{80} > 2^{80}.$$

Aby porównać liczby

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-47} \text{ i } 234^{28},$$

możemy je najpierw przekształcić, korzystając z własności potęg.

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-47} = (3^{-3})^{-47} = 3^{141}$$

$$234^{28} = (3^5)^{28} = 3^{140}$$

Teraz łatwo zauważyć, że

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-47} > 234^{28}, \text{ bo}$$

$$3^{141} > 3^{140}.$$

Słownik

funkcja wykładnicza

funkcja opisana wzorem $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

monotoniczność potęgowania

zachowanie wartości funkcji wykładniczej w zależności od zachowania argumentów.

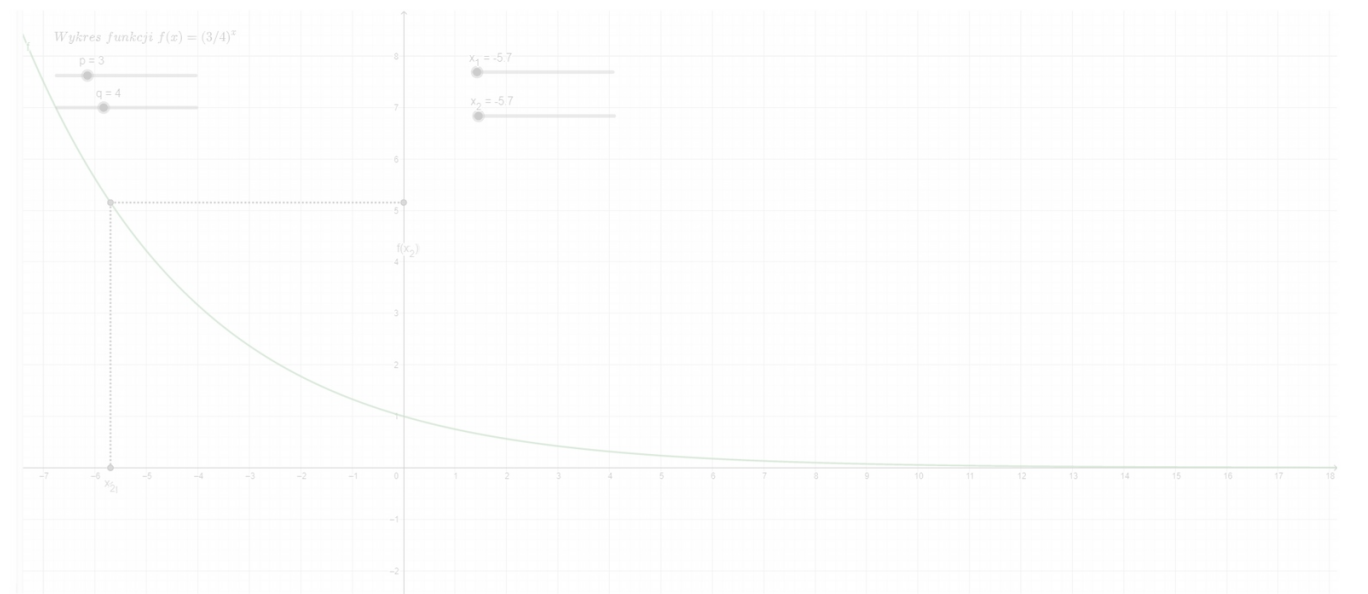
Monotoniczność funkcji wykładniczej można scharakteryzować dwoma zdaniami: Przy stałej podstawie większej od 1 potęga jest tym większa, im większy jest wykładnik; przy stałej podstawie z przedziału $(0, 1)$ potęga jest tym mniejsza, im większy jest wykładnik

Funkcja wykładnicza

Korzystając z suwaków p i q , możesz naszkicować wykresy różnych funkcji wykładniczych. Korzystając z tych wykresów, określ monotoniczność funkcji o podanych niżej wzorach. Dziedzina każdej z nich jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Mówimy, że funkcja f jest rosnąca, jeśli wraz ze wzrostem argumentów rosną również wartości funkcji.

Mówimy, że funkcja f jest malejąca, jeśli wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqmzdZ0LL>

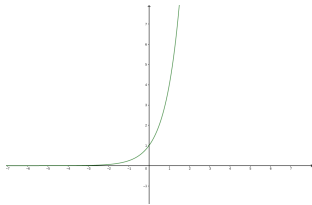
Polecenie 1

Określ monotoniczność funkcji o podanych wzorach.

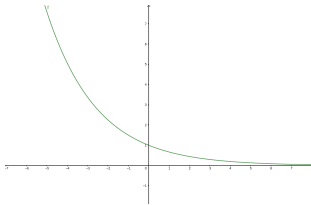
	Funkcja rosnąca	Funkcja malejąca
$f(x) = 5^x$	☐	☐
$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	☐	☐
$f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$	☐	☐
$f(x) = (0,5)^x$	☐	☐

Polecenie 2

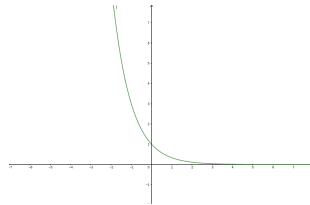
Korzystając z widżetu "Funkcja wykładnicza", połącz w pary wzory funkcji i ich wykresy. Dziedziną każdej z poniższych funkcji jest $\mathbb{R}$.



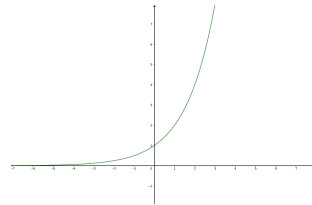
$$g(x) = 4^x$$



$$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$f(x) = 2^x$$



$$k(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Polecenie 3

Uzupełnij twierdzenia.

Spośród dwóch potęg o tych samych podstawach większych od 1 ta jest większa, której wykładnik jest .

Spośród dwóch potęg o tych samych podstawach z przedziału $(0, 1)$ ta jest większa, której wykładnik jest .

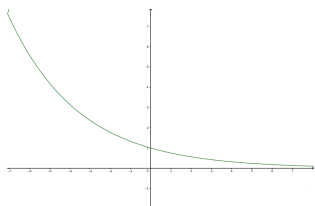
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

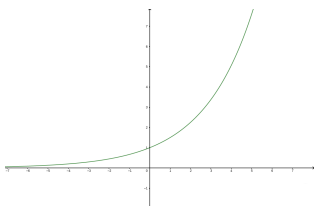
Ćwiczenie 1



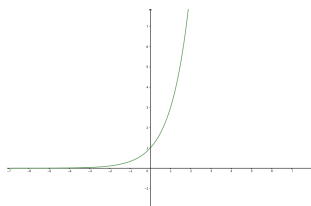
Korzystając z apletu "Funkcja wykładnicza", połącz w pary wzory funkcji i ich wykresy.
Dziedziną każdej z poniższych funkcji jest $\mathbb{R}$.



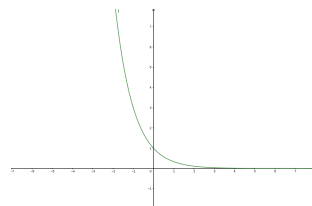
$$f(x) = 3^x$$



$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

Ćwiczenie 2



Porównaj liczby. Wstaw jeden ze znaków: $<$, $>$ lub $=$.

Pierwsza liczba	Znak porównania	Druga liczba
$5^{\sqrt{2}}$		$5^{\sqrt{3}}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$		$\left(\frac{2}{3}\right)^{106}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{-10}$		$\left(\frac{3}{4}\right)^{-20}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^{\pi}$		$\left(\frac{5}{4}\right)^3$
36^4		6^8
$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\sqrt{2}}$		$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\sqrt{3}}$

Ćwiczenie 3



Uporządkuj w kolejności rosnącej:

9^7



3^{12}



$\left(\frac{1}{9}\right)^{-8}$



$27^{\frac{8}{3}}$



$3^6 \cdot 3^4$



$\frac{3^{20}}{3^9}$



$\left(\frac{1}{3}\right)^{-15}$



$81^{\frac{3}{4}}$



Ćwiczenie 4



Uporządkuj w kolejności malejącej:

$$(0,4)^{17}$$



$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-10}$$



$$\left(\frac{2}{5}\right)^{15}$$



$$\left(\frac{25}{4}\right)^{-10}$$



$$\left(\frac{4}{25}\right)^8$$



$$\left(\frac{2}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5$$



$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^6\right)^3$$



Ćwiczenie 5



Porównaj liczby. Wstaw jeden ze znaków: $<$, $>$ lub $=$.

Pierwsza liczba	Znak porównania	Druga liczba
1024^8		81^{20}
$\left(\frac{1}{27}\right)^{-47}$		243^{28}
$(2\sqrt{2})^{28}$		$\left(\frac{\sqrt{8}}{64}\right)^{-6}$
$\left(\frac{\sqrt[3]{81}}{9\sqrt[4]{27}}\right)^{-12}$		$(27\sqrt[3]{9})^6$

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie prawdziwe równości.

☐ $(9^2)^3 = 9^6$

☐ $\frac{0,2^{-5}}{5^{-7}} = 0,04^2$

☐ $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)^{-12} = 4^{12}$

☐ $\frac{9^6}{(\sqrt{8} \cdot \sqrt{32})^3} = \left(\frac{9}{4}\right)^6$

☐ $\frac{6^{12}}{3^{12}} = 1$

Ćwiczenie 7



Porównaj liczby. Wstaw jeden ze znaków: $<$, $>$ lub $=$.

Pierwsza liczba	Znak porównania	Druga liczba
$\left(-\frac{3}{2}\right)^5$		$\left(-\frac{3}{2}\right)^7$
$(-2)^6$		$(-2)^8$
$\left(-\frac{2}{3}\right)^7$		$\left(-\frac{2}{3}\right)^9$
$\left(-\frac{3}{4}\right)^8$		$\left(-\frac{3}{4}\right)^{10}$

Ćwiczenie 8



Uporządkuj rosnąco liczby:

$$81^4$$



$$\left(\sqrt[6]{27}\right)^{12}$$



$$243^{\frac{9}{5}}$$



$$\left(3\sqrt[4]{3}\right)^{12}$$



$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-4}$$



Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Czy potęga jest potężna? Monotoniczność potęgowania

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- tworzy wykresy funkcji wykładniczych.
- rozpoznaje wykresy funkcji wykładniczych.
- wyciąga wnioski na temat monotoniczności funkcji wykładniczych.
- porównuje ze sobą potęgi o tych samych podstawach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- mapa skojarzeń;
- dyskusja;

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie zawarte w temacie lekcji: Czy potęga zawsze jest potężna? Uczniowie pracują metodą burzy mózgów i przedstawiają swoje propozycje. Moderator zapisuje je na tablicy w formie mapy skojarzeń. Po fazie twórczej następuje weryfikacja pomysłów. Chętny/wybrany uczeń podsumowuje pracę klasy. Nauczyciel czuwa nad poprawnością i w razie potrzeby uzupełnia informacje.

2. Nauczyciel przedstawia cel zajęć: Zbadanie monotoniczności funkcji wykładniczej oraz nauczenie się porównywać ze sobą potęgę o tych samych podstawach.

Faza realizacyjna

1. Uczniowie porównują ze sobą potęgi o tych samych podstawach, posługując się wykresami funkcji wykładniczej. Korzystają w tym celu z apletu umieszczonego w e-materiale. Analizują Przykład 1 i Polecenie 2 z tekstu e-materiału oraz ich wyjaśnienie. Następnie wykonują ćwiczenia 1 i 2 z bloku ćwiczeń interaktywnych.

2. Uczniowie na podstawie treści e-materiału analizują, jakie elementy potęg wpływają na monotoniczność potęgowania. Nauczyciel czuwa nad przebiegiem dyskusji i poprawnością formułowanych wniosków. Rozumowanie uczniów powinno zmierzać do twierdzenia, że jeśli podstawa potęgi jest większa od 1, to potęga jest tym większa, im większy jest wykładnik.

3. Nauczyciel pyta uczniów, czy mogą podobne wnioski wysnuć w przypadku potęg o ujemnych podstawach. Prosi uczniów o przeanalizowanie Przykładu 2. Uczniowie przedstawiają swoje propozycje. Nauczyciel czuwa nad poprawnością rozumowania. Uczniowie powinni dojść do wniosku, że w przypadku potęg o ujemnych podstawach ta

liczba jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza (na osi liczbowej leży bliżej zera).

4. Uczniowie w 4 grupach rozwiązują ćwiczenia 3–6. Ta grupa, która wykona poprawnie pracę jako pierwsza, jest nagradzana przez nauczyciela oceną za aktywność.

Faza podsumowująca

1. Na zakończenie zajęć nauczyciel zadaje uczniom pytania: Które etapy badania monotoniczności funkcji wykładniczych były dla was łatwe, a które trudne? Jak możecie praktycznie wykorzystać wiadomości o porównywaniu potęg i monotoniczności funkcji wykładniczych oraz umiejętności, które dziś zdobyliście? Chętni/wybrani uczniowie podsumowują zajęcia.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7 i 8.

Materiały pomocnicze:

[Funkcja wykładnicza i jej własności. Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować treść multimedium bazowego jako pracę własną przed lekcją lub po niej, jako podsumowanie.